Report n.33

Sulla relazione tra un problema bicriteria e un problema frazionario

Anna MARCHI

Pisa, 1990
This research was supported in part by the Ministry of Public Education.

SULLA RELAZIONE TRA UN PROBLEMA BICRITERIA E UN PROBLEMA FRAZIONARIO

ANNA MARCHI
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia - Universita' di Pisa

INTRODUZIONE

Recentemente vari metodi sequenziali sono stati proposti per risolvere classi di problemi bicriteria [7,9,11,12,13,14,16] e classi di programmi frazionari [4,5,6,8,10,18]. Il fiorire di tali metodi trova la sua motivazione nelle molteplici applicazioni in campo economico-finanziario (Teoria dell' impresa, scatola di Edgeworth, Selezione del Portafoglio etc.).

In questo lavoro effettueremo una analisi relativa alle relazioni esistenti tra l'insieme delle soluzioni ottime di un problema frazionario P_F e l'insieme degli ottimi paretiani di un problema bicriteria P_B associato, in modo naturale, a P_F.

I risultati ottenuti da tale analisi saranno utilizzati per evidenziare il fatto che i problemi P_B e P_F , pur essendo strutturalmente diversi, possono essere correlati tra loro tramite un comune problema parametrico scalare; questa proprieta' permettera' di inquadrare in una logica unitaria vari recenti risultati [4,5,6,7,8,9,14] e di discutere alcuni aspetti algoritmico computazionali coinvolgenti entrambi i problemi: si evidenziera', in particolare, come metodi atti a generare le soluzioni efficienti di un problema bicriteria possono essere utilizzati per determinare la soluzione ottima del corrispondente problema frazionario e, viceversa, come algoritmi che risolvono un problema frazionario possono essere efficacemente utilizzati per generare gli ottimi paretiani di un problema bicriteria.

Sottolineeremo altresi' come la menzionata logica unitaria possa essere estesa anche a classi di problemi non frazionari aprendo cosi' il campo a nuove ricerche.

Con l'intento di rendere l'articolo auto-sufficiente alla comprensione del lettore, ci e' sembrato utile descrivere brevemente nei primi paragrafi le proprieta' essenziali dei problemi bicriteria e frazionario utilizzate nel resto del lavoro.

1. IL PROBLEMA BICRITERIA

Nell'ambito della programmazione multi-obiettivo, particolare rilievo è stato attribuito, in questi ultimi anni, alla risoluzione di un problema bicriteria [7,9,11,12,13,14,16]. Le ricerche condotte hanno portato alla caratterizzazione dell'insieme degli ottimi paretiani, con particolare riguardo sia allo studio della connessione della frontiera efficiente sia alla determinazione di metodi sequenziali atti a generarla.

Ricordiamo che un problema bicriteria consiste nell'ottimizzare, nel senso dato da Pareto, una coppia di funzioni. Tale problema puo' essere formulato nel seguente modo:

P_B : (min $f_1(x)$, max $f_2(x)$), $x \in R$

dove f_1, f_2 sono funzioni continue a valori reali definite su un sottoinsieme R di R^n.

Un punto $x^0 \in R$ e' detto **ottimo paretiano** o soluzione efficiente per il problema bicriteria P_B se non esiste un punto $x \in R$ tale da verificare contemporaneamente le seguenti disuguaglianze:

(1.1) $\quad f_1(x^0) \geq f(x)\ , \quad f_2(x^0) \leq f_2(x)$

con almeno una verificata in senso stretto.

Vari metodi sono stati proposti per risolvere particolari classi di problemi bicriteria. Per quanto riguarda gli scopi di questo lavoro ci limiteremo a menzionare gli articoli [7,8,14] nei quali gli autori hanno evidenziato la relazione esistente tra l'insieme E delle soluzioni ottime paretiane del problema P_B e le soluzioni ottime del problema parametrico scalare:

(1.2) $P_B(\theta) : Z_B(\theta) \equiv \min f_1(x),\ x \in R(\theta) \equiv \{ x \in R : f_2(x) \geq \theta \}$

dove una delle due funzioni obiettivo assume il ruolo di vincolo parametrico.

