Report n.17

Operazioni finanziarie di Soper e operazioni di puro investimento secondo Teichroew - Robichek - Montalbano

Paolo Manca

Pisa,1988
Questa ricerca è stata finanziata dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

ABSTRACT:

Nel '59 Soper [2] ha introdotto una interessantissima classe di operazioni finanziarie che da lui si sono denominate o. f. di Soper. Nel '65 Teichroew- Robichek - Montalbano, in due celebri articoli [3] [4], hanno introdotto il concetto di operazione di puro investimento ad un dato tasso i (pure investiment project).
I due tipi di operazioni sono notevolmente collegati.
Scopo della nota è di mostrare la natura di tale collegamento e insieme di caratterizzare compiutamente la classe delle o. f. di Soper precisando anche qualche svista contenute in [3] e [4].
Per completezza l'argomento è stato esposto con la dimostrazione di tutti i teoremi enunciati (specificando a lato il nome degli autori).

§.1- Chiameremo <u>progetto</u> ogni operazione finanziaria (o. f.) del tipo :

$$A = \left| \begin{matrix} a_0, & a_1, & \dots\dots\dots, & a_n \\ \\ 0, & 1, & \dots\dots\dots, & n \end{matrix} \right|$$

on $a_0 < 0$ e almeno una rata positiva.

Non essendo restrittivo assumeremo sempre:

$$1) \quad a_n \neq 0$$

Porremo inoltre :

$$2) V_a(i) = \sum_0^n a_h (1+i)^{-h} = \sum_0^n a_h v^h$$

$$3) \ W_a(i) = \sum_0^n a_h (1+i)^{n-h} = \sum_0^n a_h u^{n-h}$$

e chiameremo V valore attuale, W montante di A , omettendo la specifica del pedice ove non emergano particolari necessità di comprensione.
Risultando banalmente :

$$4) \ W(i) = (1+i)^n V(i)$$

segue dalla (4) che W e V sono insieme positive, nulle, negative e che se W è positivo e decrescente tale risulta V.

Non si può invece affermare in generale che dalla decrescenza di W(i) segue la decrescenza di V(i)[1,2]
Così dato il progetto :

$$\begin{vmatrix} -10 & -8 & 24 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

si ha : $V(i) = -10 - 8v + 24v^2$

che risulta crescente nell'intervallo (-1, 5) e decrescente nell'intervallo (5, + ∞), mentre:

$$W(i) = -10u^2 - 8u + 24$$

risulta sempre decrescente in (-1, +∞).
Esiste tuttavia un legame tra W e v che consente di trarre comunque informazioni su una funzione conoscendo " l'andamento" dell'altra:
V e W si deducono infatti l'una dall'altra mediante la trasformazione

$y = \dfrac{1}{1+i}$ e l'inversione dell'ordine dei coefficenti

$$V(y) = \sum_{0}^{n} a_h \left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-h}$$

$$W(y) = \sum_{0}^{n} a_{n-h} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{-h}$$

Sfrutteremo opportunamente questa caratteristica.

---

1 Si consideri ancora che ($1-x^3$) è decrescente in (-∞ , + ∞) ed è esprimibile come prodotto di una funzione crescente e di una funzione non-monotona:
$1-x^3 = (x-1)(-x^2-x-1)$.

2 Questa svista è contenuta in [3] e [4]

§.2 - Un progetto A si dice o. f. di Soper [1] [2] se esiste un valore

$i_o \in (-1, +\infty)$ per cui risulta:

$$6)\quad \begin{aligned} &W_k(i_o) = \sum_{h=o}^{k} a_h (1+i_o)^{k-h} \le o \qquad k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, n-1 \\ &W_n(i_o) = W(i_o) = 0 \end{aligned}$$

Un progetto dicesi puro investimento al tasso i secondo T. R. M. [3] se risulta:

$$7)\quad W_k(i) \ge 0 \qquad k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, n-1$$

Con il che si può anche dire che una o. f. di Soper è un progetto di puro investimento ad un valore del tasso che annulla il suo valore attuale.

Poichè per ogni progetto A, essendo $a_n < 0$, risulta ;

$$8)\quad \lim_{1\to\infty} W_k(i) = -\infty \qquad k = 0,1, \ldots, n-1$$

si può anche osservare che ogni progetto diventa un puro investimento per valori opportunamente grandi di i.

