Report n.14

Applicazioni della Programmazione Frazionaria nel campo eeconomico-finanziario

Laura MARTEIN

Pisa, 1988
Questa ricerca è stata parzialmente finanziata dal Ministero della Pubblica Istruzione.

1 - Introduzione

La programmazione frazionaria, che consiste nella massimizzazione o minimizzazione di una funzione obiettivo espressa come rapporto di due funzioni, è uno dei settori della programmazione matematica più ampiamente studiato in questi ultimi anni come testimonia il considerevole numero di articoli apparsi nella letteratura [1,2,3].
Scopo di questa nota didattica è quello di mettere in luce, oltre alle linee generali di ricerca del settore, le potenziali applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario.
La presente nota, pur non avendo la pretesa di fornire una panoramica ampia e completa di tutto ciò che è stato pubblicato sull'argomento, si prefigge l'obiettivo di introdurre il ricercatore nel campo attraverso una semplice sintesi che va dai principali aspetti teorici ad una classificazione dei vari metodi risolutivi proposti ed ad una descrizione delle applicazioni ritenute dall'Autore più significative nel campo economico-finanziario.

2 - Alcune applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario.

Una delle principali ragioni per cui la programmazione frazionaria ha suscitato, in questi ultimi anni, l'attenzione e l'interesse di molti studiosi, va ricercata nelle sue molteplici applicazioni in campi anche diversi da quello economico; non di rado poi, un problema di programmazione frazionaria si riscontra come sottoproblema in vari settori della programmazione matematica come, ad esempio, nelle reti di flusso e nella teoria dei giochi [4,5].
In questo paragrafo metteremo in evidenza come la programmazione frazionaria intervenga nella modellizzazione di vari problemi di natura economico-finanziaria; si perviene ad un problema di programmazione frazionaria modellizzando problemi di selezione del portafoglio [6,7,8], problemi di minimo rischio [9,10] , problemi di controllo ottimo di sistemi

dinamici governati da catene di Markov [11,12,13], problemi di allocazione delle risorse [14,15,16], problemi di inventario [17,18].

La programmazione frazionaria nasce poi spontanea ottimizzando un rapporto che esprime la misura di efficienza di un sistema; così ad esempio:

- si minimizza il rapporto tra materiale sprecato e materiale prodotto in problemi di taglio [19];
- si massimizza il tasso di crescita del reddito nazionale in modelli macrodinamici lineari di pianificazione nazionale basati sull'analisi input-output [20];
- si massimizzano i rapporti profitto/capitale impiegato; profitto/costo; profitto/tempo, che esprimono indici di efficienza in vari progetti di natura economico-finanziaria [14,16,21,22].

Per quanto riguarda le applicazioni della programmazione frazionaria in campi diversi da quelli sopra menzionati rimandiamo a [1,2,3].

Illustreremo ora, nelle linee generali, alcune delle applicazioni che riteniamo più significative nel settore economico-finanziario.

Un problema di selezione del portafoglio [7].

Il problema consiste nel massimizzare il profitto derivante dall'investimento di una somma unitaria in **n** attività.

Si denoti con x_i la percentuale di capitale investita nell'attività i e con r_i il reddito ottenuto quando l'intera somma è investita nell'attività i, i=1,...,n.

Il profitto ottenuto in corrispondenza della politica di investimento $(x_1,..., x_i,...,x_n)$ è dato da

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

soggetto agli ovvi vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \quad i=1,...,n$$

ed ad eventuali altri vincoli strettamente legati alla natura del problema.
Se r_i è noto a priori (come ad esempio accade investendo in titoli ad interesse costante) si perviene al problema di programmazione lineare

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , x_i \geq 0 \ , i = 1,...,n$$

Se si investe invece in attività il cui provento è incerto, è naturale considerare r_i come una variabile casuale dopodichè il precedente problema, adesso di natura stocastica, diviene equivalente [9,10] al problema deterministico

$$\max (c^T x / \sqrt{x^T Q x}) \quad , \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \quad x_i \geq 0 \ , i = 1,...,n$$

dove le componenti di c sono i valori medi delle componenti di r, mentre Q (matrice simmetrica definita positiva) denota la matrice di varianza-covarianza di r.
Algoritmi per risolvere quest'ultimo problema sono stati proposti in [23,24].

Un problema di minimo rischio [9]

Il problema consiste nel massimizzare la probabilità che la funzione obiettivo assuma un valore non inferiore ad una soglia prefissata.
Con riferimento al problema precedente, si vuole determinare, nel caso in cui r_i siano variabili casuali, una politica ottima che minimizzi il rischio di investimento, ovvero, sapendo che investendo il capitale unitario in attività che forniscono un profitto certo k, si vuole massimizzare la probabilità che la scelta dell'investimento dia un reddito non inferiore a k.
Si perviene al problema

$$\max P \{ r^T x \geq k \} , \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \quad x_i \geq 0 \ , i = 1,...,n$$

Anche un tale problema si può dimostrare [9,10] equivalente al seguente problema deterministico

$$\max [(c^T x - k) / \sqrt{x^T Q x}] , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , x_i \geq 0 \ , i = 1,...,n$$

dove c e Q hanno lo stesso significato dato nell'esempio precedente.