Una tale relazione e' espressa nel Teorema seguente, per la cui dimostrazione si rimanda a [7]:

TEOREMA 1.1 Si consideri il problema bicriteria P_B dove f_1 e f_2 sono funzioni continue definite su un compatto e f_1 non ha minimi locali distinti da quelli globali. Allora, per il problema P_B ed il corrispondente problema scalare parametrico (1.2), valgono le seguenti proprieta':

a) $P_B(\theta)$ ha soluzioni ottime per ogni $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$;

b) ogni soluzione ottima di $P_B(\theta)$ è aderente al vincolo parametrico $\forall\, \theta \in [\theta_m, \theta_M]$;

c) l'insieme E delle soluzioni ottime paretiane di P_B può essere espresso come unione di tutte le soluzioni ottime di $P_B(\theta)$ al variare di θ nell'intervallo $[\theta_m, \theta_M]$, ovvero:

$$E = \bigcup_{\theta \in [\theta_m, \theta_M]} S(\theta)$$

dove $S(\theta)$ indica l'insieme delle soluzioni ottime del problema $P_B(\theta)$, $\theta_m = \max_{f_1(x)=\alpha_0,\, x\in R} f_2(x)$ con $\alpha_0 = \min_{x\in R} f_1(x)$ e $\theta_M = \max_{x\in R} f_2(x)$.

Tenuto conto che per una funzione semistrettamente quasi-convessa[1] un ottimo locale è anche globale, si hanno, come conseguenza del teorema precedente, i seguenti corollari [8,14] :

COROLLARIO 1.1 : Si consideri il problema bicriteria P_B dove f_1 è una funzione semistrettamente quasi-convessa, f_2 è una funzione continua ed R è un insieme compatto. Risulta:

$$E = \bigcup_{\theta \in [\theta_m, \theta_M]} S(\theta)$$

COROLLARIO 2.1 : Si consideri il problema bicriteria P_B dove f_1 è una funzione semistrettamente quasi-convessa, f_2 è una funzione continua ed R è un insieme compatto. Allora $Z_B(\theta)$ risulta essere una funzione non-decrescente semi-strettamente quasi convessa nell'intervallo $[\theta_m, \theta_M]$.

Per quanto riguarda la **connessione** dell'insieme degli ottimi paretiani E vale la proprieta' fondamentale espressa dal seguente teorema dimostrato in [8,14] :

---

1 Una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso X e' detta semistrettamente quasi-convessa se per ogni $x_1, x_2 \in X$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$ e' verificata la relazione $f(x) < \max(f(x_1), f(x_2))$ per ogni $x \in \,]x_1, x_2[$.

TEOREMA 1.3 : Se nel problema bicriteria P_B le funzioni f_1 e $-f_2$ sono semistrettamente quasi-convesse sull'insieme convesso e compatto R, allora E e' connesso.

2. IL PROBLEMA FRAZIONARIO

La programmazione frazionaria, che consiste nella massimizzazione o minimizzazione di una funzione obbiettivo espressa come rapporto di due funzioni, è uno dei settori della programmazione matematica piu' ampiamente studiato in questi ultimi anni per le sue applicazioni in campo economico-finanziario, come testimoniano i numerosi articoli apparsi in letteratura [4,5,6,8,10,18]. In generale, un problema di programmazione frazionaria può essere formulato nel seguente modo:

$$P_F : z_F(x) = \min \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad ; \quad x \in R$$

dove f_1 , f_2 sono funzioni continue a valori reali definite su un sottoinsieme R di $\mathbb{R}^n$ e $f_2(x) > 0 \ \forall x \in R$.

