"ALCUNE OSSERVAZIONI SULL'EQUAZIONE FUNZIONALE

$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t),t,z)$"

ESTER LARI*

Pisa, 1988

*Istituto di Matematica Finanziaria, Genova, Via Bertani n.1.

Sunto. Diversi autori [1,2,3,4,5], hanno studiato l'equazione funzionale

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t),t,z)$$

che e' collegata alla scindibilita' delle leggi finanziarie. Tale equazione fu per la prima volta studiata dal Manca in [1], che ne diede le soluzioni sotto determinate condizioni per la funzione φ. La soluzione esplicita dell'equazione di cui trattasi fu data da Lisei in [3] e [4] nell'ipotesi che $\varphi \in C^{(1)}$ rispetto ai suoi argomenti, mentre in [5] lo stesso Lisei ha risolto l'equazione senza fare alcuna assunzione di regolarita' sulla stessa. Stabiliamo qui alcune proprieta' della soluzione dell'equazione di cui trattasi, appoggiandoci ai teoremi 4 e 7 dimostrati da Lisei in [5].

1. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $\varphi: A\times B\times B \longrightarrow A$ e' soluzione di

(1) $$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t),t,z)$$

$\forall x \in A,\ y,t,z \in B$, allora valgono i seguenti teoremi.

Teorema 1. Se φ e' strettamente crescente nella prima variabile e debolmente crescente nella seconda allora e' debolmente decrescente nella terza.

Dimostrazione. Supponiano che $\exists\ t_1, t_2,\ t_1 < t_2$:

$$\varphi(x,y,t_1) < \varphi(x,y,t_2).$$

Allora:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t_1),t_1,z) < \varphi(\varphi(x,y,t_2),t_1,z) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(\varphi(x,y,t_2),t_2,z) = \varphi(x,y,z)$$

che e' assurdo e quindi la tesi.

Teorema 2. Se φ e' debolmente crescente nella prima variabile e strettamente crescente nella seconda e' strettamente decrescente nella terza.

Dimostrazione. Supponiamo che $\exists$ x,y,t_1,t_2, $t_1 < t_2$:

$$\varphi(x,y,t_1) \leqslant \varphi(x,y,t_2).$$

Allora:

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t_1),t_1,z) < \varphi(\varphi(x,y,t_1),t_2,z) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(\varphi(x,y,t_2),t_2,z) = \varphi(x,y,z)$$

che e' assurdo e quindi la tesi.

Teorema 3. Se φ e' strettamente crescente nella prima variabile e strettamente (debolmente) crescente nella terza allora e' strettamente (debolmente) decrescente nella seconda variabile.

Dimostrazione. Siano $y_1 < y_2$. Si ha dal teorema 4 di [5]

$$\varphi(x,y_2,z) = \varphi(\varphi(x,y_1,y_1),y_2,z) \underset{(\leqslant)}{<} \varphi(\varphi(x,y_1,y_2),y_2,z) =$$
$$= \varphi(x,y_1,z)$$

e quindi la tesi.

Teorema 4. Sia $\ell: A \to A$, ℓ iniettiva e ℓ non e' la funzione identica; sia φ soluzione di (1) con φ

strettamente crescente nella prima variabile; allora $\ell \cdot \varphi$ non e' soluzione di (1).

Dimostrazione. Supponiamo $\ell \cdot \varphi$ soluzione di (1). Allora:

$$\ell(\varphi(x,y,z)) = \ell(\varphi(\ell(\varphi(x,y,t)),t,z))).$$

Ne viene, posto $t=y$ ed essendo $\varphi(\cdot,y,z)$ iniettiva

$$x = \ell(\varphi(x,y,y)) = \ell(x) \quad \text{(vedi teorema 4 di [5])}$$

che e' impossibile per l'ipotesi su ℓ e quindi la tesi.

Teorema 5. Sia $\ell : A \cup B \longrightarrow A \cup B$, $\ell(A) \subset A$, $\ell(B) \subset B$. Sia φ soluzione di (1), φ strettamente crescente nella prima variabile e sia

$$\phi(x,y,z) = \varphi(\ell(x), \ell(y), \ell(z)).$$

Se $\ell \cdot \varphi$ non e' la funzione identica allora ϕ non e' soluzione di (1).