Un problema di allocazione delle risorse [16,25]

Il problema consiste nella determinazione delle quantità di risorse che devono essere allocate in certe attività in modo da massimizzare il profitto da esse derivante.

Una formulazione sufficientemente ampia di tale problema che permette di trattare problemi di varia natura [25] tra i quali rientrano quelli di selezione del portafoglio e di minimo rischio è la seguente.

Siano :

- K il numero delle attività;
- J il numero delle risorse a disposizione;
- h_j la quantità disponibile della risorsa j, j=1,..,J;
- α_{jk} l'efficacia della risorsa j se allocata nell'attività k, j = 1,..,J, k = 1, ..., K;
- β_{jk} il costo dell'allocazione di una unità della risorsa j nell'attività k, j = 1,...,J, k = 1, ..., K;
- β_0 un costo fisso.

Indicata con x_{jk} la quantità di risorsa j allocata nell'attività k (j=1,..,J, k = 1, ..., K) e con ϕ_k una funzione che esprime il profitto derivante dalla attività k in conseguenza delle allocazioni su essa, si perviene al seguente problema di programmazione frazionaria concavo-convessa

$$\max \frac{\sum_{k=1}^{K} \phi_k \left(\sum_{j=1}^{J} \alpha_{jk} x_{jk} \right)}{\beta_0 + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} x_{jk}}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} \leq h_j \quad , \; j = 1,\ldots,J$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \; j = 1,\ldots,J \;\; ; \; k = 1,\ldots,K$$

dove si ipotizza che le funzioni ϕ_k siano concave, crescenti e differenziabili con continuità.

Un problema di matematica finanziaria [26]

In [26] si osserva che, per la valutazione dei contratti di leasing, quando il finanziamento ad essi relativo è in concorrenza con un altro effettuato tramite vendita rateale, taluni locatari non si riferiscono solo al tasso interno relativo a regime esponenziale, ma anche, sia pure a scopo di grossolani confronti, al tasso interno di sconto commerciale del contratto di leasing. Sulla base di questa considerazione si pone il seguente problema:
a parità di tasso interno di rendimento ($\hat{\imath}$) per la società di leasing, ci si domanda come scegliere l'ammontare della quota in contanti (δ), del canone di base (α), del valore di riscatto (β) e la durata del contratto (T) in modo da rendere minimo il tasso di sconto commerciale (d), ovvero, come rendere più concorrenziale, dal punto di vista del cliente, il contratto di leasing.

Il problema posto può essere così formalizzato:

$$\min \left[d(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta + \alpha c^T e + \beta - 1}{\alpha + c^T t + \beta T} \right]$$

$$\delta + \alpha c^T \phi(\hat{i}) + \beta \phi_\beta(\hat{i}) = 1$$

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 (\beta_0, \delta_0)$$

$$\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 (\alpha_0, \delta_0)$$

$$\delta_0 \leq \delta \leq \delta_1 (\alpha_0, \beta_0)$$

dove:

- c è il vettore del profilo dei canoni;
- e è il vettore avente ogni componente uguale ad 1;
- t è il vettore la cui componente s-ma rappresenta l'epoca di scadenza del canone s-mo;
- $\phi(\hat{i})$ è il vettore dei fattori di sconto;
- $\phi_\beta(\hat{i})$ è il fattore di sconto da applicare al valore di riscatto, versato in T.

Per quanto riguarda i vincoli, le limitazioni sulle variabili sono fissate opportunamente dalla società di leasing in base a diversi fattori di mercato, aziendali, merceologici, etc.
Si osservi, infine, che il precedente problema di programmazione frazionaria diviene un problema di programmazione frazionaria lineare se si ipotizza fissata la durata del contratto T.

Un problema di trasporto marittimo [27]

Il problema consiste nel determinare la combinazione di carico di N merci su una nave, in modo da realizzare il massimo profitto. Nella formulazione del problema occorre tener conto del tempo in cui la nave sta in porto per effettuare il caricamento della merce; infatti il fattore tempo influenza in modo notevole l'economia dell'intero trasporto per cui occorre prendere in considerazione i tempi di carico, tenuto conto che il caricamento delle merci non è, in generale, omogeneo rispetto al tempo. E' ragionevole, quindi, massimizzre il guadagno in rapporto al tempo in cui esso è realizzato.