In particolare, si parla di :

- **Programmazione Frazionaria Convessa** quando f_1 e $-f_2$ sono funzioni **convesse**, R e' un insieme **convesso** ed f_1 e' non negativa;
- **Programmazione Frazionaria Quadratica** quando f_1 è una funzione **quadratica**, f_2 è una funzione **quadratica o affine** e R e' un poliedro di $\mathbb{R}^n$;
- **Programmazione Lineare Frazionaria** quando f_1 e f_2 sono funzioni **affini** e R e' un poliedro di $\mathbb{R}^n$.

Come è noto, per una determinazione algoritmica delle soluzioni ottime del problema P_F è importante stabilire la sua appartenenza alla classe dei problemi di convessità generalizzata, in quanto tale classe gode di quelle proprietà che rendono "trattabile" il problema.

Nei seguenti teoremi vengono sintetizzate queste proprietà [1,2,3]:

TEOREMA 2.1: La funzione obiettivo z_F di un problema frazionario P_F è :

i) **semistrettamente quasi-convessa** se R e' un convesso, f_1 è convessa non negativa e f_2 é concava positiva ; se inoltre f_1 e f_2 sono differenziabili allora z_F è una funzione **pseudo-convessa**[1] ;

ii) **semistrettamente quasi-convessa** se R e' un convesso, f_1 è convessa e f_2 é affine positiva ; se inoltre f_1 é differenziabile allora z_F è una funzione **pseudo-convessa**.

Inoltre, la classe dei problemi di programmazione frazionaria aventi una funzione obiettivo **semistrettamente quasi-convessa**, definita su una regione ammissibile convessa, gode delle proprietà espresse dal seguente teorema:

TEOREMA 2.2 Si consideri il problema frazionario P_F con f_1 convessa non-negativa (senza nessuna restrizione di segno quando f_2 é affine), f_2 concava positiva ed $R=\{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) \geq 0, i=1,\ldots,m\}$ dove le h_i sono funzioni quasi-concave.

Allora valgono le seguenti proprietà :

---

[1] Una funzione a valori reali Φ definita su un insieme convesso X e' detta pseudo-convessa se vale la seguente implicazione:

$$(x_2-x_1)\nabla\Phi(x_1) \geq 0 \rightarrow \Phi(x_2) \geq \Phi(x_1).$$

i) L'insieme S delle soluzioni ottime di P_F è convesso[2] ,

ii) un punto di minimo locale è anche un punto di minimo globale per P_F;

iii) P_F ha al piu' una soluzione se la funzione obbiettivo z_F e' strettamente quasi-convessa.

3. RELAZIONE TRA OTTIMI PARETIANI E SOLUZIONI OTTIME DI UN PROBLEMA FRAZIONARIO

In questo paragrafo metteremo in evidenza alcune relazioni esistenti tra l'insieme delle soluzioni ottime del problema frazionario P_F e l'insieme degli ottimi paretiani di un problema bicriteria P_B ; i risultati ottenuti permetteranno di discutere nel paragrafo 4 alcuni interessanti aspetti algoritmici coinvolgenti entrambi i problemi P_B e P_F .

Ci riferiremo da ora in poi alla classe dei problemi frazionari P_F in corrispondenza dei quali le funzioni f_1, f_2 sono definite e continue sul compatto R, f_1 e' non negativa e f_2 positiva su R.

Una tale classe contiene strettamente, a norma della i) del Teorema 2.1, la classe dei problemi frazionari convessi per i quali valgono le proprieta' espresse dal Teorema 2.2.

Si associ al problema frazionario P_F il problema bicriteria P_B e si denotino rispettivamente con:

S = l'insieme delle soluzioni ottime di P_F ,

S_1 = l'insieme delle soluzioni ottime del problema $\{\min f_1(x), x \in R\}$,

S_2= l'insieme delle soluzioni ottime del problema $\{\max f_2(x), x \in R\}$,

$S^* = S_1 \cap S_2$.

[2] L'insieme vuoto e' considerato convesso.

Ricordando che E e' l'insieme degli ottimi paretiani di P_B, si osservi che gli insiemi E, S, S_1, S_2 sono non vuoti per l'ipotesi di continuita' di f_1 e f_2 sul compatto R.

