Report n.36

ALCUNI ASPETTI MATEMATICI DEL MODELLO DI SRAFFA A PRODUZIONE SEMPLICE

Giorgio GIORGI

Pisa, maggio 1991
Dipartimento di Ricerche Aziendali - Sezione di Matematica Generale ed Applicata - Università di Pavia. Progetto di ricerca 382/65

L'autore ringrazia il Prof.U.Magnani, dello stesso Dipartimento, per i numerosi consigli e suggerimenti. Ovviamente ogni responsabilità per il contenuto del presente lavoro è a carico dell'autore.

Giorgio Giorgi (o)

ALCUNI ASPETTI MATEMATICI DEL MODELLO DI SRAFFA A PRODUZIONE SEMPLICE

(o) Dipartimento di Ricerche Aziendali - Sezione di Matematica Generale ed Applicata - Università di Pavia. Progetto di ricerca 382/65. L'autore ringrazia il Prof. U. Magnani, dello stesso Dipartimento, per i numerosi consigli e suggerimenti. Ovviamente ogni responsabilità per il contenuto del presente lavoro è a carico dell'autore.

Summary. *This paper deals with the main problems of the simple production model of P. Sraffa (existence, uniqueness and structure of the solutions for the price system and for the standard commodity system), without assuming the indecomposability of the inputs matrix. Other purposes are:*

a) To point out the meaning of the basic commodities and of some related problems;

b) To propose a straightforward proof of the monotonicity in the wage/profit relation in its whole range of definition;

c) To clarify the relations between the open model of Sraffa and the closed ones (i. e. the "slave economy" case in the sense of P. K. Newman [42]);

d) To point out a less known feature of the standard commodity system and a related "dual meaning" of the maximum rate of profit;

e) To establish the conditions for the existence of price/profit equilibria with zero and with positive wages.

References are in square brackets. Section 6 explains notations and mathematical tools used.

§ O. Introduzione.

L'analisi dell'equilibrio del modello di P. Sraffa a produzione semplice, esposto in [57], è già stata oggetto di numerose indagini da parte di vari Autori. In particolare, la letteratura disponibile (cfr. i 63 Riferimenti Bibliografici in Appendice) contiene, sia pure in modo talvolta frammentario, la discussione di problemi relativi all'esistenza ed alla molteplicità delle soluzioni del modello e ad alcuni loro aspetti economicamente rilevanti, quali:

la monotonia e la linearità della relazione tra saggio di profitto e saggio di salario, la costanza dei prezzi rispetto al parametro distributivo, il ruolo del "sistema tipo".

In tale analisi, speciale rilievo meritano poi il grado di connessione del sistema (cioè il tipo di "beni base" ivi compresi), l'esistenza di "surplus" (cioè di almeno una produzione netta positiva) e la distribuzione del medesimo all'interno del sistema.

Un'ulteriore analisi sui problemi delineati sembrerebbe pertanto superflua. In realtà, invece, lo sfruttamento di strumenti matematici raramente usati (almeno insieme ed in modo sistematico) in queste applicazioni, quali la teoria delle K-matrici e la "forma normale" di una matrice quadrata, non solo consente, assieme al ben noto teorema di Perron e Frobenius, di riformulare e completare i risultati già disponibili (con qualche interessante risvolto didattico), ma anche offre l'occasione per:

a) Precisare ed ampliare il concetto di "bene base", chiarendo la natura dei problemi collegati alla decomponibilità della matrice degli inputs;

b) Proporre una dimostrazione semplice e diretta, di una proprietà economicamente rilevante della relazione che collega le due grandezze distributive del modello in esame;

c) Chiarire i rapporti che (almeno dal punto di vista della logica economica) esistono tra tale modello e l'analogo modello sraffiano di "produzione per sussistenza" (nel senso più avanti precisato);

d) Completare l'analisi già nota sul problema dell'esistenza della merce tipo e sul significato economico del saggio massimo di profitto compatibile con l'equilibrio del sistema dei prezzi;

e) Sottolineare la differenza tra le condizioni che garantiscono il predetto equilibrio con salari positivi e le analoghe riferite a salari nulli.

Ciò premesso, il presente lavoro si articola secondo il seguente schema:

1) Nel § 1 si precisano le ipotesi fondamentali adottate nel modello, sia dal punto di vista economico che formale. Inoltre si trasforma il sistema che descrive il modello in un equivalente sistema costruito sfruttando le caratteristiche essenziali della "forma normale" di una matrice (secondo Gantmacher), sistema che meglio si presta all'indagine successiva.

2) Nel § 2 si presentano, in forma unificata, i risultati principali sull'analisi del modello, risultati già in parte accennati nella prima parte dell'Introduzione. Questo paragrafo è diviso in quattro parti, ove vengono rispettivamente descritte le proprietà della matrice tecnologica, l'esistenza di equilibrio in presenza di salari positivi, l'esistenza di equilibrio con salari nulli ed infine le relazioni esistenti tra le variabili distributive del modello.

3) Nel § 3 si analizzano alcune possibili varianti del modello di produzione semplice di Sraffa precedentemente descritto.

4) Nel § 4 si discute il sistema duale di quello dei valori e si individua l'esistenza della merce tipo in ipotesi generali sulla connessione della matrice tecnologica.

5) Nel § 5 vengono sviluppate alcune osservazioni relative ai precedenti paragrafi.

Si avverte che i necessari richiami sulle notazioni adottate e sugli strumenti matematici sfruttati, vengono raccolti, per comodità del lettore, nel § 6.

§ 1. LE IPOTESI DEL MODELLO.

Sia dato un sistema di produzione che produce n beni o merci in n corrispondenti industrie (o settori economici), con $n > 1$, nelle assegnate quantità (lorde complessive) descritte dal vettore colonna

$$q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]' = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix}$$

e destinate allo scambio, da effettuarsi al termine del comune periodo produttivo, ai prezzi descritti dal vettore riga

$$p = [p_1, p_2, \ldots, p_n] .$$

Escluso l'impiego del capitale fisso, gli inputs richiesti dalle produzioni q, sono descritti da:

a) una matrice

$$A = [a_{ij}], \; i \in N, \; j \in N,$$

essendo

$$N = \{1, 2, ..., n\},$$

e nella quale a_{ij} misura la quantità del bene i-esimo prodotta nell'i-esimo settore e direttamente assorbita nella produzione complessiva del settore j-esimo, di modo che $A\,q$ misura i consumi intermedi (o inter-industriali) necessari per le produzioni lorde descritte da q;

b) un vettore riga

$$\ell = [\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n]$$

nel quale ℓ_i misura la quantità di lavoro direttamente assorbita dal settore i-esimo, lavoro (qualitativamente omogeneo) complessivamente disponibile nella quantità limitata

$$L > 0,$$

e da remunerare con la corresponsione di salari posticipati, calcolati sulla base di un saggio di salario

$$w \geqq 0,$$

comune a tutti i settori.

Inoltre gli inputs di beni, disponibili da produzioni del periodo precedente, sono immessi nel sistema, all'inizio del periodo produttivo, dalla classe imprenditoriale, la quale anticipa il valore relativo agli inputs medesimi (capitale circolante) necessario per la loro mobilitazione e percepisce un profitto (posticipato) proporzionale a tale capitale, secondo il saggio di profitto $r \geqq 0$, comune a tutti i settori, in virtù di un'ipotesi di libera concorrenza implicitamente sottostante al modello.

Sulla matrice A e sui vettori q, p e ℓ, si accettano poi le seguenti ipotesi:

i) Gli n beni presenti tra gli inputs di ogni industria sono tutti impiegati in quantità non negative, ed ogni industria ne impiega almeno uno in quantità positiva. In altre parole risulta, secondo le convenzioni precisate nel § 6,

(1) $$A^j \geq [0], \ \forall\, j \in N;$$

ii) I requisiti di lavoro sono tutti positivi. Si ha cioè

(2) $$\ell > [0] \ ;$$

iii) Prezzi e produzioni lorde sono tutte positive:

$$p > [0], \ q > [0] \ ;$$

iv) Il sistema è in *stato reintegrativo*, nel senso che le produzioni lorde q, che assorbono l'intera disponibilità di lavoro

(3) $$\ell\, q = L,$$

sono sufficienti per i consumi intermedi A q, sicchè per il corrispondente vettore delle produzioni nette $y = [q - A\,q]$ risulta

$$y = [q - A\,q] \geq [0];$$

v) Il sistema è *statico*, nel senso che le produzioni nette sono tutte consumate (dai lavoratori e/o dai capitalisti), sicchè per ogni bene sono escluse divergenze tra produzione netta e consumo finale. E' ovviamente possibile uscire da questa "gabbia statica", a patto -beninteso- di accettare la linearità dei processi produttivi o comunque di assumere qualche altra ipotesi sui rendimenti, col conseguente rischio di dover rinunciare alla ricerca di "quelle proprietà di un sistema economico che sono indipendenti da variazioni nel volume della produzione e nelle proporzioni tra i 'fattori' impiegati" (cfr. [57], Prefazione).

vi) Le produzioni effettive sono tutte unitarie, nel senso che risulta

(4) $$q = u,$$

con u vettore a componenti tutte unitarie.

vii) La quantità totale di lavoro disponibile è unitaria:

$$L = 1,$$

ovvero risulta, per la (3) e (4), (cfr. [57], § 10),

(5) $$\ell\, u = 1.$$

viii) La matrice A è nella sua "forma normale" (120) e nel senso precisato nel §6.2.

Per quanto superfluo, si può osservare che le ultime tre ipotesi introdotte non ledono minimamente la generalità dell'analisi. Ciò è evidente per le ipotesi vi) e vii), non appena si sfrutti la possibilità di scegliere opportunamente le unità di misura per le produzioni lorde e la disponibilità di lavoro. Per quanto riguarda l'ipotesi viii) vale l'analoga osservazione, collegata però alla possibilità di scegliere un opportuno riordinamento dei settori. Al riguardo si può notare che tale permutazione si riflette direttamente non solo sull'ordine delle righe e delle colonne di A, ma pure su quello delle componenti dei vettori ℓ, p, $q = u$ e $y = u - A\,u$.

Più precisamente, se la forma normale $\bar{A}$ di A si ottiene con la trasformazione

$$\bar{A} = P\ A\ P',$$

con P matrice di permutazione, allora in luogo di A, ℓ, p, $q = u$, $y = u - A\ u$, basta considerare, rispettivamente, $\bar{A} = P\ A\ P'$, $\bar{\ell} = \ell P'$, $\bar{p} = p\ P'$, $\bar{q} = P\ q = P\ u = u$, $\bar{y} = P\ y = u - \bar{A}\ u$. Per quanto riguarda y e $\bar{y}$ valgono poi, in virtù delle ipotesi i), iv) e vi), le limitazioni

$$(6) \qquad [0] \leqq y = u - A\ u \leq u, \quad [0] \leqq \bar{y} = u - \bar{A}\ u \leq u.$$

Ciò premesso, diremo che il sistema produttivo (ovvero che il modello) è in *equilibrio* quando esiste una terna

$$(7) \qquad (p,\ r,\ w)$$

soluzione del sistema

$$(8) \qquad \begin{cases} (1 + r)\ p\ A + w\ \ell = p \\ \\ p > [0],\ r \geqq 0,\ w \geqq 0. \end{cases}$$

In altre parole, il modello ammette equilibrio se e solo se esistono valori di scambio (prezzi, o meglio, "prezzi naturali"), valori dei saggi di profitto e di salario, tali per cui in ogni settore il valore della produzione lorda copra i costi per inputs di beni e di lavoro, in modo tale che il residuo valore configuri esattamente il profitto sul capitale circolante anticipato.