I dati del problema sono i seguenti:

- Q_i è il peso (in tonnellate) della merce del tipo i da caricare, $i = 1,\dots, N$.
- g_i è il volume occupato da una tonnellata di merce $i = 1,\dots, N$.
- W è la portata della nave (in tonnellate).
- V è il volume totale della stiva.
- f_i è l'importo (in milioni di lire) ricevuto per il trasporto di una tonnellata della merce i, $i = 1,\dots,N$.
- k_i il numero di tonnellate della merce i caricata in un giorno;
- c_1 il costo della nave per ogni giorno di permanenza in porto;
- c_2 il costo della nave per ogni giorno di viaggio;
- s la velocità media della nave.

Indicato con x_i il numero di tonnellate della merce i-ma caricata, $i=1,\dots, N$, si ha che:

$f_i x_i$ è l'importo ricevuto per il trasporto di x_i tonnellate della merce i, $i = 1,\dots, N$.

$\sum_{i=1}^{N} f_i x_i$ è l'importo complessivo relativo alla decisione di caricare x_i tonnellate della merce i-ma , $i = 1,\dots, N$.

$g_i x_i$ è il volume occupato dal caricamento di x_i tonnellate della merce i.

$\sum_{i=1}^{N} g_i x_i$ è il volume complessivo occupato dai caricamenti $x_1, \dots, x_N$.

$\frac{x_i}{k_i}$ è il numero dei giorni necessari per caricare la merce i, $i = 1,\dots,N$

$\sum_{i=1}^{N} f_i x_i - c_1 \frac{x_i}{k_i} - c_2 \frac{d}{s}$ è il guadagno complessivo.

$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{k_i} + \frac{d}{s}$ è il tempo totale per il trasporto della merce, dato dal tempo di viaggio $(\frac{d}{s})$ sommato al tempo di caricamento.

Il problema sopra illustrato può essere formalizzato tramite il seguente problema di programmazione lineare frazionaria:

$$\max \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i x_i - c_1 \frac{x_i}{k_i} - c_2 \frac{d}{s}}{\frac{d}{s} + \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{k_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \leq W$$

$$\sum_{i=1}^{N} g_i x_i \leq V$$

$$x_i \leq Q_i \qquad i = 1,\dots, N$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots, N$$

Un problema di scorte [20]

Proponiamo di questo problema una versione semplificata che mette però ugualmente in luce le sue caratteristiche essenziali.

Una fabbrica produce k unità di un certo prodotto in relazione ad una richiesta di mercato di r unità ($r < k$); sia la produzione che la richiesta sono riferite ad una stessa prefissata unità di tempo.

La politica produttiva della fabbrica, in un certo orizzonte temporale T, si suppone essere la seguente: al tempo zero inizia il ciclo produttivo che prevede dapprima una produzione continuata per un arco di tempo t_1 nel quale si raggiunge un livello di scorte S, poi una cessazione della produzione non solo fino all'esaurimento delle scorte (che avviene in un tempo t_2) ma anche fino a che la richiesta inevasa del prodotto raggiunge il livello s in un tempo t_3 ed infine la ripresa della produzione fino a quando si riporta a zero il deficit di richiesta in un tempo t_4 , dopodichè il ciclo ha nuovamente inizio.

Denotati con:

- c_1 il costo di giacenza dell'unità di prodotto;

- c_2 il costo per unità di tempo in assenza di giacenze;
- c_3 un costo fisso (per ciclo produttivo);

il problema consiste nel determinare i tempi t_i , $i=1,...,4$ (e conseguentemente il livello di scorte S ed il livello deficitario s) in modo da minimizzare il costo medio rispetto al tempo, ovvero nel risolvere il problema:

$$\begin{cases} \min \left[F(t_1,t_2,t_3,t_4) = \dfrac{1/2\,[\,c_1 S\,(t_1+t_2) + c_2 s\,(t_3+t_4) + c_3]}{t_1+t_2+t_3+t_4} \right] \\ t_i > 0\ ,\ i = 1,..,4 \end{cases}$$

Tenendo conto delle seguenti relazioni (immediatamente deducibili dalla formulazione del problema) $(k\text{-}r)\, t_1 = S$, $r\, t_2 = S$, $r\, t_3 = s$, $(k\text{-}r)\, t_4 = s$, si ottiene il sottostante problema di programmazione quadratica frazionaria nelle variabili t_2 e t_3 :

$$\begin{cases} \min \left[F(t_2\,,t_3) = \dfrac{1/2\, k\, r\,(c_1 t_2^2 + c_2 t_3^2) + c_3\,(k\text{-}r)}{k\,(t_2+t_3)} \right] \\ t_2\ ,\ t_3 > 0 \end{cases}$$

3 - Il problema della programmazione frazionaria.

Un problema di programmazione frazionaria può essere formulato nel seguente modo:

$$P\ :\ \max\left(2(x) \overset{\Delta}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \right),\quad x \in R = \{\ x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) \le 0\ ,\ i = 1,.., m\}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g(x) > 0 \quad \forall\, x \in R$.