Dimostrazione. Infatti, se ϕ e' soluzione di (1), si ha:

$$\phi(x,y,z) = \phi(\phi(x,y,t),t,z) = \varphi(\ell(\phi(x,y,t)),\ell(t),\ell(z))$$

e se φ e' soluzione di (1) si ha:

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \varphi(\ell(x), \ell(y), \ell(z)) = \\ &= \varphi(\varphi(\ell(x), \ell(y), \ell(t)),\ell(t),\ell(z)) = \\ &= \varphi(\phi(x,y,t),\ell(t),\ell(z)).\end{aligned}$$

Ne risulta

$$\varphi(\ell(\phi(x,y,t)),\ell(t),\ell(z)) = \varphi(\phi(x,y,t),\ell(t),\ell(z))$$

e, per la stretta monotonia di $\varphi(\cdot, \ell(t),\ell(z))$, si ha un assurdo e quindi la tesi.

Teorema 6. Se $\varphi(\cdot,y,z)$ e' strettamente crescente e φ soluzione di (1), se $\exists$ $m = \min A \in \mathbb{R}$ ($M = \max A \in \mathbb{R}$) allora $\varphi(m,y,z) = m$ ($\varphi(M,y,z) = M$) per ogni $y,z \in B$ e

$$\varphi(x,y,z) > m \quad (\varphi(x,y,z) < M) \quad \forall x \in A,\ x > m$$

($x < M$) per ogni $y,z \in B$.

Dimostrazione. Dimostriamolo per il minimo (per il massimo la dimostrazione e' analoga).

Poiche' $\varphi(m,y,z) \geqslant m$ se fosse $\varphi(m,y,z) > m$ sarebbe

$$m \leqslant \varphi(m,z,y) < \varphi(\varphi(m,y,z),z,y) = \varphi(m,y,y) = m$$

(per il teorema 4 di [5]) assurdo.

D'altra parte, dalla stretta crescenza di $\varphi(\cdot,y,z)$, si ha subito che se $x > m$ ($x < M$) risulta

$m = \varphi(m,y,z) < \varphi(x,y,z)$ ($M = \varphi(M,y,z) > \varphi(x,y,z)$).

Osservazione. Nel lavoro [5] l'insieme A coincide con $[0,+\infty[$ per cui in tale contesto il risultato precedente porterebbe a concludere che $\varphi(x,y,z) > 0$ per ogni $x > 0$; $y,z \geqslant 0$.

Teorema 7. Sia card $B > 1$. Se $\varphi(x,y,\cdot)$ e $\varphi(x,\cdot,z)$ sono debolmente crescenti (decrescenti) e una delle due lo e' strettamente allora $\varphi(\cdot,y,z)$ non e' iniettiva.

Dimostrazione. Infatti $\varphi(\varphi(x,y,y),y,z) = \varphi(x,y,z)$ da cui, se $\varphi(\cdot,y,z)$ fosse iniettiva, $x = \varphi(x,y,y)$, $\forall y \in B$.

Inoltre $\exists$ $y_1, y_2 \in B$ con $y_1 < y_2$ tali che

$$x = \varphi(x,y_1,y_1) \underset{(\geq)}{\leq} \varphi(x,y_2,y_2) = x$$

assurdo e quindi la tesi.

2. Sia $g\colon A \times B \to \mathbb{R}$. Sia (vedi teorema 3 di [5])

$$C = \Big\{ (x,y,z) \in A\times B\times B : \text{esiste un'unica soluzione } u \in A \text{ dell'equazione}$$

$$(*) \qquad g(x,y) = g(u,z) \Big\}$$

Sia $\quad : C \to A$, e $\varphi(x,y,z)$ la soluzione di (*).