Nell'ipotesi che il sistema (8) ammetta un equilibrio $(p,\ r,\ w) = (p^0,\ r^0,\ w^0)$, allora è evidente che ogni terna del tipo $(p,\ r,\ w) = (\alpha p^0,\ r^0,\ \alpha w^0)$, con α costante positiva arbitraria, gode della stessa proprietà ed individua un equilibrio caratterizzato dagli stessi rapporti tra valori (prezzi, salari, capitale circolante, profitti). Poichè dal punto di vista economico tale molteplicità di equilibrî può essere considerata non rilevante, conviene senz'altro imporre una condizione atta ad eliminarla, ciò che si ottiene, ad esempio, normalizzando il vettore dei prezzi con la condizione

$$p\ b = 1, \tag{9}$$

nella quale b denota un prefissato vettore semipositivo. In proposito la scelta b = y si presenta naturale, a meno che sia $y = [0]$, nel qual caso si può scegliere un elemento h di N e porre $b = u^h$, con u^h vettore a componenti tutte nulle salvo la h-esima, unitaria:

$$b = \begin{cases} y = u - A\ u, \text{ se } y \geq [0] & (10) \\ u^h, \text{ se } y = [0]\ . & (11) \end{cases}$$

Altre possibili normalizzazioni conducono alla scelta b = u o (nel caso sia w > 0) w = 1.

Nell'ipotesi che qualche produzione netta sia positiva, cioè che valga la (10), le normalizzazioni (5) e (9) consentono pure di considerare la variabile distributiva w non solo nel senso già definito (saggio di salario), ma anche come quota distributiva, intesa quale porzione del valore del prodotto netto assegnata alla classe lavoratrice.

Tale possibilità suggerisce di imporre alle terne (p, r, w) soluzioni del sistema (8) ulteriori vincoli atti a garantire che, nell'ipotesi (10), il valore unitario p y del prodotto netto y si ripartisca tra salari e profitti in quote complementari:

$$1 = w + r\ p\ A\ u,\ 0 \leqq w \leqq 1,\ 0 \leqq r\ p\ A\ u \leqq 1. \tag{12}$$

In proposito conviene però osservare subito che tali vincoli sono trascurabili, in quanto ridondanti. Infatti, se il sistema (8) ammette soluzioni, allora nell'ipotesi (10), dalla prima delle (8) si trae non solo

(13) $$w \ell = p (I - A) - r p A$$

(con I matrice unità di ordine n), ma pure, post-moltiplicando ambo i membri della (13) per u e sfruttando le (5), (9), e (10),

(14) $$w \ell u = w = p (I - A) u - r p A u = p b - r p A u = \\ = 1 - r p A u,$$

cioè la prima delle (12). Poichè i vincoli sui segni di A, p, r e w nel sistema (8) garantiscono la non negatività di salari e di profitti, dalla (14) scendono subito le altre limitazioni descritte nelle (12).

Conviene avvertire che nonostante le analogie formali, il modello presentato non coincide col ben noto modello a coefficienti fissi di Walras-Cassel-Leontief, cioè con inputs lineari rispetto alle produzioni lorde, almeno perchè nel nostro modello queste ultime si intendono assegnate e nessuna ipotesi è assunta sulla sostituibilità tra i fattori, nè sul tipo dei rendimenti di scala. Neppure il modello coincide esattamente con uno dei modelli di produzione semplice di Sraffa: tale differenza, che sarà meglio precisata nei paragrafi successivi, si collega non solo ad una diversa convenzione nell'ordinare gli elementi di A o nel definire lo stato reintegrativo, nonchè (almeno in alcuni dei vari modelli discussi da Sraffa) gli inputs ed i salari, ma anche e soprattutto per l'ipotesi di staticità v).

§ 2. L'EQUILIBRIO NEI VALORI.

Consideriamo dunque il sistema (o modello)

$$
\begin{cases}
(1+r)\, p\, A + w\, \ell = p & (15)\\
p > [0]\ ,\ r \geq 0,\ w \geq 0 & (16)\\
p\, b = 1 & (17)
\end{cases}
$$

nella terna incognita (p, r, w), con b definito dalle (10)-(11), A matrice nella forma normale (120), dotata delle proprietà (1) e (6), e ℓ vettore che verifica le (2) e (5).

L'analisi di tale sistema è condotta nei successivi punti II, III, e IV, dopo avere individuato nel punto I alcune proprietà della matrice A. Nel § 3 discuteremo poi alcune varianti del sistema (15)-(17), alle quali sarà possibile ricondurre i diversi modelli formulati da Sraffa.

I) *ALCUNE PROPRIETA' DI A.*

Dalle ipotesi fatte su A scendono le seguenti proprietà, nelle quali λ^+_A e λ^+_k denotano gli autovalori dominanti di A e del blocco A^{kk} della sua forma normale (120).

(18) $$0 \leqq \lambda^+_k \leqq 1,\ k = 1, 2, \ldots, s$$

(19) $$\lambda^+_k = 0 \Leftrightarrow A^{kk} = 0 \quad ,\ k = (g+1), (g+2), \ldots, s$$

(20) $$\lambda^+_k = 1 \Leftarrow A^{kk}\, u = u,\ k = 1, 2, \ldots, s$$

(21) $$A^{kk} \neq [0],\ k = 1, 2, \ldots, g$$

(22) $$\lambda^+_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, g$$

(23) $$0 < \lambda^+_A = \mathrm{Max}\ \{\lambda^+_1, \ldots, \lambda^+_s\} \leqq 1$$

(24) $$y = [0] \Rightarrow \lambda^+_A = \lambda^+_s = 1$$

(25) $$y > [0] \Rightarrow \lambda^+_A < 1 \Rightarrow y \geq [0]$$

(26) $s > 1 \Rightarrow \{y \geq [0] \not\Rightarrow \lambda_A^+ < 1;\ \lambda_A^+ = 1 \not\Rightarrow y = [0]\}$

(27) $s = 1 \Rightarrow \{y = [0] \Leftrightarrow \lambda_A^+ = \lambda_s^+ = 1\}$

(28) $\lambda_1^+ = \ldots = \lambda_g^+ = \lambda_A^+ \Rightarrow \{\ \lambda_A^+ = 1 \Leftrightarrow y = [0],\ g = s\ \}.$

La prima disuguaglianza nella (18) e la (19) scendono subito dal teorema di Perron-Frobenius, non appena si faccia ricorso alla (1) ed alla proprietà II della (120). In modo analogo, e sfruttando la limitazione (123), si deduce la seconda disuguaglianza della (18) e la (20), dopo avere notato che dalle (1) e (6) si trae, per la (120),

$$A^{kk}\ u \leqq u,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

La (21) segue subito dalla (120) poichè l'ipotesi contraria implica qualche colonna nulla in A, contro la (1). La (22) si prova come la prima disuguaglianza della (18) sfruttando la (21). Essendo poi, per la proprietà VII della (120),

$$\lambda_A^+ = \mathrm{Max}\ \{\ \lambda_1^+,\ \ldots,\ \lambda_s^+\ \},$$

le (18) e (22) bastano per la (23).

Circa la (24) osserviamo che $y = [0]$ si può riscrivere, per la (6), nella forma $A\ u = u$, dalla quale scende, per la (120), l'espressione

(29) $$A^{ss}\ u = u.$$

Da questa, per la (1), il teorema di Perron-Frobenius (con la limitazione (123)) e la proprietà II della (120), segue subito

$$\lambda_s^+ = 1$$

e cioè, per la (23), la tesi (24).

Nell'ipotesi $y > [0]$ risulta, sempre per la (6),

$$A\,u < u$$

ed anche, per le (1) e (120),

(30) $$A^{kk}\,u < u,\ k = 1, 2, \ldots, s.$$

Procedendo sulla (30) come già fatto per la (29) si trae

$$\lambda_A^+ < 1,\ k = 1, 2, \ldots, s$$

e si giustifica così, sfruttando la (23), la prima implicazione della (25). Per stabilire la seconda, si può invece notare che la condizione $\lambda_A^+ < 1$ esclude, per la (24), che sia $y = [0]$, e che la (6) garantisce $y \geqq [0]$.

Circa le (26) valgono poi gli esempi indicati dalle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per provare la (27) basta sfruttare la (24) ed osservare che, con $s = 1$, A è connessa, mentre la (6) porge $A\,u \leqq u$, sicchè, con $s = 1$, $\lambda_A^+ = 1$ implica non solo $\lambda_A^+ = \lambda_s^+ = 1$, ma pure, per la (123), $A\,u = u$, e cioè, sempre per la (6), $y = [0]$.

Supponiamo ora che, nell'ipotesi

(31) $$\lambda_1^+ = \ldots = \lambda_g^+ = \lambda_A^+,$$

sia

(32) $$\lambda_A^+ = 1.$$

Allora si ha, per la (20),

(33) $$A^{kk}\,u = u,\ k = 1, \ldots, g,$$

mentre dalla (6) si trae comunque, per le (1) e (120),

(34) $$A^{kk}\, u \leqq u - \left[A^{k,g+1}, A^{k,g+2}, \ldots, A^{ks}\right] u \leqq u,$$

$$k = 1, \ldots, g.$$

Con $g = s$ la (33) equivale a $A\, u = u$, cioè, per la (6), alla relazione $y = [0]$, mentre con $g < s$ dalle (33) e (34) scende per le (1), (120) e (121),

$$k = 1,\ldots,g;\ i = g+1,\ldots,s \Rightarrow A^{(ki)} = [0]$$

e perciò $A^{(g+1)} = [0]$, contro la proprietà V) della (120).

Dunque, dalle ipotesi (31)-(32) scende: $g = s$, $y = [0]$. Tale conclusione e la (24) bastano per la tesi (28).

II) *SOLUZIONI CON $w > 0$.*

Supponiamo che il sistema (15)-(17) ammetta soluzioni con $w > 0$. Allora, per le ipotesi su A e ℓ e i risultati dei paragrafi 6.3 e 6.4 (in particolare per le (2) e (8) del §6.4), posto, come per il seguito, $Z_r = [I - (1 + r)\, A]$, si ha

$$p\, Z_r = w\, \ell > [0],\ p > [0],\ r \geqq 0,$$

e la Z-matrice Z_r è pure K-matrice, sicchè risulta

$$1 > (1 + r)\, \lambda_A^+,\ r \geqq 0,$$

ciò che implica

(35) $$\lambda_A^+ < 1.$$

Posto ora

(36) $$r^+ = (1/\lambda_A^+) - 1,$$

è così evidente che se il sistema (15)-(17) ammette soluzioni con $w > 0$, allora in ognuna di esse risulta

(37) $$0 \leqq r < r^+$$

e A gode della proprietà (35), dalla quale scende, anche per le (36) e (25),

$$r^{+} > 0, \; y \geq [0] \; . \tag{38}$$

Ciò premesso, osserviamo che la (35) individua una condizione su A pure sufficiente per l'esistenza di soluzioni del sistema (15)-(17) con $w > 0$. Infatti, comunque scelta una coppia (r, w), con r che verifica la (37) e $w > 0$, nell'equazione

$$p \, Z_r = w \, \ell,$$

equivalente alla (15), Z_r è non solo Z-matrice, per la (1), ma pure K-matrice, grazie alle (36) e (37) (cfr. § 6.4, punto 8); dunque, con la scelta di (r, w) indicata, il vettore

$$p = w \, \ell \, Z_r^{-1}, \tag{39}$$

con Z_r^{-1} inversa di Z_r, è l'unica soluzione della (15) ed è vettore senz'altro positivo, grazie alle ipotesi su w e ℓ e alla semipositività delle linee dell'inversa di una K-matrice (cfr. § 6.4). Infine, per le (10), (38) e (39), il vincolo (17) si traduce subito nella forma

$$w = 1/(\ell \, Z_r^{-1} \, y). \tag{40}$$

Concludendo: il sistema (15)-(17) ammette soluzioni con $w > 0$ se e solo se A verifica la (35), nel qual caso l'insieme di tali soluzioni si può descrivere completamente associando a ciascuno dei valori di r nell'intervallo (37), il numero w descritto dalla (40) ed il vettore

$$p = w \, \ell \, Z_r^{-1} = \frac{1}{\ell \, Z_r^{-1} \, y} \, \ell \, Z_r^{-1} \; . \tag{41}$$

III) *SOLUZIONI CON* $w = 0$.