In particolare diremo che:

- P è un problema di programmazione lineare frazionaria se f(x), g(x), h_i (x), i = 1,.., m sono funzioni affini;

– P è un problema di programmazione quadratica frazionaria se f(x) e g(x) sono funzioni quadratiche e h_i (x) è una funzione affine , i = 1,.., m;

- P è un problema di programmazione frazionaria concavo-convesso se f(x) è una funzione concava e g(x) e h_i (x), i = 1,.., m, sono funzioni convesse su R.

E' ovvio che un problema di programmazione lineare frazionaria è anche un problema frazionario concavo-convesso, ma non vale il viceversa.
L'importanza dei problemi di programmazione frazionaria concavo-convessa è evidenziata dai seguenti risultati per la cui dimostrazione si rimanda a [28,29,30].

Teorema 1 Si considerino le funzioni $f : X \rightarrow IR$, $g : X \rightarrow IR$ dove $X \subseteq IR^n$ è un insieme convesso. Le funzioni z(x) = f(x)/g(x) è quasi concava [1] se vale una delle seguenti condizioni:
i) f concava con $f(x) \geq 0, \forall x \in X$ e g convessa con $g(x) > 0 \; \forall x \in X$;
ii) f concava, g affine con $g(x) > 0 \; \forall x \in X$;
iii) f e g affini, con $g(x) > 0 \; \forall x \in X$.
Se inoltre f e g sono differenziabili, allora z(x) è pseudoconcava [2].

[1] Una funzione f definita su un insieme convesso $X \subseteq IR^n$ è detta quasiconcava se e solo se
$\phi(\lambda x_1+ (1-\lambda) x_2) \geq \min \{ \phi(x_1), \phi(x_2) \}, \forall x_1, x_2 \in X$ e $\forall \lambda \in [0,1]$

[2] Una funzione differenziabile ϕ definita su un insieme aperto e convesso $X \subseteq IR^n$ è detta **pseudoconcava** se $\forall x_1, x_2 \in X$ $\phi(x_1) > \phi(x_2)$ implica $(x_1- x_2)^T \;\; \phi (x_2) > 0$.

La classe dei problemi di programmazione frazionaria, aventi una funzione obiettivo pseudo-concava e regione ammissibile convessa, gode di importanti proprietà rispetto all'ottimizzazione, proprietà che vengono riportate nel seguente teorema .

Teorema 2 . Si consideri il problema P dove z è una funzione pseudoconcava e R è un insieme convesso.
Allora valgono le seguenti proprietà:
i) L'insieme S delle soluzioni ottime è, se non vuoto, convesso;
ii) Un punto di massimo locale è anche un punto di massimo globale;
iii) Un punto che verifica le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker è soluzione ottima del problema.

I teoremi 1 e 2 permettono di individuare classi di problemi di programmazione frazionaria rilevanti per le loro applicazioni economico-finanziarie (ad esempio problemi di selezione del portafoglio e problemi di minimo rischio) e per i quali è possibile stabilire metodi numerici risolutivi efficienti. Esempi di tali classi possono essere trovati nei problemi di programmazione lineare frazionaria e nei problemi aventi una funzione obiettivo definita su un poliedro di $\mathbb{R}^n$ ed esprimibile come il rapporto tra una funzione quadratica concava ed una funzione affine.

4 - Metodi risolutivi nella programmazione frazionaria.

La programmazione frazionaria, intesa come studio sisttematico teorico ed algoritmico, trova la sua origine storica nella modellizzazione, come problema lineare frazionario, di varie applicazioni di natura strategica e di controllo ottimo di sistemi dinamici [10,11,31]. Ciò spiega il motivo per cui la classe dei problemi di programmazione lineare frazionaria sia stata la prima e la più ampiamente studiata sia da un punto di vista teorico che algoritmico; le sue particolari proprietà hanno permesso il fiorire di numerose tecniche risolutive basate essenzialmente su procedure di tipo simplex-like [32,33,34]

Le continue e crescenti applicazioni hanno sottolineato però l'esigenza di avere metodi risolutivi per un problema frazionario nella sua formulazione più generale, metodi che andassero al di là di tecniche di linearizzazione tendenti a determinare la soluzione ottima del problema attraverso una successione di soluzioni ottime di opportuni sottoproblemi di programmazione lineare frazionaria.

Come già osservato, un programma frazionario non è in generale un programma concavo; ciò non di meno lo studio delle funzioni concave generalizzate ha permesso di stabilire importanti proprietà illustrate nel paragrafo precedente, che hanno portato ad ottenere numerosi metodi risolutivi che possono essere classificati tramite tre diversi approcci dei quali ci limiteremo ad illustrare gli aspetti fondamentali rimandando per uno studio più approfondito alla bibliografia:

I) **Metodo della trasformazione delle variabili.**

II) **Metodi parametrici.**

III) **Metodi duali.**

I) Metodo della trasformazione delle variabili.