Il seguente Teorema evidenzia il legame tra S e E quando la restrizione f_1/R ha degli zeri.

TEOREMA 3.1: Se esiste $x_0 \in R$ tale che $f_1(x_0)=0$ allora $S \cap E \neq \emptyset$.

Dim: Poiche' $f_1(x) \geq 0$ ed $f_2(x) > 0$ per ogni $x \in R$, si ha che il minimo di $f_1(x)/f_2(x)$ e' uguale a zero per ogni $x \in R$.

Sia E_1 l'insieme delle soluzioni ottime del problema $\{ \max f_2(x), x \in R \cap R_1 \}$ essendo $R_1 = \{ x \in R : f_1(x) = 0 \}$.

Si osservi che $E_1 \neq \emptyset$, in quantoche' per la continuita' della f_1 l'insieme R_1 e' chiuso e, di conseguenza, $R \cap R_1$ e' un insieme compatto, essendo R compatto per ipotesi.

E' immediato controllare che ogni elemento di E_1 verifica la definizione di ottimo paretiano per cui $S \cap E \supseteq E_1 \neq \emptyset$.

Osservazione 1. Si consideri il problema frazionario:

$$P_F : \min \frac{x_1 + x_2}{x_2 + 1}, \quad (x_1, x_2) \in R$$

dove $R \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 0, 0 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 1\}$

e il problema bicriteria:

$$P_B : (\min (x_1 + x_2), \max (x_2 + 1)), \ (x_1, x_2) \in R.$$

L'insieme S delle soluzioni ottime di P_F coincide con il segmento di estremi $0 = (0,0)$ e $A = (2,-2)$ (vedi fig. 1), mentre l'insieme E degli ottimi paretiani coincide con il segmento di estremi $0 = (0,0)$ e $B = (0,1)$, cosi che $S \cap E = \{0\}$, ma $S \not\subset E$ ed $E \not\subset S$.

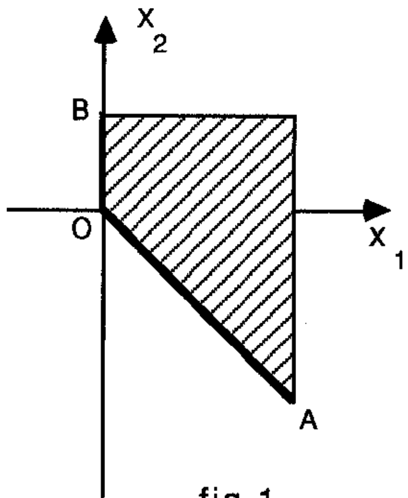

fig.1

Tale esempio evidenzia il fatto che nelle ipotesi del Teorema 1.1 niente puo' essere detto in termini di inclusione tra gli insiemi S ed E, a differenza del caso in cui la restrizione f_1/R non ha zeri, caso per il quale vale il seguente Teorema:

TEOREMA 3.2: Se nel problema frazionario P_F la restrizione f_1/R non ha zeri, ovvero $f_1(x) > 0$ per ogni $x \in R$ allora $S \subset E$.

__Dim__ : Dobbiamo dimostrare che se x^0 è una soluzione ottima di P_F allora x^0 è un ottimo paretiano per P_B. Supponiamo per assurdo che x^0 non sia un ottimo paretiano per P_B; deve, allora, esistere un $x^1 \in R$ tale che:

(3.1.a) $f_1(x^1) \leq f_1(x^0)$ e $f_2(x^1) > f_2(x^0)$

oppure:

(3.1.b) $f_1(x^1) < f_1(x^0)$ e $f_2(x^1) \geq f_2(x^0)$.