Occupiamoci ora delle soluzioni con $w = 0$ del sistema (15)-(17). Denotiamo con $p_{(k)}$, $b_{(k)}$, $y_{(k)}$ i vettori descritti dalle sole componenti dei rispettivi vettori p, b, y (e nello stesso ordine) associate alle linee interessanti A^{kk} nella (120). In modo analogo poniamo

(42) $$Z_r^{kk} = [I - (1 + r) A^{kk}]$$

e, qualora nella (120) risulti $g < s$, accostiamo ordinatamente i vettori $p_{(1)}, p_{(2)}, \ldots, p_{(s)}$ per porre

(42) $$\Pi_{(k)} = [p_{(1)}, p_{(2)}, \ldots, p_{(k-1)}] \quad, k=g+1, \ldots, s.$$

Supponiamo che il sistema indicato ammetta soluzioni con $w = 0$. Allora, per le ipotesi fatte su A e le convenzioni (120) e (121), esistono un numero r e vettori $p_{(1)}, \ldots, p_{(s)}$ tali per cui risulta

(43)
(44) $$p_{(k)} Z_r^{kk} = \begin{cases} [0] \ , \ k = 1, \ldots, g \\ (1 + r) \Pi_{(k)} A^{(k)} \ , \ k = g+1, \ldots, s \end{cases}$$
(se $g < s$)

(45) $$p_{(k)} > [0], \ k = 1, \ldots, s$$

(46) $$p_{(1)} b_{(1)} + \ldots + p_{(s)} b_{(s)} = 1$$

(47) $$r \geqq 0.$$

Per l'ipotesi (1), la proprietà II della (120) e il teorema di Perron-Frobenius, le (43), (45) e (47) qualificano $1/(1+r)$ come autovalore dominante di $A^{11}, \ldots, A^{gg}$ e $p_{(1)}, \ldots, p_{(g)}$ come autovettori (riga) positivi, rispettivamente associati.

Denotato allora con $p^+_{(k)}$, $k = 1, \ldots, g$, un autovettore (riga) positivo di A^{kk} associato a λ_k^+ e con α_k una costante positiva arbitraria, si ha dunque

$$(48) \qquad \frac{1}{1+r} = \lambda_1^+ = \ldots = \lambda_g^+$$

$$(49) \qquad p_{(k)} = \alpha_k \, p_{(k)}^+ \, , \ k = 1, \ldots, g.$$

Inoltre, se nella (120) risulta $g < s$, allora, per le ipotesi su A, le (45) e (47) e le definizioni (43) e (121), il secondo membro del sistema (44) risulta positivo se $p_{(k)}$ ha unica componente, semipositivo in caso contrario, nel qual caso A^{kk} (e perciò Z_r^{kk}) risulta connessa, grazie alla proprietà II della(120). Per le osservazioni b) e c) del teorema del §6.4 e la (45), ciò evidenzia che la Z-matrice Z_r^{kk}, $k = g+1, \ldots, s$, è pure K-matrice e perciò (cfr. pure la proposizione 8) dello stesso teorema e la (42)) che risulta

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+r} > \lambda_k^+ & (50) \\ p_{(k)} = (1+r) \, \Pi_{(k)} \, A^{(k)} \, (Z_r^{kk})^{-1}, & (51) \\ k = g+1, \ldots, s, \end{cases}$$

cosicchè in ogni caso si ha, per le (36) e (23),

$$(52) \qquad r = r^+ = \frac{1}{\lambda^+} - 1 \begin{cases} >0, \text{ se } \lambda_A^+ < 1 \\ =0, \text{ se } \lambda_A^+ = 1. \end{cases}$$

Le conclusioni (48) e (50) garantiscono pure che se il sistema (15) - (17) ammette soluzioni con $w = 0$, allora solo i seguenti casi

$$(53) \qquad g = s, \quad \lambda_A^+ = 1, \ y = [0]$$

$$(54) \qquad g = s, \quad \lambda_A^+ < 1, \ y \geq [0]$$

(55) $$g < s, \quad \lambda_A^+ < 1, \quad y \geq [0],$$

illustrati dai corrispondenti esempi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

sono possibili, gli altri potendosi escludere sfruttando le (24) e (28).

Ciò premesso, supponiamo che A verifichi la condizione

(56) $$\begin{cases} \lambda_1^+ = \lambda_2^+ = \ldots = \lambda_g^+, \text{ se } g = s \\ \lambda_1^+ = \lambda_2^+ = \ldots = \lambda_g^+ > \lambda_k^+, \; k = g+1, \ldots, s, \text{ se } g < s. \end{cases}$$

E' allora evidente, per le (1), (120) e il teorema di Perron-Frobenius, che con $p_{(1)}, \ldots, p_{(g)}$ scelti come nella (49) e $r = r^+$ come nella (52), si descrive l'intero insieme delle soluzioni del sistema (43), (45), (47).

Nel caso (53), tale sistema equivale, per $w = 0$, al sistema (15) - (16) e nella (17) si ha, per le (10)-(11), $b = u^h$, con h scelto in $\{1,2,\ldots, n\}$. In tale caso, data la simmetria del ruolo svolto da $A^{11}, \ldots, A^{gg}$, si può allora scegliere, per semplicità e senza ledere la generalità dell'analisi,

(57) $$h = \alpha_1 = 1, \quad p_{(1)}^+ = u,$$

in modo tale che nella soluzione

(58) $$(p, r, w) = ([p_{(1)}, \ldots, p_{(g)}], r^+, 0) =$$
$$= ([\alpha_1 p_{(1)}^+, \ldots, \alpha_g p_{(g)}^+], r^+, 0)$$

descritta dalle (49) e (52), la condizione di normalizzazione (17) si riduca all'espressione $p_1 = 1$.

Nel caso (54), allora vale la (10) e nella soluzione (p, r, w), che è ancora del tipo (58) (però con $r^+ > 0$), la stessa condizione si può riscrivere nella forma

$$\sum_{k=1}^{g} \alpha_k \, p^+_{(k)} \, y_{(k)} = 1 \tag{59}$$

atta ad evidenziare l'arbitrarietà, una volta fissati $p^+_{(1)}, \ldots, p^+_{(g)}$, della scelta del vettore

$$\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_g] > [0]. \tag{60}$$

Se invece A verifica la (55), scelto $r = r^+$ come nella (52) e i vettori $p_{(1)}, \ldots, p_{(g)}$ come indicato nella (49), osserviamo che con $r = r^+$ ciascuna delle Z-matrici $Z^{kk}_{r^+} = [I - (1 + r^+) A^{kk}]$, $k = g+1, \ldots, s$, è pure K-matrice, perchè dalla (56) scende, per le (23) e (52) e il teorema di Perron-Frobenius,

$$1 = \text{dom } (I) > (1 + r^+) \lambda^+_k = \text{dom } \{(1+r^+) A^{kk}\}, \quad k = g+1, \ldots, s. \tag{61}$$

In più, per la proprietà II della (120), ciascuna di tali matrici o è un numero positivo (per la (61)) o è una matrice connessa; perciò (per l'osservazione b) del teorema del § 6.4) ammette inversa positiva, così che per $r = r^+$ ciascuno dei vettori $p_{(g+1)}, \ldots, p_{(s)}$, costruiti per via ricorrente con la (51), verifica la (45); inoltre ognuno di questi è funzione lineare omogenea rispetto al vettore (60), sicchè l'arbitrarietà della scelta di questo nel rispetto della (17) è analoga a quella già segnalata per la (59).

Concludendo, il sistema (15) - (17) ammette soluzioni (p, r, w) con $w = 0$ se e solo se A gode della proprietà (56), nel qual caso A verifica senz'altro una ed una sola delle relazioni (53), (54), (55), ed in ogni soluzione (p, r, w) siffatta è:

a) $r = r^+$, con r^+ definito dalla (52);

b) posto $p = [p_{(1)}, \dots, p_{(g)}, p_{(g+1)}, \dots, p_{(s)}]$, risulta

$$p_{(k)} = \alpha_k \, p^+_{(k)} \quad , \; k = 1, \dots, g,$$

con $p^+_{(k)}$ arbitrario autovettore riga di A^{kk} associato all'autovalore dominante $\lambda^+_k = 1/(1+r^+)$ di A^{kk}, ed essendo i numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ da scegliersi come al successivo punto d);

c) con $g < s$, i vettori $p_{(g+1)}, \dots, p_{(s)}$ sono definiti per via ricorrente dalla (51) con $r = r^+$ e $\Pi_{(k)}$ definito dalla (43).

d) nel caso (53) si può scegliere, per semplicità, h, α_1 e $p^+_{(1)}$ come nella (57), mentre nei casi (54) e (55) i numeri positivi $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ si possono scegliere, nel rispetto del vincolo di normalizzazione (17), con $(g - 1)$ gradi di libertà.

IV) *RELAZIONI TRA LE VARIABILI DISTRIBUTIVE.*

Come si è posto in evidenza nel punto II di questo paragrafo, nell'ipotesi (35), cioè con $\lambda^+_A < 1$, si ha

(62) $$y = u - A\,u \geq [0]$$

(63) $$r^+ = \frac{1}{\lambda^+_A} - 1 > 0$$

e il sistema (15) - (17), che ammette allora l'espressione

$$
\begin{array}{ll}
(64) & \left\{ \begin{array}{l} p\, Z_r = w\, \ell \\ p > [0],\ r \geqq 0,\ w \geqq 0 \\ p\, y = 1, \end{array} \right. \\
(65) &
\end{array}
$$

definisce $w = f(r)$ come funzione implicita di r, almeno nell'intervallo (37):

(66) $$w = f(r) = 1/\ (\ell\, Z_r^{-1}\, y),\ 0 \leqq r < r^+$$

e per questa risulta poi, anche per le (12),

(67) $$0 < w = (1 - r\, p\, A\, u) \leqq 1,\quad 0 \leqq r < r^+.$$

Nello stesso intervallo la Z-matrice Z_r è pure K-matrice, sicchè (cfr. § 6.4) la sua inversa esiste, è continua, ha colonne semipositive ed ammette lo sviluppo in serie

$$Z_r^{-1} = [\, I - (1 + r)\, A\,]^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + r)^k\, (A)^k\ ,\ 0 \leqq r < r^+.$$

Per le (1) e (2) dalla (41), il vettore $(1/w)p = \ell Z_r^{-1} =$

$$= \ell \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + r)^k\, (A)^k,\ 0 \leqq r < r^+$$

è dunque funzione di r positiva, continua e strettamente crescente, al pari della funzione, grazie alle (62) e (65),

$$\left(\frac{1}{w}\, p \right) y = \frac{1}{w}\, (p\, y) = 1/w,\ 0 \leqq r < r^+.$$

E' perciò evidente che nell'intervallo (37) la (66) è non solo continua e limitata, ma pure strettamente decrescente con r. Di conseguenza esiste il limite

$$w^+ = \lim_{r \to (r^+)^-} f(r)$$

e risulta, per la (67),

$$0 \leqq w^+ < 1. \tag{68}$$

Se A gode pure, oltre che della proprietà (35), anche della (56), allora il sistema (15) - (17) ammette pure soluzioni con $w = 0$ ed in ognuna di queste (cfr. punto III di questo paragrafo) è, per la (52), $r = r^+ > 0$. Di conseguenza in tale caso la (66) è definita anche per $r = r^+$ e risulta senz'altro $w^+ = f(r^+) = 0$.