L'idea del metodo consiste nel trasformare il problema frazionario P in un problema concavo ad esso equivalente al fine di poter applicare a quest'ultimo, i numerosi metodi numerici proposti nella letteratura.

Un tale approccio è stato proposto per la prima volta da Charnes-Cooper [32] che dimostrarono l'equivalenza tra un problema lineare frazionario ed un opportuno programma lineare. Applicando al problema P la trasformazione

$$t = 1 / g(x) \quad , \qquad y = t\,x$$

si ottiene il problema

$$P' : \quad \begin{cases} \max\ t\,f(y/t) \\ \dfrac{y}{t} \in R \\ t > 0 \\ t\,g(y/t) \leq 1 \end{cases}$$

Se P è un problema frazionario concavo-convesso, si può dimostrare [35,36] che P' risulta un problema concavo equivalente a P nel senso che ad una soluzione ottima x' di P corrisponde la soluzione (t', y') con $t' = 1/g(x')$, $y' = t'\,x'$ che è ottima per P' e, viceversa, ad una soluzione ottima (t',y') di P' corrisponde la soluzione $x' = y' / t'$ che è ottima per P.
Il fatto che il problema P' risulti un programma concavo permette di applicare ad esso un qualunque algoritmo di programmazione concava; in particolare la risoluzione di P' in luogo di P si è dimostrata utile, oltre al caso in cui il numeratore ed il denominatore sono funzioni affini, anche quando il numeratore è esprimibile come l'opposto della radice quadrata di una forma quadratica definita positiva ed il denominatore è una funzione affine (formulazione derivante, ad esempio, da problemi di minimo rischio e di selezione del portafoglio [7,9]).
Notiamo infine che sono state proposte [37] trasformazioni di variabile più generali di quelle di Charnes-Cooper, trasformazioni che si sono rivelate interessanti, però, più da un punto di vista teorico che computazionale.

II Metodi parametrici.

Il più noto metodo parametrico proposto per risolvere un problema frazionario concavo-convesso è quello di Dinkelbach [38] , che permette di ricondurre la risoluzione del problema P alla ricerca della radice di una funzione convessa ad una sola variabile. Più precisamente, si consideri il problema frazionario concavo-convesso P nel caso in cui il numeratore ed il denominatore siano funzioni continue definite su un insieme compatto, e si associ a P il problema parametrico

$$P'(\lambda):\ F(\lambda) \overset{\Delta}{=} \max_{x \in R} \left[f(x) - \lambda\, g(x) \right]$$

Si osservi che $P'(\lambda)$ assume una struttura particolare a seconda della classe dei problemi frazionari considerata; ad esempio, $P'(\lambda)$ diviene un problema quadratico concavo parametrico quando f è quadratica e g è affine o quadratica; mentre $P'(\lambda)$ diviene un problema lineare parametrico quando f e g sono affini (un tale problema è stato proposto per la prima volta da Isbell-Marlow nel 1956 [31]).
Notiamo che, in generale, tenuto conto che f è concava e g è convessa, il problema $P'(\lambda)$ è un problema concavo per ogni $\lambda \geq 0$. Per quanto riguarda la funzione $F(\lambda)$, valgono le seguenti proprietà per la cui dimostrazione rimandiamo in [38,39]:

p_1 : sia λ_0 una radice di $F(\lambda)$. Allora ogni soluzione ottima di $P'(\lambda_0)$ è anche soluzione ottima di P.

p_2 : $F(\lambda)$, $\lambda \in$ IR è una funzione continua, convessa e strettamente decrescente.

p_3 : la funzione $F(\lambda)$ ha una ed una sola radice λ_0 .

p_4 : risulta $F(\lambda) > 0$ se e solo se $\lambda < \lambda_0$

$F(\lambda) < 0$ se e solo se $\lambda > \lambda_0$.

Le proprietà sopra menzionate permettono di stabilire la convergenza dell'algoritmo di Dinkelbach [38,39] che può essere così descritto:
a partire da un punto x_i della regione ammissibile, si calcoli $\lambda_i = f(x_i)/g(x_i)$ e si risolva il problema concavo $P'(\lambda_i)$; indicata con x_{i+1} una soluzione ottima di $P'(\lambda_i)$, si ponga $\lambda_{i+1} = f(x_{i+1})/g(x_{i+1})$ e si risolva $P'(\lambda_{i+1})$, e così via. Si genera in tal modo una successione di parametri λ_i convergente alla radice λ_0 della funzione $F(\lambda)$ e, al tempo stesso, una successione di punti $x_i \in R$ convergente ad una soluzione ottima del problema P.
Una sperimentazione dell'algoritmo di Dinkelbach per alcune classi specifiche di problemi è stata fatta da Ibaraki [40].

Abbiamo visto che sia tramite il metodo della trasformazione delle variabili sia tramite l'algoritmo di Dinkelbach, la risoluzione di un programma frazionario concavo-convesso può essere ricondotta alla risoluzione di un programma concavo P' parametrico o non.