La (3.1.a) implica, per la positivita' di f_2,

$$\frac{1}{f_2(x^1)} < \frac{1}{f_2(x^0)}$$

da cui, moltiplicando membro a membro per $f_1(x^0)>0$, si ottiene:

$$\frac{f_1(x^0)}{f_2(x^1)} < \frac{f_1(x^0)}{f_2(x^0)}.$$

D'altra parte, sempre dalla (3.1.a) $f_1(x^1) \leq f_1(x^0)$, quindi:

$$\frac{f_1(x^1)}{f_2(x^1)} \leq \frac{f_1(x^0)}{f_2(x^1)} .$$

Risulta allora:

$$\frac{f_1(x^1)}{f_2(x^1)} < \frac{f_1(x^0)}{f_2(x^0)}$$

e cio' contraddice l'ottimalita' del punto x^0 per il problema P_F. In modo del tutto analogo si prova che la (3.1.b) contraddice l'ottimalita' di x^0.

OSSERVAZIONE 2: Se il numeratore della funzione obbiettivo del problema frazionario assume valori negativi non esiste in generale nessuna relazione tra gli insiemi S ed E. Si consideri infatti il problema frazionario:

$$P_F : \min \frac{-x_1}{x_2 + 1} , \ (x_1, x_2) \in R$$

essendo R il quadrilatero convesso di vertici 0= (0,0), A=(1,0), B=(3/2,2), C= (0,2), (vedi fig. 2). Risulta S = {A} , mentre per il problema bicriteria :

$$P_B : (\min - x_1 , \max (x_2 + 1)) , (x_1, x_2) \in R$$

si ha E = {B} cosi' che $S \cap E = \varnothing$.

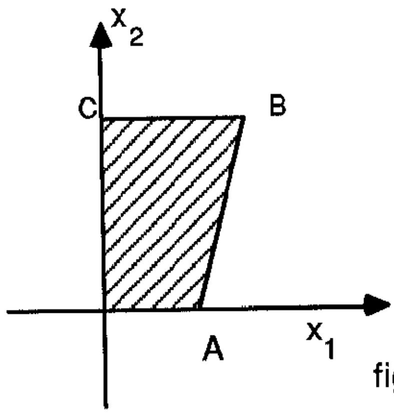

fig. 2

Il seguente Teorema fornisce una condizione sufficiente affinche' l'insieme delle soluzioni ottime del problema frazionario uguagli l'insieme degli ottimi paretiani del problema bicriteria.

TEOREMA 3.3 : Se $S^* \neq \emptyset$, allora $S = E$.

Dim : Dimostreremo che $S^* \neq \emptyset$ implica $S = E = S^*$. L'uguaglianza $S = S^*$ e' conseguenza della seguente disuguaglianza implicata dalla positivita' di f_1 e f_2:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \frac{\min f_1(x)}{\max f_2(x)} = \frac{f_1(x^0)}{f_2(x^0)} \quad \text{per ogni } x^0 \in S^*.$$

L'uguaglianza $E = S^*$ e' conseguenza del fatto che i punti, in corrispondenza dei quali il sistema (1.1) non ha soluzioni (con almeno una disuguaglianza verificata in senso stretto), sono tutti e soli quelli di S^*. Cio' completa la dimostrazione.

Il Teorema precedente non e' invertibile nel senso che in generale $S = E$ non implica $S^* \neq \emptyset$. Al riguardo si considerino i problemi :

P_F : $\min x_1/ x_2$, $(x_1, x_2) \in R$

P_B : $(\min x_1 , \max x_2)$, $(x_1, x_2) \in R$

essendo R il triangolo di vertici A = (1,1), B = (2,1), C = (2,2). Risulta $S = E$ = segmento AC (vedi fig. 3) con $S^* = \emptyset$.