Vogliamo ora dimostrare che risulta

$$w^+ = 0 \tag{69}$$

anche se A gode solo della proprietà (35) e non anche della (56), cioè se il sistema (15) - (17) ammette solo soluzioni con $w > 0$. In proposito notiamo anzitutto che dalla (64) scende

$$\mathit{lim}\ (p\ Z_r) = \mathit{lim}\ (w\ \ell) = w^+\ \ell, \tag{70}$$

i limiti essendo intesi, come pure per il seguito, per $r \longrightarrow (r^+)^-$. Nell'intervallo (37) p è inferiormente limitato dal vettore $[0\ ]$. Inoltre ogni sua componente è funzione continua di r descritta da un rapporto tra polinomi in r, come si evidenzia riscrivendo la (41) nell'espressione

$$p = \frac{1}{\ell\ Z_r^+\ y} \cdot \ell\ Z_r^+\ ,\ 0 \leqq r < r^+, \tag{71}$$

nella quale Z_r^+ denota la matrice aggiunta di Z_r.

Dunque, per $r \longrightarrow (r^+)^-$ ogni componente di p o diverge a $+\infty$ oppure ammette un limite finito non negativo. Il primo caso va escluso perchè esso implica

$$lim\ p\,u = +\infty$$

mentre dalle (62), (63), (65), (67) e (68) si trae invece

$$lim\ p\,u = lim\ \{ p\,u - p\,A\,u + p\,A\,u \} =$$

$$= lim\ \{ p\,y + p\,A\,u \} = 1 - lim\ \frac{1 - r\,p\,A\,u - 1}{r} =$$

$$= 1 - lim\ \frac{w - 1}{r} = 1 + \frac{1 - w^+}{r^+} < +\infty .$$

Dunque esistono, ed hanno componenti tutte finite, i limiti

$$p^+ = lim\ p, \quad Z_{r^+} = [I - (1 + r^+)\ A] = lim\ Z_r$$

e risulta, anche per la (65), le proprietà di y e di p,

$$p^+ \geq [0] .$$

Dalla (70) scende così, anche per le (2) e (68),

$$p^+ Z_{r^+} = w^+ \ell \begin{cases} > [0], \text{ se } w^+ > 0 \\ = [0], \text{ se } w^+ = 0. \end{cases}$$

Ciò evidenzia che se è $w^+ > 0$, allora $Z_{r^+} = [I - (1+r^+)A]$ è K-matrice (per la (3) del teorema del § 6.4) e perciò risulta (per la (8) dello stesso teorema)

$$1 > (1 + r^+)\ \lambda_A^+ ,$$

contro la (63). Dunque è $w^+ = 0$ e vale la (69).

E' così evidente che, se vale la (35), la funzione $w = f(r)$, implicitamente definita dal sistema (15) - (17) nell'intervallo (37), o nell'analogo intervallo chiuso se A gode della proprietà (56), è continua e strettamente decrescente da $f(0) = 1$ a $w^+ = 0$. Ciò assicura che, fissato il valore di una delle due variabili distributive, cioè di r nell'intervallo

$0 \leqq r < r^+$ ($0 \leqq r \leqq r^+$, se vale anche la (56)),

oppure di w nell'intervallo

$0 < w \leqq 1$ ($0 \leqq w \leqq 1$, se vale anche la (56)),

esiste un vettore di prezzi relativi p soluzione del sistema (15)-(17), unico a meno dell'arbitrarietà nella scelta del vettore (60) per $r = r^+$ (ovvero per $w = 0$) nell'ipotesi (56).

Sulle conclusioni raggiunte è forse utile segnalare le seguenti 3 osservazioni:

a) Sraffa ammette (cfr. [57], Appendice B) che qualche componente del vettore p diverga a $+\infty$ per $r \longrightarrow (r^+)^-$. Ciò si verifica se e solo se, sovvertendo la convenzione che lo stesso autore sceglie (cfr. [57], § 12), valgono entrambe le seguenti condizioni:

1) pur essendo $\lambda_A^+ < 1$, e perciò $y \geq [0]$, si sceglie una normalizzazione dei prezzi del tipo (11); 2) indicato con p_h il prezzo che così si impone unitario, il prezzo che a questo corrisponde con la nostra normalizzazione (10) tende a zero per $r \longrightarrow (r^+)^-$.

Analoga osservazione vale anche a proposito delle considerazioni presentate al riguardo da Pasinetti (cfr. [46], §§ 10.5, 10.6).

b) Per dimostrare la stretta monotonia della (66), per $r < r^+$, si può anche (cfr. [43]) derivare rispetto ad r entrambi i membri della relazione

$$(1 + r)\left(\frac{1}{w}\ p\right) A + \ell = \left(\frac{1}{w}\right) p$$

equivalente (per quegli r) alla (15).

c) Per ottenere la (69), alcuni autori sfruttano la circostanza che ogni componente di p è descritta, come nella (71), da un rapporto tra due polinomi, assumendo che il 1° di essi abbia grado superiore al 2°, ciò che, a nostro avviso, non è accettabile in generale: si pensi al caso della cosiddetta *composizione organica del capitale uniforme*, cioè al caso in cui si ha $\ell A = \lambda_A^+ \ell$, nel quale (cfr. [9]), e solo nel quale (cfr. [33]) i prezzi sono costanti al variare di r.

§ 3. VARIANTI DEL MODELLO.

Il sistema (15)-(17) è suscettibile di diverse riformulazioni e varianti, alcune delle quali, già accennate da Sraffa o da altri autori, sono collegate a modalità di definizione dei salari o di normalizzazione dei prezzi diverse da quelle adottate nel modello finora discusso. Rinviando al § 4 per la discussione del cosiddetto "modello con salari pagati in merce tipo", in questo paragrafo ci occupiamo delle varianti che generano i modelli cosiddetti "a salari fissi o impliciti", "a salari misti", "a salari anticipati", varianti che nel § 5 verranno sfruttate per tentare di inquadrare nel modello generale fin qui analizzato, i tre schemi di produzione semplice formulati da Sraffa.

I) *Modello a salari fissi*. Si tratta del modello che si ottiene imponendo al sistema (15)-(17) l'ulteriore vincolo

(71) $$w = p\,c,$$

nel quale c è un prefissato vettore (detto "delle sussistenze") che supponiamo, proprio per rendere esplicite le ipotesi, certo implicitamente assunte al riguardo da Sraffa, scelto in modo che sia

(72) $$[0] \leq c \leqq y$$

e di conseguenza la condizione di normalizzazione (17) ammetta l'espressione $p\ y = 1$.

Osserviamo che, indicato con

$$s = y - c$$

il vettore del sovrappiù, il caso $s = [0]$ corrisponde a modelli che lo stesso Sraffa chiama di "produzione per sussistenza" (sovrappiù nullo), mentre il caso $s \geq [0]$ è tipico di modelli di "produzione con sovrappiù".

Poichè l'ipotesi (71), oltre ad evidenziare che il valore dei salari corrisposti copre esattamente quello delle sussistenze, suggerisce pure una sostituzione atta ad eliminare la variabile w nella (15), si suole dire che il vincolo (71) è tipico dei modelli a salari fissi o impliciti, anzichè liberi (o variabili o espliciti) come nella (15).

E' subito evidente che per ciascuna delle eventuali soluzioni del modello (15)-(17) che verificano il vincolo (71) risulta, anche per le osservazioni dei punti II e IV del § 2,

(73) $$w = p\ c = p\ y = 1,\ r = 0,\ \text{se } c = y,\ \text{cioè } s = [0]$$

(74) $$0 < w = p\ c < p\ y = 1,\ 0 < r < r^{+},\ \text{se } c \leq y,\ \text{cioè } s \geq [0].$$

Di conseguenza, la condizione (35), cioè la condizione

(75) $$\lambda_A^{+} < 1,$$

già riconosciuta necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni con $w > 0$ del modello (15)-(17), è ancora necessaria per l'esistenza di soluzioni per il "modello a salari fissi"

$$(76) \qquad \begin{cases} (1 + r)\, p\, A + w\, \ell = p \\ p > [0]\,, \ p\, y = 1,\ r \geqq 0,\ w = p\, c. \end{cases}$$

E' poi immediato constatare, ricorrendo alla (73) ed alle conclusioni del § 2, che con $c = y$ l'ipotesi (75) (certo garantita dalla (72) se A è connessa: si veda la (27)) è pure sufficiente per l'esistenza di soluzioni del modello (76), le quali sono tutte descritte dalla terna

$$(77) \qquad (p,\ r,\ w) = (\ell [I - A]^{-1},\ 0,\ 1).$$

Discuteremo dunque nel seguito il modello (76) nell'ipotesi che sia

$$(78) \qquad \lambda_A^+ < 1,\ c \leq y.$$

Per le proprietà della funzione $(1/w)p$ evidenziate nel § 2, punto IV, e la (74), $(1/w)p\, c$ è funzione di r positiva, continua e strettamente crescente nell'intervallo $0 \leqq r < r^+$ ed in più risulta, anche per la (76),

$$(79) \qquad \begin{array}{l} r = 0 \implies (1/w)\ p\ c = p\ c < p\ y = 1 \\ \lim\ (1/w) = + \infty \end{array}$$

$$(80) \qquad \lim p = p^+ \begin{cases} > [0\,], & \text{se A è connessa} \\ \geqq [0\,], & \text{se A è decomponibile,} \end{cases}$$

i limiti essendo intesi, come nel § 2, punto IV, e per il seguito, per $r \longrightarrow (r^+)^-$. Dunque, poichè per $w > 0$ l'equazione $(1/w)\ p\ c = 1$ equivale alla (71), quest'ultima ammetterà soluzione se e solo se risulta

(81) $\qquad lim\{(1/w)\ p\ c\} > 1,$

ovvero, per le (40) e (41), se e solo se A, ℓ e c verificano la disuguaglianza

(82) $\qquad lim\ (\ \ell\ Z_r^{-1}\ c) > 1.$

In questo caso, indicata con $r = r^0$ tale soluzione, essa è unica, verifica l'equazione

(83) $\qquad \ell\ Z_r^{-1}\ c = 1$

e la limitazione

(84) $\qquad 0 < r^0 < r^+$

ed i corrispondenti valori di p e di $w = p\ c$ sono descritti ponendo $r = r^0$ nelle (41) e (40).