Ciò sembrerebbe esaurire lo studio relativo alla classe dei problemi frazionari concavo-convessi, potendosi applicare ad essa i metodi ora menzionati.

In realtà, il problema P' perde, se non in casi particolari, tutte o quasi le proprietà strutturali presenti nel problema originario e questo mette in evidenza i limiti di applicabilità dei metodi I) e II) descritti. Questa è la ragione per cui la problematica relativa alla risoluzione di un problema frazionario è ben lungi dall'essere risolta, ed è anche la ragione per cui molti problemi apparsi nella letteratura, che sono stati modellizzati come problemi frazionari, sono stati risolti "ad hoc" ovvero con procedure che hanno tenuto conto della struttura del problema in esame.

Tutto questo ha portato alla ricerca di metodi che fossero appplicabili a classi, le più ampie possibili, di problemi di programmazione frazionaria. Le idee fondamentali che sono alla base di tali algoritmi e che adesso illustreremo brevemente, mettono in evidenza che tali metodi, di natura parametrica, non solo tengono conto della particolare struttura del problema ma determinano anche una soluzione ottima in un numero finito di iterazioni. Inoltre, come risulterà dalla descrizione, l'approccio seguito è applicabile ad una vasta classe di problemi di ottimizzazione contenente quella della programmazione frazionaria.

Si consideri il problema P nella formulazione più generale:

$$P \ : \ \max\,(f(x) * g(x)), \quad x \in R$$

dove f e g sono funzioni a valori reali, definite in $\mathbb{R}^n$ e dove * denota una legge di composizione automatica (+, -, $\cdot$, :).

Supponiamo che P abbia soluzioni ottime così come il problema parametrico

$$P'(\xi) \ : \ F(\xi) \overset{\Delta}{=} \max\,(f(x) * \xi), \ x \in R \ , \ g(x) = \xi$$

dove $\xi \in \Omega$ è un parametro tale che

$$R \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \xi\} \neq \emptyset \quad \forall \ \xi \in \Omega$$

Ovviamente, il problema P è equivalente al problema $P'(\xi')$ dove ξ' è il livello corrispondente ad una soluzione ottima x^0 di P ovvero $\xi' = g(x^0)$.
Un approccio generale per risolvere P è quello di descrivere una procedura che, a partire da un livello ammissibile $\xi' \in \Omega$, verifica se tale livello è quello ottimo e, in caso negativo, determina un nuovo livello ξ'' tale che

$$F(\xi'') > F(\xi').$$

Ovviamente la possibilità di ottenere un metodo efficiente per risolvere P dipende dalle proprietà strutturali del problema. Un metodo sequenziale basato su opportune condizioni di ottimalità e che coinvolge il calcolo di moltiplicatori di Lagrange oltrechè una opportuna analisi parametrica, è descritto in [24,41,42,43,44,45].
Un tale metodo si è dimostrato particolarmente efficiente nella risoluzione dei seguenti problemi:
- f è affine, g è la p-ma potenza di una funzione affine con p intero negativo ed * rappresenta il prodotto ordinario [41,42].
- f è una funzione quadratica strettamente concava, g è una funzione affine oppure il quadrato di una funzione affine ed * rappresenta l'operazione di quoziente [24]. Tali classi di problemi hanno rilevante interesse nei problemi di selezione del portafoglio e nei problemi di minimo rischio.
- f è una funzione lineare o lineare frazionaria, g è una funzione lineare frazionaria ed * rappresenta l'operazione di somma [43,44]. Tali classi di problemi nascono come modellizzazione di problemi di inventario oppure descrivono la massimizzazione di opportuni coefficienti economici.
- f è una funzione lineare, g è la radice quadrata di una forma quadratica strettamente convessa ed * rappresenta l'operazione di differenza [45]. Anche tale classe di problemi è apparsa in letteratura come modello di un problema di minimo rischio.

III - Metodi duali.

Come è ben noto, la dualità svolge un ruolo molto importante nella programmazione concava, sia da un punto di vista teorico che computazionale. La particolare struttura di un problema frazionario ha però messso in evidenza la non validità sia della dualità Lagrangiana che di quella di Fenchel nella loro formulazione classica; ciò ha stimolato uno studio della dualità nella programmazione frazionaria che ha portato a proporre numerosi problemi duali diversi tra loro nella formulazione. Malgrado ciò, pochi sforzi sono stati fatti per utilizzare i risultati ottenuti a fini algoritmici e, tuttavia, quando il problema P ha particolari proprietà strutturali è possibile associare ad esso un problema duale che risulta più semplice da trattare da un punto di vista computazionale. Ad esempio, se P ha una funzione obiettivo che è il rapporto tra una funzione quadratica concava ed una funzione affine, allora il duale può essere scritto come un problema lineare con un vincolo aggiuntivo di tipo quadratico [36]. Per un tale problema è stato proposto, recentemente, un semplice metodo risolutivo [46]

BIBLIOGRAFIA

[1] Stancu-Minasian, I.M. *Bibliography of fractional programming : 1960-1976* . Pure and Applied Mathematika Sciences ,vol.13, pp.35-69, 1981.