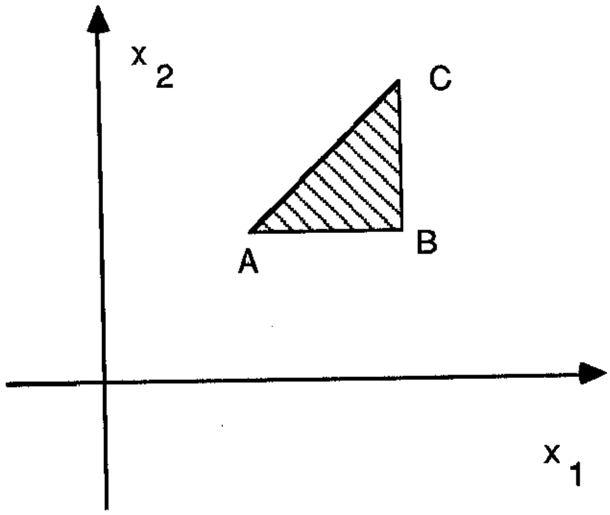

fig. 3

Il seguente Teorema fornisce una condizione sufficiente affinche' $S = E$ implichi $S^* \neq \emptyset$; si osservi che la classe dei problemi frazionari individuata dalle ipotesi del Teorema contiene i problemi frazionari con funzione obbiettivo strettamente quasi-convessa(vedi Teorema 2.2):

TEOREMA 3.4: Se il problema frazionario P_F ha un'unica soluzione ed inoltre $S=E$, allora $S^* \neq \emptyset$.

Dim: Poniamo $\alpha = \min\limits_{x \in R} f_1(x)$ e $\beta = \max\limits_{x \in R} f_2(x)$

Sia x^1 una soluzione ottima del problema $\min\limits_{f_2(x)=\beta,\ x \in R} f_1(x)$.

Si verifica facilmente che x^1 e' un ottimo paretiano ed inoltre, essendo $f_2(x)= \beta$ si ha $x^1 \in S_2$. Analogamente, se x^2 e' una soluzione ottima del problema $\max\limits_{f_1(x)= \alpha,\ x \in R} f_2(x)$ si ha che $x^2 \in E$ ed $x^2 \in S_1$.

Denotata con x_0 l'unica soluzione ottima del problema P_F, l'ipotesi $S = E$ implica $x^1 = x^2 = x^0 \in S_1 \cap S_2 = S^*$.

4. ASPETTI COMPUTAZIONALI

Dai risultati ottenuti nel paragrafo precedente si deduce in particolare che una soluzione ottima di un problema frazionario puo' essere cercata nell'insieme degli ottimi paretiani del corrispondente problema bicriteria P_B. Metteremo ora ulteriormente in evidenza il fatto che il problema bicriteria P_B ed il problema frazionario P_F, pur essendo strutturalmente diversi, possono essere correlati tramite un opportuno problema parametrico scalare, che permette di trovare gli ottimi paretiani dell'uno e le soluzioni ottime dell'altro. Questa correlazione fa comprendere la simiglianza dei recenti metodi sequenziali proposti in [4,5,6,7,8,9] per risolvere i problemi P_B e P_F.

Si osservi infatti che se x^0 e' soluzione ottima del seguente problema $\min_{x \in R} f_1(x) / f_2(x)$ lo e' anche del problema $\min_{f_2(x)=f_2(x^0), x\in R} f_1(x)$.

Di conseguenza il problema frazionario e' equivalente alla ricerca del livello ottimo $\theta_0 = f_2(x_0)$ nel problema parametrico:

$$P_F(\theta) : z_1(\theta) \equiv \min f_1(x), \ x \in R(\theta) = \{ x \in R : f_2(x) = \theta \}$$

Quest'ultimo problema per la classe dei problemi bicriteria verificanti le ipotesi del Teorema 1.1 e del Corollario 1.1 che implicano l'aderenza al vincolo parametrico nel problema (1.2), coincide col problema:

$$P_B(\theta) : \min f_1(x), \ x \in R(\theta) = \{ x \in R : f_2(x) = \theta \}$$

Ne consegue che ogni algoritmo in grado di risolvere $P_B(\theta)$ per ogni $\theta \in [\theta_m, \theta_M]$ puo' essere utilizzato per risolvere P_F introducendo un opportuno criterio di ottimalita' per la funzione

$z(\theta) = 1/\theta \;\; z_1(\theta), \;\; \theta \in [\theta_m, \theta_M]$ che permetta di riconoscere il livello θ_0.