Circa il rispetto della (81), ovvero della (82), cioè la esistenza di r^0, tale valore è garantito se A è connessa (dalle (80) e (72) si trae allora $p^+ c > 0$ e dalla (79) scende la (81)), mentre è incerto se A è decomponibile.

Ad esempio, con

(85) $$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,7 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \ell = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$0 < a < 1$, il sistema (76) ammette soluzioni se e solo se si sceglie $0 < a < (2/19) \cong 0,10526$, nel qual caso si ottiene la soluzione

$$p = \left[\frac{10 - 95\ a}{69 - 86\ a}, \quad \frac{67}{69 - 86\ a} \right];\ r = 8,5;\ w = \frac{1 - 9,5\ a}{69 - 86\ a}.$$

II) *Modello a salari misti.*

Per considerare un caso non esplicitamente analizzato da

Sraffa, è possibile immaginare che vengano corrisposti, oltre ai salari impliciti (o sussistenze) $p\ c$, anche salari espliciti variabili v: parleremo in tal caso di "salari misti"

$$w = p\ c + v, \quad v \geqq 0.$$

E' così possibile configurare un modello che è spontaneo chiamare "a salari misti":

$$(86) \qquad \begin{cases} (1 + r)\ p\ A + w\ \ell = p \\ p > [0]\ , \ p\ y = 1, \ r \geqq 0, \ w \geqq p\ c, \end{cases}$$

e che si può considerare variante del modello (15)-(17) ottenuta imponendo a questo l'ulteriore vincolo

$$(87) \qquad w \geqq p\ c,$$

ove c verifica la (72) e di conseguenza risulta

$$(88) \qquad p\ c = w = 1 = p\ y, \ \text{se}\ c = y,$$

$$(89) \qquad 0 < p\ c \leqq w \leqq 1 = p\ y, \ \text{se}\ c \lneq y.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto sul modello a salari fissi e considerando la disequazione $(1/w)\ p\ c \leqq 1$ in luogo della corrispondente equazione, si dimostra agevolmente che:

a) la condizione $\lambda_A^+ < 1$ è necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni del modello (86); se tale condizione è verificata (come certo si ha se A è connessa), allora:

b) con $c = y$ questo ammette l'unica soluzione (77) del modello a salari fissi;

c) con $c \lneq y$ le soluzioni sono tutte descritte calcolando w e p mediante le (40) e (41), con r scelto ad arbitrio nell'intervallo

$$0 \leqq r \leqq r^0,$$

oppure

$$0 \leq r < r^+$$

a seconda che esista o no una soluzione $r = r^o < r^+$ della equazione (83).

Con riferimento all'esempio (85), si nota che il corrispondente modello a salari misti ammette le soluzioni descritte da

$$(90) \quad p = \frac{1}{1{,}8\ (1-a) + r(0{,}6-0{,}8\ a)} \left[1 - a(1 + r);\ 1 + 0{,}6(1+r)\right]$$

$$(91) \quad w = \frac{2\left[1 - 0{,}1\ (1 + r)\right]\left[1 - a(1 + r)\right]}{1{,}8\ (1 - a) + r\ (0{,}6 - 0{,}8\ a)}$$

ed r scelto ad arbitrio come segue:

$$0 \leq r \begin{cases} \leq 8{,}5, \text{ se } 0 < a < 1/9{,}5 \\ < \left\{\dfrac{1}{a} - 1\right\}, \text{ se } 1/9{,}5 \leq a < 1. \end{cases}$$

Per quanto concerne le proprietà di monotonia della funzione $w = f(r)$, relativa al modello in esame, tale proprietà, assieme alle altre individuate nel § 2, punto IV, si confermano, evidentemente, per i soli intervalli dei valori di r sopra indicati.

III) *Modelli a salari anticipati.*

Aderendo allo schema inizialmente suggerito da Sraffa è possibile configurare sistemi ove i salari siano corrisposti in via anticipata, cioè nei quali l'equazione

$$(92) \qquad (1 + r)\ (p\ A + w\ \ell) = p$$

sostituisce la relazione fondamentale (15) dei modelli a a salari posticipati già presi in esame, cioè dei modelli a salari liberi (15) - (17), a salari fissi (76) e a salari misti (86).

Salari liberi anticipati. Il caso di salari nulli conduce allo stesso problema discusso nel § 2.III, mentre quello di salari positivi può essere discusso riformulando l'analisi già presentata nel § 2.II con le ovvie varianti del caso, tutte riassumibili con semplicità, notando che la terna (p, r, w) risolve il modello (15) - (17) se e solo se la terna $((p, r, w/(1+r))$, cioè la terna

$$(93) \qquad (p,\ r,\ \overset{\prime\prime}{w}) = \left(\frac{1}{\ell Z_r^{-1}\, y}\ \ell\, Z_r^{-1},\ r,\ \frac{1}{(1+r)\,\ell\, Z_r^{-1}\, y}\right)$$

risolve il corrispondente modello a salari anticipati.

Per quanto concerne la monotonia della relazione $w = f(r)$, vale quanto già osservato nel precedente punto II).

Salari fissi anticipati. Le conclusioni già raggiunte per l'analogo modello a salari fissi posticipati si possono qui ripetere, pur di sostituire, nelle (82) e (83), $\ell Z_r^{-1}\, c$ con $(1+r)\,\ell\, Z_r^{-1}\, c$ e di ridefinire r^o in conseguenza. Nelle ipotesi (78) l'eventuale connessione di A garantisce ancora l'esistenza di soluzioni del modello, mentre la sua decomponibilità rende incerta tale esistenza.

In quest'ultimo caso può essere allora conveniente riscrivere il modello nell'espressione equivalente

$$(94) \qquad \begin{cases} p\,\overline{A} = \dfrac{1}{1+r}\ p \\ p > [0],\ p\,y = 1,\ 0 < r < r^{+},\ w = pc, \end{cases}$$

dopo aver posto

$$\bar{A} = A + c\,\ell = [a_{ij} + c_i\, \ell_j] \tag{95}$$

($\bar{A}$ è detta sovente "matrice maggiorata o aumentata dei coefficienti di consumo": cfr. [46]) ed osservare che il sistema (94) ammette soluzioni (p, r, w) se e solo se $\bar{A}$ gode delle stesse proprietà già chieste ad A nel § 2.III per l'esistenza di soluzioni con w = 0 del modello (15)-(17).

Poichè dalle (95), (5) e (78) scende

$$\bar{A}\, u = A\, u + c \underline{<}u, \tag{96}$$

l'eventuale ipotesi che $\bar{A}$ sia connessa garantisce, per il teorema di Frobenius, che sia

$$\lambda^{+}_{\bar{A}} < 1, \tag{97}$$

e perciò che il sistema (94) ammetta soluzioni, precisamente l'unica soluzione nella quale è $r = (1/\, \lambda^{+}_{\bar{A}}) - 1$, p unico autovettore di $\bar{A}$ associato a $\lambda^{+}_{\bar{A}}$ e normalizzato con la condizione p y = 1,e w = p c.

Se invece $\bar{A}$ è decomponibile, riferiamoci, sempre nell'ipotesi (78), alla forma normale di $\bar{A}$ del tipo (120), usando, per evitare equivoci, la notazione ($\bar{g}$, $\bar{s}$) in luogo di quella, (g, s), già utilizzata per l'analoga forma normale di A.

Grazie alle ipotesi su c e ℓ, almeno una riga di $\bar{A}$ è positiva, sicchè può essere soltanto $\bar{g} = 1 < \bar{s}$. Sono perciò senz'altro nulle tutte le componenti di c associate a righe diverse da quelle del blocco $\bar{A}^{11}$ della forma normale di $\bar{A}$, cioè alle righe dei blocchi $\bar{A}^{kk}$, con k = 2, 3, ..., $\bar{s}$, ciascuno dei quali corrisponderà perciò ad un qualche blocco A^{ii} della forma normale di A ed avrà dunque, per la (23) e l'ipotesi (78), autovalore dominante inferiore all'unità. Poichè la (96) esclude, per la definizione (95) e le ipotesi su c e ℓ, che sia $\lambda^{+}_{\bar{A}} > 1$, sarà allora $\lambda^{+}_{\bar{A}} = 1$ se e solo se risulta $\bar{A}^{11}u = u$. Ma ciò implica, per la (96), che siano nulli tutti i blocchi che nella forma normale di $\bar{A}$ si collocano a destra di $\bar{A}^{11}$, contro la proprietà V) della medesima forma.

E' perciò evidente che, nell'ipotesi (78), la (97) vale anche con $\bar{A}$ decomponibile. Stabilito ciò, procedendo su $\bar{A}$ come già fatto per A nel § 2.III, individuiamo così in

$$\mathrm{dom}(\bar{A}^{11}) > \mathrm{dom}(\bar{A}^{kk}),\ k = 2, 3, \ldots, \bar{s}$$

la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni del sistema (94) con $\bar{A}$ decomponibile (nell'ipotesi (78)), soluzioni che si esauriscono nell'unica costruibile col metodo già precisato nel § 2.III.

Con riferimento all'esempio (85), il modello a salari fissi anticipati ammette soluzioni se e solo se si sceglie

$$0 < a < 0{,}15,$$

nel qual caso si ottiene la soluzione

$$p = \left[\frac{3 - 20\,a}{15{,}6 - 19a},\ \frac{15}{15{,}6 - 19\,a}\right],\ r = 17/3,$$

$$w = \frac{0{,}3 - 2\,a}{15{,}6 - 19\,a}\ .$$

Salari misti anticipati. Le conclusioni già presentate per l'analogo modello a salari misti posticipati, si estendono banalmente, con le sole varianti imposte dalla necessità di ridefinire r^o quale eventuale radice in r dell'equazione

$$(1 + r)\ \ell\ Z_r^{-1}\ c = 1$$

e di calcolare il saggio di salario anticipato $\ddot{w}$ corrispondente al saggio di profitto r sfruttando non la (40), bensì l'analoga espressione contenuta nella (93).

Con riferimento al citato esempio, il corrispondente modello ammette tutte le soluzioni in cui p è fornito dalla (90), $\ddot{w}$ è pari al rapporto tra il valore offerto dalla (91) e (1 + r), ed r è scelto ad arbitrio come segue:

$$0 \leqq r \begin{cases} \leqq 17/3, \text{ se } 0 < a < 0{,}15 \\ < \left(\dfrac{1}{a} - 1\right), \text{ se } 0{,}15 \leqq a < 1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la monotonia della relazione $\ddot{w} = f(r)$, vale, anche in questo caso, quanto già detto per il caso dei salari misti posticipati.

§ 4. LA MERCE TIPO.

Nel § 2 si è discusso sull'esistenza e su alcune proprietà degli equilibrii del modello di Sraffa definiti nel § 1. In questo paragrafo ci occuperemo invece della cosiddetta "merce tipo". Il suo rilievo teorico è già stato sottolineato da più Autori, soprattutto per quanto concerne alcune caratteristiche (quali la linearità) della relazione distributiva w = f(r) che collega le variabili w e r all'interno delle terne (p, r, w) soluzioni del sistema (15) - (17). In questa sede ci interessa però analizzare il problema dell'esistenza e della molteplicità di tale merce tipo in ipotesi generali sulla matrice A, completando così l'analisi già da altri svolta con riferimento a matrici connesse.