[2] Stancu-Minasian, I.M.*A second bibliography of fractional programming : 1977-1981*. Pure and Applied Mathematika Sciences,vol.17, pp.87-102, 1983.

[3] Schaible, S. *Bibliography in fractional programming* . Zeitschrift fur Operations Research, vol.26, pp.211-241, 198

[4] Dantzig,G.B.,Blattner,W.and Rao,M.R.. *Finding a Cycle in a Grapgh with Minimum Cost to Time Ratio with Applications to a Ship Routing Problem.* In Theory of Graphs.International Symposium, Dunod, Paris and Gordon and Breach, New York, pp.77-83,1966.

[5] Schroeder, R.G. *Linear Programming Solutions in Ratio Games* . Operations Research, vol.18, pp.300-305,1970.

[6] Mao, J.C.T. *Essentials of Portfolio Diversification Strategy* . Journal of Finance vol.25, pp.1109-1121, 1975.

[7] Ziemba, W.T., Parkan,C. and Brooks-Hill,R.. *Calculation of Investment Portfolios with Risk Free Borrowing and Lending*. Management Science,vol. 21, pp.209-222, 1974.

[8] Faaland,B.H.,and Jacob,N.L. *The Linear Fractional Portfolio Selection Problem*. Management Science,vol. 27, pp.1383-1389, 1981.

[9] Bureanu B. *Solutions of Minimum Risk in Linear Programming*.

(Roumanian). Analele Universitatii Bucuresti, Seria Stiintele Naturii, Matematica-Mecanica vol.13, pp.121-140, 1964

[10]Charnes,A.,and Cooper, W.W. *Deterministic Equivalents for Optimizimg and Satisficing Under Chance Constraints*. Operations Research ,vol.11, pp.18-39, 1963.

[11] Klein,M. *Inspection - Maintenance - Replacement Schedule Under Marcovian Deterioration*. Management Science,vol. 9, pp.25-32,1962.

[12] Derman,C. *On Sequential Decisions and Marcov Chains*. Management Science,vol. 9, pp.16-24, 1962

[13] Arisawa,S. Elmaghraby S.E.,*Optimal time-cost trade offs in GERT-networks*. Management Sciences, vol.18, pp.589-599,1972.

[14] Mjelde,K.M.*Allocation of Resources According to a Fractional Objective*. European Journal of Operational Research ,vol.2, pp.116-124, 1978.

[15] Mjelde,K.M. *Allocation Problems Involving for Replenishment of Resources*. Operations Research Verfahren ,vol.35, pp.313-314,1979.

[16] Mjelde,K.M. *Methods of the Allocation of Limited Resources*. J.Wiley and Sons, Chichester, 1983.

[17] Cabot,A.V. *Maximizing the Sum of Certain Quasiconcave Functions Using Generalized Benders Decomposition*. Naval Research Logistics Quarterly,vol. 25, pp.473-482, 1978.

[18] Teterev,A.G. *A Certain Generalization of Linear and Fractional-Linear Programming* (Russian).Ekonomika i Matematiceskie Metody, vol.5, pp.440-447, 1969; English translation in Matekon 6, pp.246-259, 1970.

[19] Gilmore,P.C., and R.E.Gomory *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II.* Operations Research,vol. 11,pp.863-888, 1963.

[20] Stancu-Minasian,I.M. *Applications to the Fractional Programming.* Econom.Comput. Cybernet, Stud. Res. pp.69-86,1980.

[21] Bradley,S.P. and Frey,S.C. *Fractional Programming with Homogeneous Functions.* Operations Research, vol.22, pp.350-357,1974.

[22] Kydland,F.*Simulation of Linear Operators.* Institute of Shipping Research. Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen; translated and reprinted from Sosialoekonomen,vol. 23, 1969.

[23] Schaible, S. *Fractional Programming : Applications and Algorithms.* European Journal of Operational Research ,vol. 7, pp.111-120, 1981.

[24] Cambini,A.,Martein L.,Sodini C. *An Algorithm for two Particular nonlinear Fractional Programs.* Methods of Operation Research, vol.45, pp.61-70, 1983.

[25] Mjelde,K.M. *Allocation of Resources According to a Fractional Objective.* European Journal of Operational Research, pp.116-124, 1978.

[26] Uberti,M.C. *Nota su un'applicazione finanziaria della programmazione frazionaria* . Quaderno dell'Istituto di Matematica Finanziaria, Università di Torino, 1988.

[27] Bitran, G.R. and Novaes, A.G. *Linear Programming with a Fractional Objective Function*. Operations Research ,vol.21, pp.22-29,1973.