TEO. I (T. R. M. [3])

A è un progetto di puro investimento per ogni i $\in (-1, +\infty)$ se e solo se a_n è l' unica rata positiva del progetto.

Dimostrazione : - immediato -

TEO. II (T. R. M. [3])
Se per i_0 l' o. f. A è un puro investimento, tale rimane per ogni $i \geq i_0$ ed inoltre $W_a(i)$ risulta decrescente nell'intervallo $(i_0, +\infty)$.

Dimostrazione : Se risulta : $W_k(i_0) \leq 0$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

essendo : $W_0 = a_0 < 0$

anche $W_1(i) = W_0(1+i) + a_1$

risulta sempre decrescente e negativo per $i > i_0$ in quanto appunto:

$$W_1(i_0) \leq 0.$$

Ma allora anche :

$$W_2(i) = W_1(i)(1+i) + a_2$$

E così induttivamente risulta negativo e decrescente per $i \geq i_0$:

$$W_k(i) = W_{k-1}(i)(1+i) + a_k$$

per $k = 0, 1, \ldots, n-1$

e dunque anche :

$$W(i) = W_{n-1}(i)(1+i) + a_n$$

risulta decrescente per $i \geq i_0$.

Definizione : Sia A un progetto. Se solo l'ultima rata risulta positiva poniamo : $i_a^- = -1$ altrimenti indichiamo con i_a^- il minimo valore del tasso che soddisfa alla condizione [7] di puro investimento.

TEO III : Un progetto A è di Soper se e solo se risulta :

$$W_a(\bar{i}) \geq 0 \qquad [V_a(\bar{i}) \geq 0]$$

Dimostrazione:

- Se A è di Soper in virtù della (6) e della definizione di $\bar{i}_a$ risulta: $i_0 \geq \bar{i}$

D'altra parte W è decrescente in ($\bar{i}$, + ∞) ed è quindi :

$$W(\bar{i}) \geq W(i_0) = 0$$

- Viceversa se è :

$W_a(\bar{i}) \geq 0$, poichè W è decrescente in [$\bar{i}$, + ∞] ed è :
$\lim_{i \to \infty} W(i) = -\infty$, esiste un unico valore $i_0 \in [\bar{1}, +\infty]$
che annulla W [ovvero V].

Essendo pertanto $i_0 \geq \bar{i}$, per il TEO II risulta anche :

$$W_k(i_0) \leq 0 \qquad k = 0, 1, ... , n\text{-}1$$

COROLLARIO I : se A è di Soper allora è : $a_n > 0$

Dim : Essendo per ipotesi $W(\bar{i}) \geq 0$, $W_{n-1}(\bar{i}) \leq 0$

risulta anche :

$$a_n = W(\bar{i}) - (1 + \bar{i})\, W_{n-1}(\bar{i}) \geq 0$$

dunque $a_n \geq 0$ ma per la (1) non può essere $a_n = 0$

§.3 - Facendo riferimento alle condizioni di reciprocità richiamate al §.1, posto per definizione :

$$V_k(i) = \sum_{h=0}^{k} a_{n-h} (1+i)^{h-k} \qquad k= 0, 1, \ldots\ldots , n$$

$$V_n(i) = V(i)$$

Consideriamo il sistema di condizioni corrispondente alle 7):

$$7') \qquad V_k(i) \geq 0 \qquad k = 0, 1, \ldots\ldots, n-1$$

Se A è una operazione finanziaria con $a_n > 0$ poichè risulta :

$$8') \qquad \lim_{i \to -1} V_k(i) = a_n > 0 \qquad k = 0, 1, \ldots\ldots , n-1$$

l'insieme dei valori di i che soddisfano le (7') è non vuoto.

TEO IV : sia A una o.f. con $a_n > 0$, allora le (7') sono soddisfatte per ogni $i \in [-1, +\infty]$ se e solo se a_n è l'unica rata positiva di A

Dimostrazione : immediata

Definizione : sia A una o.f. con $a_n > 0$:
se solo l'ultima rata di A è positiva poniamo $i_a^+ = +\infty$, altrimenti indichiamo i_a^+ con il massimo valore del tasso per il quale sono soddisfatte le (7').