Il problema della ricerca della merce tipo conduce all'analisi del sistema

$$
\begin{cases}
A\,x = \mu\,x & (98)\\
x > [0], \; \ell x = 1 & (99)\\
0 < \mu \leq 1, \; \mu \text{ costante}, & (100)
\end{cases}
$$

nella coppia incognita (μ, x) e nel quale considerazioni economiche oramai note, spiegano direttamente il significato di ciascuna delle relazioni indicate, ivi compresa la limitazione su μ, di solito omessa e qui inserita esplicitamente.

E' appena il caso di sottolineare che x descrive produzioni lorde, per così dire, fittizie, da tenere concettualmente ben distinte da quelle effettive descritte dal prefissato vettore q, supposto per semplicità a componenti tutte unitarie, come nella (4). Inoltre nella (98) è implicita l'ipotesi di rendimenti di scala costanti, senza che ciò implichi l'assunzione di analoga ipotesi per le funzioni di produzione effettive (cfr., ad es., [50, 52]).

In questo paragrafo analizzeremo il sistema (98)-(100), supponendo dapprima che A sia ancora nella forma normale (120), già utilizzata per il sistema nei valori (15) - (17), indi utilizzando la forma normale (122). Infine si presenteranno alcune osservazioni relative alle proprietà di A che grarantiscono l'esistenza sia di una merce tipo che di una soluzione con w = 0 del sistema dei valori, completando così l'analisi già fornita in proposito in [61].

Nel sistema (98) - (100) sia dunque A nella forma normale (120). Se in essa risulta $g = s$, è allora evidente, per la (23), che la condizione

$$\lambda_1^+ = \lambda_2^+ = \ldots = \lambda_s^+ \tag{102}$$

è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una merce tipo, la quale sarà descritta dal vettore

$$x = \left[\beta_1 \, x_{(1)}^+ , \beta_2 \, x_{(2)}^+ , \ldots , \beta_s \, x_{(s)}^+ \right]' ,$$

con $x_{(k)}^+$ autovettore (colonna) di A^{kk} associato al rispettivo autovalore dominante $\lambda_k^+ = \mu$, ed essendo le costanti

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \beta_s > 0 \tag{103}$$

numeri da scegliersi arbitrariamente, come sempre è possibile, nel rispetto del vincolo di normalizzazione $\ell x = 1$ della (99).

E' pure evidente che se vale la (102), la merce tipo è unica se e solo se risulta $s = 1$, cioè A connessa, mentre $(s - 1)$ gradi di libertà restano nella scelta delle costanti (103) in caso contrario.

Occupiamoci ora del caso $g < s$. Riscriviamo il sistema (98) - (100) nell'espressione equivalente

$$\left\{ \begin{array}{lll} (104) & (\mu I - A^{kk}) \, x_{(k)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=k+1}^{s} A^{kj} \, x_{(j)}, & k=1,\ldots,s-1 \\ [0], & k = s \end{cases} \\ (105) & x_{(k)} > [0], \quad k = 1, \ldots, s \\ (106) & \ell x = 1, \quad 0 < \mu \leqq 1, \quad \mu \text{ costante.} \end{array} \right.$$

Si noti che se per un certo k il secondo membro della (104) è nullo, allora il subsistema $S_{(k)}$, cioè l'insieme delle industrie associate al blocco A^{kk} della (120), è "finale", nel senso che nessuna industria di $S_{(k)}$ fornisce mezzi di produzione ad industrie di altri subsistemi. Il caso contrario corrisponde invece ad un subsistema $S_{(k)}$ "intermedio", cioè fornitore di qualche altro subsistema.

Dall'esame delle (104) - (106) per $k = s$ appare evidente, per le proprietà di A e il teorema di Perron-Frobenius, che se l'equivalente sistema (98) - (100) ammette soluzioni, allora in esse è

$$\mu = \lambda_s^+ \tag{107}$$

$$A^{ss} \neq 0 \quad . \tag{108}$$

Inoltre, sfruttando tale risultato preliminare, le proprietà fondamentali di A, della sua forma normale (120) e delle K-matrici (§ 6.4), la stessa ipotesi implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k^+ \begin{cases} = \lambda_s^+ \text{ , se } S_{(k)} \text{ è finale} \\ < \lambda_s^+ \text{ , se } S_{(k)} \text{ è intermedio} \end{cases} \\ k = 1, \ldots, s-1. \end{array} \right. \tag{109}$$

Si può anche notare che, sempre con $g < s$, la condizione (109) implica la (108) ed è pure sufficiente per l'esistenza di soluzioni del sistema (104)-(106), soluzioni che tutte si possono costruire scegliendo μ come nella (107), indi ponendo

$$x_{(s)} = \beta_s \, x^+_{(s)}$$

(β_s e $x^+_{(s)}$ hanno il consueto significato), infine costruendo i vettori $x_{(s-1)}, x_{(s-2)}, \ldots, x_{(1)}$, risolvendo per via ricorrente ciascuno dei sistemi (104) - (105). In altre parole si sceglie

$$\begin{cases} \mu = \lambda_s^+ \\ x_{(k)} = \begin{cases} \beta_k \, x_{(k)}^+ , & \text{se } S_{(k)} \text{ è finale} \\ [\lambda_s^+ I - A^{kk}]^{-1} \sum_{j=k+1}^{s} A^{kj} x_{(j)} , & \text{se } S_{(k)} \text{ è intermedio} \end{cases} \\ k = s, s-1, \ldots, 2, 1, \end{cases}$$

assegnando a β_k e $x_{(k)}^+$ il consueto significato e scegliendo le costanti (103) come già sopra indicato per il caso $g = s$.

Per quanto riguarda il vincolo (100) è appena il caso di osservare che dalla (102) nel caso $g = s$, oppure dalla (109) con $g < s$, scende subito, sfruttando la (23), la richiesta proprietà.

L'analisi fin qui condotta sul sistema (98)-(100) può essere ripetuta supponendo che A sia nella forma normale (122). In tale senso, sfruttando un classico risultato di Gantmacher ([21], p. 92, teorema 6) oppure ripetendo la procedura già usata nel § 2, punto III, si evidenzia che quel sistema ammette soluzione se e solo se la (122) gode della proprietà

$$\mu_1^+ = \ldots = \mu_g^+ , \text{ se } g = s$$
$$\mu_1^+ = \ldots = \mu_g^+ > \mu_k^+, \; k=g+1,\ldots,s, \text{ se } g < s,$$

μ_k^+ denotando l'autovalore dominante del blocco A_{kk} della (122).

Per quanto riguarda il significato economico dei risultati ottenuti, ci sembra che informazioni di qualche interesse si possano ottenere soprattutto con riferimento all'analisi condotta sfruttando la forma (120). In proposito si rinvia alle seguenti osservazioni ed a quelle del successivo § 5.

<u>Osservazione 1.</u> Se il sistema (15) - (17) ammette soluzioni con $w = 0$ ed esiste una merce tipo, allora A gode, oltre che della (56) anche delle proprietà

(110) $$g = s$$

(111) $$\lambda_1^+ = \lambda_2^+ = \ldots = \lambda_g^+ .$$

Infatti, l'ipotesi $g < s$ rende la (109) incompatibile con la (56) poichè, grazie alla (23), scende: dalla prima $\lambda_A^+ = \lambda_s^+$ e dalla seconda $\lambda_A^+ > \lambda_s^+$. Inoltre, se vale la (110), nella (109) sono nulli tutti i blocchi $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(g)}$, sicchè vale la (111), che in tal caso coincide con la (56). E' così confermata la conclusione in proposito già raggiunta per altra via in [6] e già deducibile direttamente da un teorema di Gantmacher [21]. Inoltre è evidenziato che la merce tipo è unica se e solo se A è connessa ($g = s = 1$), mentre ve ne sono infinite nel caso di A diagonale a blocchi ($g = s > 1$): una per ogni scelta delle costanti (103) nel rispetto del vincolo di normalizzazione descritto nella (99).

<u>Osservazione 2</u>. Si può supporre, come in Sraffa, che i salari siano corrisposti in merce tipo, ovvero valga 1 il prodotto netto tipo. Ciò equivale a sostituire nel sistema (15) - (17), alla consueta condizione di normalizzazione $p\ y = 1$, il vincolo

(112) $$p(x - A\ x) = 1,$$

nel quale x è il vettore che descrive la merce tipo, nel senso che risulta

(113) $\begin{cases} A\,x = \lambda^{+}\,x \\ x > [0]\;,\; \ell x = 1. \end{cases}$

(114)

In tal caso, dalla (112) si trae, per la (113),

$$1 = p\,(x - A\,x) = p\,x - p\,A\,x = p\,x - p\,(\lambda^{+}\,x) = (\,1 - \lambda^{+})\,p\,x$$

$$1 = p\,(x - A\,x) = \frac{1}{\lambda^{+}}\,p\,A\,x - p\,A\,x = (\frac{1-\lambda^{+}}{\lambda^{+}})\,p\,A\,x$$

ed anche, per la (36),

$$p\,x = 1 + (1/r^{+}),\; p\,A\,x = 1/r^{+}.$$

Di conseguenza, postmoltiplicando ambo i membri della (15) per il vettore "tipo" x, sfruttando la (114) e i risultati ottenuti, si trae

$$0 = (1 + r)\,p\,A\,x + w\,\ell - p\,x = \frac{(1 + r)}{r^{+}} + w - (1 + \frac{1}{r^{+}}) =$$

$$= w - (1 - \frac{r}{r^{+}}),$$

classico risultato di Sraffa: nel caso in esame la "distribuzione" (tra salari e profitti) risulta lineare, nel senso che è lineare la funzione $w = f(r)$ di cui alla (66):

(115) $$w = 1 - \frac{r}{r^{+}}\;,\; 0 \leq r \leq r^{+}.$$

Osservazione 3. Si può pure considerare, come in Sraffa (cfr. [57], § 22) o in Burmeister [9], il caso in cui la "composizione organica del capitale" risulti uniforme nelle varie industrie, nel senso che risulta

(116) $$\ell\,A = \lambda^{+}\,\ell.$$

Si dimostra facilmente che se vale la (116) il vettore dei prezzi di equilibrio p è costante al variare di r e la distribuzione risulta lineare. Circa il ruolo dell'ipotesi (116) sull'ottenimento di prezzi di equilibrio costanti e circa la possibilità che valga la (115) in altri casi, si rinvia a [33], in contrasto con [39] e [46], Cap. V, §12.4.

In [33] si dimostra infatti che con n >2 può sussistere la relazione lineare (115) senza essere in presenza di composizione organica del capitale uniforme o in presenza di sistema tipo.

§ 5. <u>OSSERVAZIONI</u>.

Sul significato economico dei risultati ottenuti nei precedenti paragrafi si possono presentare varie osservazioni. Tra queste le seguenti.

<u>Osservazione 1</u>. La decomponibilità della matrice A può condurre all'assenza di soluzioni, con w nullo, del sistema (15) - (17), circostanza che appunto si verifica se non vale la condizione (56). Analoga osservazione vale per l'esistenza e la molteplicità della merce tipo. Nell'articolo di Newman [42], la citata condizione, esposta per il caso semplice di n = 2, non avrebbe, a detta di tale Autore, un'interpretazione economica chiara e plausibile, interpretazione che è stata invece in seguito proposta, come è ben noto, da Zaghini in [63]. Inoltre Newman tenta di aggirare ogni problema derivante dalla decomponibilità di A suggerendo un'aggregazione (nel senso proprio della Statistica e dell'Econometria) dei

settori che evidenziano la decomponibilità ad altri non interessati da tale proprietà, in modo da costruire una nuova matrice degli inputs connessa.