[28] Mangasarian,O.L. *Nonlinear Programming* . Mc Graw-Hill, 1969.

[29] Auriel,M. *Nonlinear Programming.Analysis and Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[30] Auriel,M.,Diewert,W.E.,Schaible,S. and Zang,I.*Generalized Concavity*. Plenum Press, New York and London, 1988.

[31] Isbell,J.R. and Marlow W.H. *Attrition Games*. Naval Research Logistics Quarterly ,vol.3, pp.71-94, 1956.

[32] Charnes,A. and Cooper,W.W.*Programming with Linear Fractional Functionals* . Naval Research Logistics Quarterly,vol. 9, pp.181-186, 1962.

[33] Martos,B.*Hyperbolic Programming*. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 11, pp.135-155, 1964; originally published in Math. Institute of Hungarian Academy of Sciences,vol. 5 (Hungarian), pp.383-406, 1960.

[34] Cambini, A. and Martein,L. *A Modified Version of Martos's Algorithm*. Methods of Operation Research, vol.53, pp.33-44, 1985.

[35] Schaible,S. *Fractional Programming,I,Duality*. Management Science, vol.22, pp.858-867,1976.

[36] Schaible,S. *Duality in Fractional Programming : A Unified Approach*. Operations Research,vol. 24, pp.868-873, 1976.

[37] Craven, B.D. and Mond,B. *On Fractional Programming and Equivalence*. Naval Research Logistics Quarterly ,vol.22, pp.405-410, 1975.

[38] Dinkelbach, W. *Nonlinear Fractional Programming*. Management Science, vol.13, pp.492-498, 1967.

[39] Ibaraki,T.*Solving Mathematical Programming Problems with Fractional Objective Functions*. In : Schaible,S. and Ziemba,W.T.(eds) *Generalized Concavity in Optimization and Economics*. Academic Press, New York, pp.441-472, 1981.

[40] Ibaraki, T. et al. *Algorithms for Quadratic Fractional Programming Problems*. Journal of Operations Research Society of Japan,vol. 19, pp.174-191, 1976.

[41] Martein,L. and Pellegrini,L. *Un algoritmo per la determinazione del massimo di una particolare funzione fratta soggetta a vincoli lineari*. Atti Giornate A.I.R.O., 1977.

[42] Martein,L. and Pellegrini,L. *Su una estensione di una particolare classe di problemi di programmazione frazionaria*. Atti del I Convegno A.M.A.S.E.S., 1977.

[43] Martein,L. *Massimo della somma tra una funzione lineare ed una funzione lineare fratta*. Rivista A.M.A.S.E.S., pp.13-20, 1985

[44] Cambini,A.,Martein,L. and Schaible,S. *On Maximizing a Sum of Ratios* . In corso di pubblicazione in Journal of Informations and Optimization Sciences.

[45] Sodini C. *Minimizing the Sum of a Linear Function and the Square Root of a Convex Quadratic Form*. Methods of Operations Research, vol. 53, pp.171-182, 1985.

[46] Martein,L. and Schaible,S. *On Solving a linear program with a Quadratic Constraint*. In corso di pubblicazione sulla Rivista A.M.A.S.E.S.

PUBBLICAZIONI
del
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all Economia

Report n. 1 - Some Optimality Conditions in Vector Optimization.(A.Cambini- L.Martein), 1987

Report n. 2 - On Maximizing a Sum of Ratios. (A.Cambini-L.Martein-S.Schaible), 1987

Report n.3 - On the Charnes-Cooper Transformation in Linear Fractional Programming. (G.Gasparotto), 1987

Report n. 4 - Non-linear Separation Theorems, Duality and Optimality. (A.Cambini), 1987

Report n. 5 - Indicizzazione parziale: aspetti metodologici e riflessi economici. (G.Boletto), 1987

Report n. 6 - On Parametric Linear Fractional Programming. (A.Cambini-C.Sodini), 1987

Report n. 7 - Alcuni aspetti meno noti delle migrazioni in Italia. (A.Bonaguidi), 1987

Report n. 8 - On Solving a Linear Program with one Quadratic Constraint. (L.Martein-S.Schaible), 1987

Report n. 9 - Alcune osservazioni sull'equazione funzionale $\phi(x,y,z) = \phi(\phi(x,y,t),t,z)$. (E.Lari), 1988

Report n.10 - Une étude par ménage des migrations des personnes âgées: comparaison des résultats pour l'Italie et les Etats-Unis. (F.Bartiaux), 1988

Report n.11 - Metodi di scomposizione del tasso di inflazione (G.Boletto), 1988

Report n.12 - A New Algorithm for the Strictly Convex Quadratic Programming Problem. (C.Sodini), 1988

Report n.13 - On Generating the Set of all Efficient Points of a Bicriteria Fractional Problem. (L.Martein), 1988

Report n.14 - Applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario. (L.Martein), 1988