TEO V : Sia A una o.f. con $a_n > 0$ e sia i_0 un valore che soddisfa le (7') allora ogni $i \in [-1, i_0]$ soddisfa ancora le (7') e $V_a(i)$ risulta decrescente in $[-1, i_0]$.

Dimostrazione: corrispondente a quella del teo.II.

TEO VI : Sia A una o.f. con $a_0 < 0$, $a_n > 0$ e sia $i*$ una radice che annulla il valore attuale :

$$V_a(i*) = 0$$

allora $i*$ soddisfa le (7) se e solo se soddisfa le (7').

Dimostrazione : Dalle definizioni fornite segue anche :

$$u^{n-k} V_{n-k}(i) = W(i) - u^{n-k+1} W_{k-1}(i)$$

Pertanto essendo : $W(i*) = 0$ è anche :

$$9) \quad V_{n-k}(i*) = -u\, W_{k-1}(i*)$$

da qui la tesi.

TEO VII : Una o.f. A con $a_n > 0$ è di Soper se e solo se risulta : $V_a(i+) \leq 0$ $[W_a(i+) \leq 0]$ e in tal caso si ha necessariamente :
$a_n < 0$.

Dimostrazione:corrispondente a quella del teo III e del corollario I.

TEO VIII (primo teorema di caratterizzazione):
Una o.f. A con $a_0 < 0$, $a_n > 0$ è di Soper se e solo se risulta :

$$10) \qquad i_a{}^+ \geq i_a$$

Dimostrazione: se A è di Soper allora $a_0 < 0$, $a_n > 0$, inoltre detta i_* la radice che soddisfa le condizioni (7) risulta $i_* \geq i$ per il teo III ed anche $i_* \leq i$ per il teo VII, in conclusione :

$$i^+ \geq i$$

Se viceversa vale la (10) deve essere necessariamente : $W_a(i_*) \leq 0$ e dunque A è di Soper. Infatti se fosse $W(i_*) > 0$, poichè W è decrescente in $[\, i \;, +\infty\,]$ con $\lim W = -\infty$,esisterebbe una radice $i_* > i^+ \geq i$ e quindi A sarebbe di Soper e quindi dovrebbe risultare (per il teo VII) $W_a(i_*) \leq 0$ contro l'ipotesi.

COROLLARIO II : Se A è una o.f. di Soper allora esiste unica in $(-1, +\infty)$ la radice i_* che annulla il valore attuale [montante] e risulta:

$$11) \qquad i \leq i_* \leq i^+$$

con $V_{(i)}$ e $W_{(i)}$ positivi in $[-1,\; i_*]$, negativi in $[\, i_*, +\infty]$
con $V_{(i)}$ decrescente in $[-1,\; i_*]$ almeno
con $W_{(i)}$ decrescente in $[\, i_*, +\infty]$ almeno .

Dimostrazione : - immediata -

Finanziariamente, in regime di capitalizzazione composta,

$$W_k(i) \;\text{ e }\; V_{n-k}(i)$$

misurano rispettivamente il valore - al tempo k e al tasso i - degli impegni del progetto A relativi all'intervallo [0,k] (valutazione retrospettiva) e all'intervallo [k,n] (valutazione prospettiva) : più opportunamente allora un progetto A potrebbe essere definito

investimento in retrospettiva ovvero in prospettiva al tasso i a secondo che siano verificate le (7) ovvero le (7').
In questi termini il corollario II afferma che solo i progetti di Soper possono risultare contemporaneamente investimenti in retrospettiva e in prospettiva.

§. 4 - Chiameremo investimento semplice (o.f.i.s.) ogni o.f. del tipo :

$$P \cong \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ p & p+1 \end{vmatrix} \qquad \text{con } a_0 < 0, \quad a_1 > 0$$

Gli investimenti sono o.f. di Soper e precisamente le uniche o.f. di Soper per cui $i = +\infty$ e $i = -1$, pertanto detto i_* il tasso interno di rendimento(*) di P, possiamo sempre scrivere una o.f.s. nella forma :

$$P \cong \begin{vmatrix} a_0 & -a_0(i + i_*) \\ p & p+1 \end{vmatrix} \qquad \text{con } a_0 < 0$$

TEO IX - (Soper [2] , Gronchi [1])
Ogni o.f. di Soper può esprimersi come somma di o.f.i.s. aventi tutte il suo stesso tasso interno di rendimento.