L'artificio proposto da Newman è inaccettabile, non solo perchè esso ignora la derivazione ricardiana del modello di Sraffa, ma anche perchè, come del resto ha segnalato Sraffa (cfr. la corrispondenza tra Sraffa e Newman, posta in appendice al lavoro di Bharadwaj [5]), è impossibile superare anomalie (quali la non positività dei prezzi di equilibrio) derivanti da caratteristiche strutturali del sistema (l'esistenza di beni non base) mediante artifici dell'osservatore, quali certe modalità di aggregazione dei settori. De resto, per evidenziare che l'artificio proposto da Newman non risolve, ma tutt'al più aggira, una reale difficoltà, basti notare che una qualunque riaggregazione dei settori, dotata della proprietà richiesta da Newman, è incompatibile con la definizione stessa dei coefficienti di input.

Osservazione 2. Le anomalie collegate alla decomponibilità della matrice degli inputs A sono state affrontate, in questo lavoro, sfruttando le proprietà della forma normale (120) della stessa matrice. Uno dei vantaggi immediati di tale approccio riguarda la possibilità che esso offre, di analizzare il tipo di integrazione del sistema economico i cui equilibrî il modello indaga. In proposito notiamo subito che la classificazione e riaggregazione delle industrie imposta dalla forma normale di A è unica, nei limiti (precisati nel § 6.2, proprietà VI) dell'unicità della forma medesima.

In tale ordine di idee, il k-esimo subsistema (qui, come nel § 4, il termine non è usato nel senso di Sraffa [57],Appendice A), ovvero il subsistema $S_{(k)}$, cioè (cfr. § 4) l'insieme delle industrie associate al blocco A^{kk}:

- è connesso, cioè integrato (caso $A^{kk} \geq [O]$), oppure consiste in una sola industria che non prevede reimpieghi interni del proprio prodotto (caso $A^{kk} = 0$);
- non riceve inputs da altri subsistemi se è $k \leqq g$, mentre in caso contrario riceve sicuramente inputs da qualche subsistema a monte, cioè da qualche $S_{(h)}$, con $h < k$;
- può fornire inputs anche al resto del sistema, ma solo verso industrie a valle, precisamente: verso uno o più dei subsistemi $S_{(g+1)}, S_{(g+2)}, \dots, S_{(s)}$, se è $k \leqq g$, verso uno o più dei subsistemi $S_{(k+1)}, S_{(k+2)}, \dots, S_{(s)}$, se è $g < k < s$.

Inoltre, nel medesimo ordine associato alla (120), le eventuali permutazioni tra e/o nei blocchi tollerate nel precisare l'unicità della medesima forma, non alterano alcuna delle proprietà ora indicate.

Quanto fin qui osservato suggerisce pure di classificare il subsistema $S_{(k)}$ come:

- *fornitore diretto* del subsistema $S_{(h)}$, se è $A^{kh} \geq [O]$;
- *fornitore indiretto* di $S_{(h)}$, se esiste una catena che connette almeno un'industria di $S_{(k)}$ con almeno una di $S_{(h)}$ mediante forniture ad altri subsistemi, cioè se esistono numeri

$$i_1, i_2, \dots, i_{z-1}, i_z$$

tali per cui risulta

$$A^{k,i_1} \geq [\,0\,],\ A^{i_1,i_2} \geq [\,0\,],\ \ldots,\ A^{i_{z-1},i_z} \geq [\,0\,],\ A^{i_z,h} \geq [\,0\,];$$

- *fornitore di* $S_{(h)}$, se è suo fornitore diretto e/o indiretto; in tale caso scriviamo $S_{(k)} \longrightarrow S_{(h)}$ e diciamo che $S_{(h)}$ è *cliente* di $S_{(k)}$;
- *finale*, se non fornisce inputs ad altri subsistemi;
- *intermedio*, se non è finale, cioè se è fornitore di qualche altro subsistema.

Si noti poi che la relazione "è fornitore di" è transitiva; si ha cioè

$$S_{(i)} \longrightarrow S_{(h)};\quad S_{(h)} \longrightarrow S_{(j)} \text{ implica che } S_{(i)} \longrightarrow S_{(j)}.$$

Diremo poi che il bene i è *necessario* al bene j, cioè ne è input diretto e/o indiretto, se e solo se il subsistema che comprende il bene i, coincide con quello che comprende il bene j, oppure ne è fornitore. Di conseguenza, A è connessa se e solo se, comunque scelti due sistemi $S_{(i)}$ e $S_{(j)}$, si ha $S_{(i)} \longrightarrow S_{(j)}$, cioè $S_{(i)}$ è fornitore di $S_{(j)}$.

Osservazione 3. Un altro vantaggio associato all'adozione della forma normale (120) della matrice degli inputs A, riguarda la possibilità di individuare l'esistenza, nel sistema produttivo in esame, di eventuali beni base, tali essendo quelli che entrano, direttamente e/o indirettamente, nella produzione di tutti i beni prodotti nel sistema.

In questo senso, e tenendo presente il significato degli interi g e s che compaiono nella forma normale (120) di A, si può affermare che:

a) Ogni bene è base se e solo se risulta $g = s = 1$, ovvero A è connessa (esiste un solo subsistema).

b) Nessun bene è base se e solo se risulta $g > 1$. Con $g = s > 1$ il sistema produttivo è separabile in g subsistemi isolati. Con $1 < g < s$ si può invece separare il sistema in due gruppi di subsistemi: il 1° comprende i primi g, tutti connessi, mentre il 2° comprende i successivi $(s - g)$, che risultano clienti di subsistemi del primo gruppo. In tale caso si potrebbe anche dire che il 1° dei due gruppi è base per ciascuno dei subsistemi del 2°. Inoltre, sempre con $1 < g < s$, la presenza di subsistemi intermedi è certa nel 1° gruppo ed eventuale (e solo se è $s > g+1$) nel 2°; quella di subsistemi finali è eventuale nel 1° gruppo e certa (per es. per l's-esimo) nel 2°.

c) Solo alcuni beni sono base se e solo se risulta $1 = g < s$, nel qual caso i beni base sono prodotti nel 1° subsistema, il quale è connesso e intermedio, mentre tra i successivi $(s-1)$ ne esistono certamente di finali (per es. l's-esimo) e la presenza di intermedi è eventuale e subordinata alla condizione $s > 2$.

<u>Osservazione 4</u>. Ciascuno dei tre modelli di produzione semplice presentati da Sraffa differisce dal modello (15)-(17) del § 2 e dalle sue varianti del § 3, almeno perchè l'Autore:

a) Non adotta l'ipotesi (4), pur assumendo che le produzioni lorde siano tutte positive.

b) Non sfrutta esplicitamente la possibilità di riordinare le industrie in modo tale che, come nella nostra ipotesi viii) del § 1, la matrice A (oppure $\bar{A} = A + c\,\ell$) sia, se decomponibile, nella sua forma normale (120).

c)Adotta, nel definire gli elementi di A (e di $\bar{A}$) convenzioni diverse dalle nostre, nel senso che a_{ij} denota in Sraffa la quantità della merce j assorbita nella produzione della merce i. Sraffa usa anzi, al riguardo, una notazione singolare, poco pratica ed adottata, purtroppo, da parecchi economisti, e cioè: $k, p_a, p_b, \ldots, p_k, A, B, \ldots, K, I_j$ in luogo di $n, p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1 = 1, \ldots, q_n = 1, \bar{a}_{ij} = a_{ij} + c_i\,\ell_j$.

In proposito, notiamo subito che le diverse convenzioni di Sraffa precisate sub a), b), c), generano varianti del modello (15)-(17) che si possono considerare non rilevanti, in virtù di quanto già precisato nel § 1. Circa il primo ed il secondo modello di Sraffa, denotati rispettivamente "di produzione per sussistenza" e "di produzione con sovrappiù interamente destinato ai profitti", non corrispondono esattamente ai modelli di "produzione per sussistenza" e di "produzione con sovrappiù", compresi, rispettivamente per $c = y$ e per $c \leq y$, nel modello a salari fissi anticipati del § 3. Tale differenza dipende dal fatto che in essi l'Autore, a parte le varianti già sopra indicate, procede come segue:

1) Definisce gli inputs di merci al lordo delle sussistenze descritte dal vettore c e già definite nel § 3; in altre parole, utilizza, in luogo della matrice A, la matrice aumentata dei coefficienti $\bar{A} = A + c\,\ell = [a_{ij} + c_i\,\ell_j]$, anch'essa già utilizzata nel §3.

2) Suppone che il sistema sia in "stato reintegrativo", nel senso che risulti $u \geqq \bar{A}\, u$, ovvero, il che è lo stesso, che risulti non negativo il vettore del sovrappiù $s = y - c$. Nel 1° modello ("produzione per sussistenza") è $c = y$, cioè $s = [0]$; nel 2° modello ("produzione con sovrappiù") è $c \leq y$, cioè $s \geq [0]$.

3) Adotta la normalizzazione dei prezzi descritta dalla (9) e (11) nel 1° modello, nulla precisando a proposito del 2°.

4) Precisa che solo nel 2° modello, cioè con $s \geq [0]$, $\bar{A}$ può essere decomponibile, nel qual caso però l'Autore assume che esista almeno un bene base.

5) Non precisa se risulta $\lambda^{+}_{A} < 1$ o ipotesi equivalenti, anche se nei semplici esempi numerici illustrativi prescelti dall'Autore, la connessione di $\bar{A}$ garantisce che sia $\lambda^{+}_{A} < 1$. Difatti dall'ipotesi che $\bar{A}$ sia in stato reintegrativo, scende $\lambda^{+}_{\bar{A}} \leqq 1$, grazie alle stesse considerazione che, svolte per A, hanno condotto alla (23). Inoltre, dalla definizione di $\bar{A}$, risulta poi per la (2) e (72), $\bar{A} \geq A$. Grazie al risultato del punto d) del §6.4, la connessione di A implica subito $\lambda^{+}_{A} < 1$.

In proposito conviene osservare che:

a) La convenzione di cui al punto 1), anche se didatticamente opportuna, appare economicamente restrittiva, almeno perchè essa preclude una corretta definizione di bene base, definizione che prende in esame la struttura della sola matrice A.

b) L'ipotesi del punto 2) equivale alla (72), ovvero alla non negatività del vettore del sovrappiù $s = y - c$.

c) La convenzione di normalizzazione dei prezzi indicata (evidentemente da collegarsi alla derivazione neo-ricardiana del modello), qualora estesa al 2° modello, conduce ai rischi già segnalati nel § 2.

d) Il fatto che nel 1° modello si escluda la decomponibilità di $\bar{A}$, va inteso nel senso che l'esistenza di soluzioni del predetto modello, garantisce che A è connessa, proprietà che invece non viene assunta, neppure implicitamente. Inoltre se $\bar{A}$ è decomponibile, le sole ipotesi precisate da Sraffa per il 2° modello ("produzione con sovrappiù"), non garantiscono l'esistenza di soluzioni del medesimo. In proposito basta osservare che con

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \; c = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \ell = [0,5;\ 0,5]$$

la matrice

$$\bar{A} = [A + c\,\ell] = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è non connessa ed il modello

$$\begin{cases} (1+r)\,p\,\bar{A} = p \\ p > [0],\ r > 0,\ p\,y = 1\ , \end{cases}$$

corrispondente al 2° modello di Sraffa e che può essere visto come un modello a salari impliciti, non ha soluzione.