Attraverso la rappresentazione delle curve di livello di g possiamo dare un'interpretazione geometrica di C e φ Un punto $(x,y,z) \in C$ se e solo se la curva di livello di g passante per (x,y) incontra in uno ed uno solo punto la retta di ordinata z e $\varphi(x,y,z)$ e' l'ascissa di tale punto. Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinche' $C = A\times B\times B$ e' che ogni curva di livello di g intersechi in uno ed un solo punto la retta di ordinata z qualunque sia $z \in B$, condizione che puo' essere equivalentemente espressa dicendo che ogni linea di livello di g e' il grafico di una funzione da B in A. La condizione di stretta crescenza per $\varphi(\cdot\,;y,z)$ per ogni $y,z \in B$ si puo' esprimere dicendo che prese due curve di livello Γ_1 e Γ_2 di g coppie di punti rispettivamente su due linee di livello Γ_1 e Γ_2 che abbiano uguali ordinate hanno le rispettive ascisse che verificano la stessa relazione di disuguaglianza o, in simboli, se

$$(a_1,c),(b_1,d) \in \Gamma_1 \quad , \quad (a_2,c),(b_2,d) \in \Gamma_2$$

risulta

Infatti si ha $I_1 \overset{(a_2-a_1)(b_2-b_1) > 0}{\Longleftrightarrow} I_2$ essendo I_1 e I_2 le proposizioni seguenti.

I_1 :

per ogni x_1, x_2, y, z; $x_1, x_2 \in A \quad y, z \in B$

$x_1 < x_2 \Longrightarrow \varphi(x_1,y,z) < \varphi(x_2,y,z)$

I_2 :

per ogni $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A \quad c, d \in B$

$$a_1 \neq a_2 \ ; \ (a_1,c) \in \Gamma_1 \ ; \ (a_2,c) \in \Gamma_2$$
$$(b_1,d) \in \Gamma_1 \ ; \ (b_2,d) \in \Gamma_2$$

risulta:

$(a_2-a_1)(b_2-b_1) > 0$.

Dimostrazione:

$I_1 \Longrightarrow I_2$:

siano $(a_1,c),(b_1,d) \in \Gamma_1$; $(a_2,c),(b_2,d) \in \Gamma_2$ con $a_1 \neq a_2$

Ne viene:

$g(a_1,c) = g(b_1,d) \Longrightarrow b_1 = \varphi(a_1,c,d)$

e

$g(a_2,c) = g(b_2,d) \Longrightarrow b_2 = \varphi(a_2,c,d)$.

Allora per la stretta crescenza di $\varphi(\cdot,y,z)$ si ha che

$a_1 \gtrless a_2 \Longrightarrow b_1 = \varphi(a_1,c,d) \gtrless \varphi(a_2,c,d) = b_2$

e quindi

$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) > 0.$$

$I_2 \Longrightarrow I_1$:

sia $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in A$ e sia c t.c. $(x_1, c) \in \Gamma_1$ e $(x_2, c) \in \Gamma_2$

Consideriamo, fissato un qualunque valore d, l'equazione in u : $g(x_1, c) = g(u, d)$ che ha soluzione

$$u = u_1 = \varphi(x_1, c, d)$$

e l'equazione in u : $g(x_2, c) = g(u, d)$ che ha soluzione

$$u = u_2 = \varphi(x_2, c, d)$$

Ne viene che $(\varphi(x_1, c, d), d) \in \Gamma_1$ e $(\varphi(x_2, c, d), d) \in \Gamma_2$

e quindi $(x_2 - x_1)(\varphi(x_2, c, d) - \varphi(x_1, c, d)) > 0$

$$\varphi(x_2, c, d) > \varphi(x_1, c, d)$$

Infatti, indicando con f: $B \longrightarrow A$ una funzione il cui grafico e' una linea di livello di g, sussiste il seguente teorema: $I_1 \Longleftrightarrow I_2$.

I_1 : per ogni x, y, z_1, z_2 ; $x \in A, y, z_1, z_2 \in B$

$$z_1 < z_2 \Longrightarrow \varphi(x, y, z_1) \leqslant \varphi(x, y, z_2).$$

I_2 : per ogni $f: B \longrightarrow A$ il cui grafico e' una linea di livello di g e per ogni $y_1, y_2 \in B$

$$y_1 < y_2 \Longrightarrow f(y_1) \leqslant f(y_2)$$

Dimostrazione. Siano $x \in A$, $y \in B$ fissati e sia Γ la linea di livello a cui appartiene il punto (x, y) e sia f la funzione di cui Γ e' il grafico. Siano $y_1, y_2 \in B$ t.c. $y_1 < y_2$.