Viceversa, metodi sequenziali che permettono di risolvere P_F tramite la parametrizzazione del denominatore, possono essere utilizzati per risolvere il corrispondente problema bicriteria, eliminando il criterio di ottimalita' e facendo variare θ nell'intervallo $[\theta_m, \theta_M]$. In questa logica unitaria possono essere inquadrati i risultati ottenuti in [4].

Si osservi inoltre che se si ha un problema del tipo:

$$P^* : \{ \min \; f_1(x) \spadesuit f_2(x) \}, \; x \in R$$

dove f_1, f_2 sono funzioni continue a valori reali definite su $R \subset R^n$ e $\spadesuit$ denota una legge di composizione algebrica (+ , - , $\cdot$, :), in luogo del programma frazionario P_F, si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle gia' effettuate. Questo implica, quindi, la possibilita' di utilizzare metodi parametrici atti a risolvere ampie classi di problemi del tipo P*. Un esempio puo' essere la classe di problemi P_S nella quale si minimizza la funzione che esprime la differenza tra le due funzioni f_1, f_2:

$$P_S : \{ \min \; f_1(x) - f_2(x) \}, \; x \in R$$

Questi interessanti sviluppi saranno oggetto di prossime ricerche.

BIBLIOGRAFIA

[1] **Avriel M.**: " Non Linear Programming Analysis and Methods", Prentice- Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1976;

[2] **Avriel M., Diewert W.E., Schaible, Zang I.**: "Generalized Concavity", Plenum Press, 1988;

[3] **Cambini A.**: "Concavita' generalizzata e programmazione frazionaria: Stato dell'Arte", Relazione Invitata, XI Convegno AMASES, Aosta'87;

[4] **Cambini A., Martein L**: "Linear Fractional and Bicriteria Linear Fractional Programs", on "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications" in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, 1990;

[5] **Cambini A., Martein L, Sodini C.**: " An Algorithm for two Particular Non-linear Fractional Programs", Methods of Op. Res. n.45 1983;

[6] **Cambini A., Sodini C.**: " Un algoritmo per un problema di programmazione frazionaria non lineare derivante da un problema di selezione del portafoglio", Dept. of Operation Research, University of Pisa A-88, 1981;

[7] **Marchi A.**: " A Sequential Method for a Bicriteria Problem Arising in Portfolio Selection Theory", Dept. of Statistics and mathematic applied, report n.30, 1990;

[8] **Marchi A.**: " Solving a Quadratic Fractional Program by means of a Complementarity Approach", Dept. of Statistics and mathematic applied, report n.32, 1990;

[9] **Martein L**: "On the Bicriteria Maximization Problem", on "Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications" in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, 1990;

[10] **Martein L., Pellegrini L.**: "Su una classe di problemi non lineari e non convessi", Dept. of Operation Research, University of Pisa A-48, 1977;

[11] **Pang J.S.** : " A New and Efficient Algorithm for a Class of Portfolio Selection Problems", Oper. Res., n.28, 1980, pp.764-767;

[12] **Perold A.F.**:" Large-scale Portfolio optimization", Management Science, Vol. 30, n^0 10, October '84;

[13] **Rossi F., Chavan A.M.**:"Una Procedura per la Valutazione della Frontiera Efficiente in Problemi di Selezione del Portafoglio", Giornate AIRO, Pisa 1988;

[14] **Schaible S.**: "Bicriteria Quasi-concave Programs", Cahiers du C.E.R.O., vol.25, pp. 93-101, 1983;

[15] **Schaible S.**: "Fractional Programming: Applications and Algorithms", Europ. Journal of Op. Res., vol.7, pp.111-120, 1981;

[16] **Sharpe W.F.**: "A Simplified Model for Portfolio Analysis", Management Science, 1963, pp.277-293;

[17] **Sodini C.**: " A New algorithm for the Strictly Convex Quadratic Programming Problem", Dept. of Statistics and mathematic applied, report n.12, 1988;