Dimostrazione : Sia A di Soper ed i_* il suo tir

Poniamo :

$$13) \qquad a'_k = W_k(i_*) \quad , \quad a''_k = -W_k(i_*)(1+i_*)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

poichè risulta :

$$14)\qquad \begin{array}{l} a'_0 = a_0 \\ a''_k + a'_{k+1} = a_k \qquad\qquad k = 0,1,\dots, n-2 \\ a''_{n-1} = a_n \end{array}$$

indicato con A_k la o.f. :

$$15)\qquad A_k = \left| \begin{array}{cc} a'_k & a''_k \\ k & k+1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a'_k & -a'_k (1+i*) \\ k & k+1 \end{array} \right|$$

è facile constatare che risulta :

$$16)\qquad A = \sum_0^n A_k$$

(dove la somma fra o.f. è definita come di consueto).

Trascurando le o.f. A_k le cui rate sono identicamente nulle, abbiamo dalla (16) proprio la tesi .

TEO X : (secondo teorema di caratterizzazione)
La o.f. di Soper sono tutte e solo quelle che si esprimono come somma di o.f.i.s. aventi il medesimo tir.

Dimostrazione :
Stante il teo IX è sufficente mostrare che la somma di una o.f. di Soper e di una ofis aventi lo stesso tir è ancora una of. di Soper.
Sia dunque A di Soper ed i* e il suo tir sia ancora :

$$P = \left| \begin{array}{cc} b & -b(1+i*) \\ k & k+1 \end{array} \right| \qquad \text{con } b < 0$$

e sia :

$$A = A + P$$

e sia :

$$W(i) = W_A(i) \quad , \quad \overline{W}(i) = W_{\overline{A}}(i)$$

Esamineremo i casi $k < n$, $k=n$, $k > n$

$k < n$

$$\overline{W}_h(i*) = W_h(i*) \leq 0 \qquad h = 0, \ldots\ldots, k\text{-}1$$

$$\overline{W}_k(i*) = W_k(i*) + b \leq b < 0$$

$$\overline{W}_{k+1}(i*) = W_k(i*)\ (1+i*) - b(1+i*) = W_k(i*) \leq 0$$

$$\overline{W}_{k+r}(i*) = W_{k+r}(i*) \leq 0$$

$k > n$ si tratta del tutto analogamente al caso $k = n$

$k = n$

$$\overline{W}_h(i*) = W_h(i*) \leq 0 \qquad k = 0,1, \ldots, n\text{-}1$$

$$\overline{W}_n(i*) = W_{n-1}(i*)\ (1+i*) + a_n + b = b < 0$$

$$\overline{W}_{n+1}(i*) = W_n(i*)(1+i*) - b(1+i*) = b(1+i*) - b(1+i*) = 0$$

COROLLARIO III :

Se A e B sono o.f. di Soper aventi lo stesso tir allora anche :

$$\lambda A + \mu B \quad \text{con } \lambda > 0 , \quad \mu > 0$$

è una o.f. di Soper e con lo stesso tir.

Dimostrazione : - immediata -

COROLLARIO IV :

A è una o.f. di Soper se e solo se è :

$$V_a(i) = (i_* - i) \sum_0^n \alpha_k (1+i)^{-k-1} \qquad , \alpha_k \geq 0$$

ovvero :

$$W_a(i) = (i_* - i) \sum_0^n \beta_k (1+i)^k \qquad , \beta_k \geq 0$$

Dimostrazione: Basta verificare che risulta :

$$V_P(i) = b \frac{(i_*-i)}{(1+i)^{k+1}}$$

$$W_B(i) = b\,(i_*-i)\,(1+i)^k$$

e che $$V_a(i) = \sum_0^n V_{a_k}(i)$$

Bibliografia

[1] Sandro Gronchi : "Tasso interno di rendimento e valutazione dei progetti: una analisi teorica" , Collana Istituto di Economia , Siena, 1984.

[2] C.S. Soper : " The marginal efficiency of capital: a further note", The Economic Journal, vol.69, 1959.

[3] D.Teichroew,A.Robichek,M.Montalbano : " Mathematical analysis of rates of return under certainty", Management Science, vol.II, 1965.

[4] D.Teichroew,A.Robichek,M.Montalbano : " An Analysis for criteria for investment and financing decisions under certainty", Management Science, vol.12, 1965.