Consideriamo l'equazione in u:

$$g(x, y) = g(u, y_1)$$

che ha la soluzione

$$u = u_1 = \varphi(x,y,y_1)$$

e l'equazione

$$g(x,y) = g(u,y_2)$$

che ha la soluzione

$$u = u_2 = \varphi(x,y,y_2).$$

Allora (u_1,y_1) e (u_2,y_2) appartengono a Γ si ha

$$u_1 = f(y_1) \text{ e } u_2 = f(y_2).$$

Ne viene che, vera l'ipotesi I_1, si ha

$f(y_1) = u_1 = \varphi(x,y,y_1) \leqslant \varphi(x,y,y_2) = u_2 = f(y_2)$ cioe'

$$f(y_1) \leqslant f(y_2).$$

Analogamente, vera l'ipotesi I_2, si ha

$\varphi(x,y,y_1) = u_1 = f(y_1) \leqslant f(y_2) = u_2 = \varphi(x,y,y_2)$ cioe'

$$\varphi(x,y,y_1) \leqslant \varphi(x,y,y_2)$$

e quindi la tesi.

Analogamente la debole crescenza di $\varphi(x,y,\cdot)$, $\forall (x,y) \in A \times B$ si puo' interpretare dicendo le funzioni da B in A i cui grafici sono le linee di livello di g risultano tutte debolmente crescenti.

Se $\varphi(x,y,\cdot)$ e' debolmente crescente $\forall (x,y) \in A\times B$, se $z_0 \in D_{\pm}(B)$ allora condizione necessaria e sufficiente affinche'

$$\lim_{z \to z_0^{\pm}} \varphi(x,y,z) = k(x,y) \in [-\infty,+\infty]$$

e' che detta $f_{xy} : B \to A$ la funzione il cui grafico e' la linea di livello di g passante per $(x,y) \in A\times B$, si abbia

$$\lim_{z \to z_0^{\pm}} f_{xy}(z) = k(x,y);$$

infatti cio' e' ovvia conseguenza del fatto che

$f_{xy}(z) = \varphi(x,y,z)$ per ogni $z \in B$.

BIBLIOGRAFIA

[1] MANCA P. : "Equazioni funzionali e leggi di interesse finanziario", "G. I. I. A." Anno XXXII, 1969.

[1'] MANCA P. : "Funzioni di utilita' e leggi finanziarie", "G. I. I. A." Anno XLI, 1978.

[2] OTTAVIANI M. : "Alcune considerazioni sulle leggi finanziarie in generale", Universita' degli Studi di Venezia. Laboratorio di Matematica Generale, Finanziaria e Attuariale, 1979.

[3] LISEI G. : "Su un'equazione funzionale collegata alla scindibilita' delle leggi finanziarie", "G. I .I .A.", Anno XLII, 1979.

[4] LISEI G. : "Ancora su un'equazione funzionale collegata alla scindibilita' delle leggi finanziarie", "G. I .I .A." Anno XLIII, 1980.

[5] LISEI G. : "On the Functional Equation $\phi(x, y, z) = \phi(\phi(x, y, t), t, z)$" Universita' di Pisa. Dipartimento di Matematica. Sezione di Matematica Applicata. Gruppo di Ottimizzazione e Ricerca Operativa. 1987.

PUBBLICAZIONI
del
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all Economia

Report n. 1 - Some Optimality Conditions in Vector Optimization.(A.Cambini- L.Martein), 1987

Report n. 2 - On Maximizing a Sum of Ratios. (A.Cambini-L.Martein-S.Schaible), 1987

Report n.3 - On the Charnes-Cooper Transformation in Linear Fractional Programming. (G.Gasparotto), 1987

Report n. 4 - Non-linear Separation Theorems, Duality and Optimality. (A.Cambini), 1987

Report n. 5 - Indicizzazione parziale: aspetti metodologici e riflessi economici. (G.Boletto), 1987

Report n. 6 - On Parametric Linear Fractional Programming. (A.Cambini-C.Sodini), 1987

Report n. 7 - Alcuni aspetti meno noti delle migrazioni in Italia. (A.Bonaguidi), 1987

Report n. 8 - On Solving a Linear Program with one Quadratic Constraint. (L.Martein-S.Schaible), 1987

Report n. 9 - Alcune osservazioni sull'equazione funzionale $\phi(x,y,z) = \phi(\phi(x,y,t),t,z)$. (E.Lari), 1988