[18] **Ziemba W.T., Parkan C., Brooks Hill R.**: " Calculation of Investiment Portfolios with risk free Borrowing and Leading", Management Science, vol. 21, n.2, 1974.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

Report n. 1 - Some Optimality Conditions in Vector Optimization.
(Cambini-Martein), 1987

Report n. 2 - On Maximizing a Sum of Ratios.
(Cambini-Martein-Schaible), 987

Report n. 3 - On the Charnes-Cooper Transformation in Linear Fractional Programming.
(Gasparotto), 1987

Report n. 4 - Non-linear Separation Theorems, Duality and Optimality.
(Cambini), 1987

Report n. 5 - Indicizzazione parziale: aspetti metodologici e riflessi economici.
(Boletto), 1987

Report n. 6 - On Parametric Linear Fractional Programming.
(Cambini-Sodini), 1987

Report n. 7 - Alcuni aspetti meno noti delle migrazioni in Italia.
(Bonaguidi), 1987

Report n. 8 - On Solving a Linear Program with one Quadratic Constraint.
(Martein-Schaible), 1987

Report n. 9 - Alcune osservazioni sull'equazione funzionale $\phi(x,y,z) = \phi(\phi(x,y,t),t,z)$.
(Lari), 1988

Report n.10 - Une étude par ménage des migrations des personnes âgées: comparaison des résultats pour l'Italie et les Etats-Unis.
(Bartiaux), 1988

Report n.11 - Metodi di scomposizione del tasso di inflazione.
(Boletto), 1988

Report n.12 - A New Algorithm for the Strictly Convex Quadratic

Programming Problem.
(Sodini), 1988

Report n.13 - On Generating the Set of all Efficient Points of a Bicriteria Fractional Problem.
(Martein), 1988

Report n.14 - Applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario.
(Martein), 1988

Report n.15 - On the Bicriteria Maximization Problem.
(Martein), 1988

Report n.16 - Un prototipo di sistema esperto per la consulenza finanziaria rivolta ai piccoli risparmiatori.
(Manca), 1988

Report n.17 - Operazioni finanziarie di Soper e operazioni di puro investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano.
(Manca), 1988

Report n.18 - A k-Shortest Path Approach to the Minimum Cost Matching Problem.
(Carraresi-Sodini), 1988

Report n.19 - Sistemi gravitazionali e fasi di transizione della crescita demografica.
(Barsotti-Bottai), 1988

Report n.20 - Metodi di scomposizione dell'inflazione aggregata: recenti sviluppi.
(Boletto), 1988

Report n.21 - Multiregional Stable Population as a Tool for Short-term Demographic Analysis.
(Termote-Bonaguidi), 1988

Report n.22 - Storie familiari e storie migratorie: un'indagine in Italia.
(Bottai), 1988

Report n.23 - Problemi connessi con la disomogeneità dei gruppi sottoposti a sorveglianza statistico-epidemiologica.

(Romano-Marchi), 1988

Report n.24 - Un approccio logico ai problemi di scelta finanziaria.
(Orsi), 1988

Report n.25 - Attrazione ed entropia.
(Bruno), 1989

Report n.26 - Invexity in Nonsmooth Programming.
(Giorgi - Mititelu), 1989

Report n.27 - Lineamenti econometrici dell'evoluzione del reddito nazionale in relazione ad altri fenomeni economici.
(Bruno), 1989

Report n.28 - Equivalence in Linear Fractional Programming.
(Cambini - Martein), 1989

Report n.29 - Centralità e potenziale demografico per l'analisi dei comportamenti demografici: il caso della Toscana.
(Barsotti - Bottai - Costa), 1990

Report n.30 - A sequential method for a bicriteria problem arising in portfolio selection theory.
(Marchi), 1990

Report n.31 - Mobilità locale e pianificazione territoriale.
(Bottai), 1990

Report n.32 - Solving a Quadratic Fractional Program by means of a Complementarity Approach.
(Marchi), 1990

Report n.33 - Sulla relazione tra un problema bicriteria e un problema frazionario.
(Marchi), 1990