Osserviamo poi, anche se può sembrare banale, che la connessione di $\bar{A}$ è garantita, oltre che dalla connessione di A, anche dall'ipotesi $c > [0]$. E' anche appena il caso di ribadire che le soluzioni con $w = 0$ del sistema (15)-(17) non vanno confuse con le soluzioni (p, r) del modello a salari impliciti, poichè in esso la variabile w non compare esplicitamente.

<u>Osservazione 5</u>. L'uso della forma normale (120) si è rivelato utile per l'analisi, sia del sistema dei valori (15)-(17), sia del sistema relativo alla determinazione della merce tipo (98)-(100). Approccio analogo è presentato in altri lavori, segnatamente in [22], [61] e [63]. Nei lavori [22] e [63] la "forma normale" scelta non risponde però ai necessari requisiti di generalità, poichè in essa si ritrovano solo varianti restrittive della forma normale (120), e ciò, anche dopo avere tenuto conto delle evidenti difformità di notazione. Poichè trattasi di due lavori molto citati nell'ambito della letteratura concernente i modelli di Sraffa o à la Sraffa, riteniamo opportuno segnalare i seguenti punti:

a) in [22] si tollera che risulti

$$A_{kk} = [0], \text{ per un } k > 1, \tag{117}$$

pur essendo A_{kk} di ordine $n > 1$.

b) In [63] è garantito il rispetto della proprietà (121) della forma normale (120) semplicemente imponendo che (sempre nell'ipotesi (1)) risulti

$$A^{12} \neq [0], \quad A^{13} \neq [0], \quad \ldots, \quad A^{1s} \neq [0]. \tag{118}$$

c) In [63] si qualifica ragionevole che esista un intero j, con $2 \leq j < s$, tale per cui sia

$$A^{j,j+1} = [0], \quad A^{j,j+2} = [0], \quad \ldots, \quad A^{js} = [0].$$

d) In [63] il caso in cui risulta

(119) $$A^{kk} u = u, \text{ per un } k = 2,3,\ldots, s$$

viene escluso come economicamente inaccettabile ed implicitamente respinto da Sraffa.

I punti a) -d) meritano qualche commento.

Tollerando la (117) viene meno la possibilità di sfruttare la forma normale della matrice degli inputs A per individuare quelle proprietà evidenziate nelle Osservazioni 2 e 3 del presente paragrafo.

I limiti di generalità, dal punto di vista economico, dell'ipotesi (118), si evidenziano notando che essa impone rapporti di dipendenza (cioè di fornitura) *diretta* di ciascuno dei sottosistemi di beni non base, dal sottosistema che produce beni base.

L'accettabilità, dal punto di vista economico, dell'ipotesi sub c) è discutibile. Essa equivale alla possibilità di ordinare i sottosistemi non base in modo tale che alcuni di essi (oltre all'ultimo, si intende) non ceda mezzi di produzione a sottosistemi che si trovano "a valle".

L'eventuale inaccettabilità, dal punto di vista economico, della (119) non può essere sostenuta, semplicemente sfruttando le affermazioni di Sraffa a proposito dell'esistenza delle merci non base, poichè tali afferamzioni risultano, a nostro avviso, non rigorose.

§ 6. NOTAZIONI E TEOREMI ADOTTATI.

Per comodità del lettore, in questo paragrafo precisiamo alcune delle notazioni adottate e i principali strumenti matematici utilizzati nel presente lavoro. Per l'approfondimento di questi ultimi si rinvia ai riferimenti bibliografici [12, 16, 17, 18, 21, 28, 32, 34, 35, 36, 37, 44, 45, 54, 55, 56, 60, 62].

6.1) *Notazioni usate.*

Fissato l'intero $n > 1$ e considerato l'insieme

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} ,$$

costruiamo la matrice quadrata $A = [a_{ij}]$, $i, j \in N$ e la corrispondente matrice nulla $[0]$, cioè ad elementi tutti nulli. Ciò premesso, diciamo:

A *positiva*, cioè $A > [0]$, se $i, j \in N \Rightarrow a_{ij} > 0$;

A *non negativa*, cioè $A \geqq [0]$, se $i, j \in N \Rightarrow a_{ij} \geqq 0$;

A *semipositiva*, cioè $A \geq [0]$, se $A \geqq [0]$, $A \neq [0]$;

A *connessa (indecomponibile, irriducibile)* se non esiste una partizione $\{N'; N''\}$ di N tale che sia

$$\{i \in N', j \in N''\} \Rightarrow a_{ij} = 0;$$

A *non connessa (decomponibile, riducibile)* se tale partizione esiste;

A *invertibile*, se esiste la sua inversa A^{-1} soluzione di $A A^{-1} = A^{-1} A = I$, con I matrice identica.

In modo analogo si estendono le relazioni $>$, $\geqq$, $\geq$, al caso di matrici non quadrate e in modo analogo si confrontano vettori (riga o colonna); pure evidenti sono le relazioni $<$, $\leqq$, $\leq$.

Poniamo poi

A^j per indicare la j-esima colonna di A;

A_i per indicare la i-esima riga di A;

u per indicare il vettore (riga o colonna) a componenti tutte unitarie;

$|A|$ per indicare il determinante di A.

I prodotti tra matrici o vettori sono definiti secondo la convenzione usuale (riga per colonna); l'apice viene usato per trasporre matrici e vettori.

6.2) *Forma normale di Gantmacher di una matrice quadrata.*

Data una matrice quadrata B di ordine n ($n > 1$), diremo *forma normale (di Gantmacher) di B* una matrice (cfr. [21])

$$
(120)\qquad PBP' = \begin{bmatrix}
A^{11} & [0] & \dots & [0] & A^{1,g+1} & A^{1,g+2} & \dots & A^{1s} \\
[0] & A^{22} & \dots & [0] & A^{2,g+1} & A^{2,g+2} & \dots & A^{2s} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[0] & [0] & \dots & A^{gg} & A^{g,g+1} & A^{g,g+2} & \dots & A^{gs} \\
[0] & [0] & \dots & [0] & A^{g+1,g+1} & \dots & \dots & A^{g+1,s} \\
[0] & [0] & \dots & [0] & [0] & A^{g+2,g+2} & \dots & A^{g+2,s} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[0] & [0] & \dots & [0] & [0] & [0] & [0] \;\dots & A^{ss}
\end{bmatrix}
$$

nella quale:

(I) P è una opportuna matrice di permutazione, ottenuta cioè permutando convenientemente le righe di I;

(II) ognuno dei blocchi $A^{11}, \dots, A^{ss}$ è matrice quadrata connessa, oppure consiste di un solo elemento (eventualmente nullo);

(III) la notazione $[0]$ sta per matrice nulla, quadrata o non.

(IV) nella (120) si intende compreso il caso $g = s > 1$, cioè di matrice in forma diagonale a blocchi

$$PBP' = \begin{bmatrix} A^{11} & [0] & \dots & [0] \\ [0] & A^{22} & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & A^{gg} \end{bmatrix},$$

ed il caso $g = s = 1$ in cui B è connessa ($PBP' = IBI' = B = A^{11}$);

(V) con $g < s$, ciascuna delle matrici

$$(121)\quad A^{(g+1)} = \begin{bmatrix} A^{1,g+1} \\ A^{2,g+1} \\ \vdots \\ A^{g,g+1} \end{bmatrix}, \quad A^{(g+2)} = \begin{bmatrix} A^{1,g+2} \\ A^{2,g+2} \\ \vdots \\ A^{g+1,g+2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^{(s)} = \begin{bmatrix} A^{1s} \\ A^{2s} \\ \vdots \\ A^{s-1,s} \end{bmatrix}$$

è non nulla.

La forma normale (120) gode, tra le altre, delle seguenti proprietà:

(VI) Essa esiste ed è unica, qualora si considerino irrilevanti le possibilità di:

- permutare tra di loro i blocchi $A^{11}, \dots, A^{gg}$ e (possibilità eventuale) i successivi blocchi $A^{g+1,g+1}, \dots, A^{ss}$;

- permutare nello stesso modo le righe e le colonne associate ad uno o più dei blocchi $A^{11}, \dots, A^{ss}$.

(VII) Risulta

$$|PBP' - \lambda I| = |A - \lambda I| = |A^{11} - \lambda I| \cdot |A^{22} - \lambda I| \cdot \dots \cdot |A^{ss} - \lambda I|,$$

sicché λ è autovalore di A se e solo se lo è di almeno uno dei blocchi $A^{11}, \ldots, A^{ss}$.

Notiamo infine che si può fare riferimento anche ad una forma normale di Gantmacher che sia, per così dire, la trasposta della (120), corrispondente cioè allo schema

$$
(122) \quad QBQ' = \begin{bmatrix}
A_{11} & [0] & \ldots\ldots & [0] & [0] & [0] & \ldots\ldots & [0] & \ldots\ldots & [0] \\
[0] & A_{22} & \ldots\ldots & [0] & [0] & [0] & \ldots\ldots & [0] & \ldots\ldots & [0] \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
[0] & [0] & \ldots\ldots & A_{gg} & [0] & [0] & \ldots\ldots & [0] & \ldots & [0] \\
A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \ldots & A_{g+1,g} & A_{g+1,g+1} & [0] & \ldots\ldots & & & [0] \\
A_{g+2,1} & A_{g+2,2} & \ldots & A_{g+2,g} & A_{g+2,g+1} & A_{g+2,g+2} & \ldots & & & [0] \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{s1} & A_{s2} & \ldots\ldots & A_{sg} & A_{s,g+1} & A_{s,g+2} & \ldots\ldots & & & A_{ss}
\end{bmatrix},
$$

nel quale: Q denota un'opportuna matrice di permutazione, la coppia (g, s) può differire dall'analoga coppia associata alla (120), e sono verificate convenzioni e proprietà analoghe a quelle precisate per la forma (120). Salvo un cenno alla forma (122) nel § 4, la forma adottata nel presente saggio è la (120), il rinvio risultando comunque precisato anche dalla notazione di volta in volta adottata.

6.3) *Teorema di Perron e Frobenius.*

Qui di seguito riportiamo il cosiddetto teorema di Perron e Frobenius in una sua versione "forte" (cioè per matrici connesse), riferita, per nostra comodità, alla ricerca di autovettori riga : tale scelta (che non è la più usuale) è suggerita dalla convenzione (à la Leontief) adottata per l'analisi del modello di Sraffa.

Tra gli autovalori di una matrice quadrata e connessa $A \geq [0]$ di ordine $n > 1$, ne esiste uno, che denoteremo con

$$\lambda^+ = \lambda_A^+ = \mathrm{dom}(A),$$

dotato delle seguenti proprietà:

1) $\lambda^+ > 0$;

2) λ^+ è autovalore semplice di A, cioè radice semplice dell'equazione caratteristica di A;

3) λ^+ è l'autovalore dominante di A, nel senso che è l'autovalore di A di modulo massimo;

4) esiste un vettore p^+ tale che l'insieme delle soluzioni (λ, p) del sistema

$$\begin{cases} pA = \lambda p \\ p > [0], \lambda > 0 \end{cases}$$

è tutto descritto dalle coppie

$$(\lambda, p) = (\lambda^+, \alpha p^+),$$

con $\alpha > 0$ e arbitrario;

posto

$$m = \underset{i \in N}{\mathrm{Min}} \{A_i u\}, \quad M = \underset{i \in N}{\mathrm{Max}} \{A_i u\},$$

oppure

$$m = \underset{i \in N}{\mathrm{Min}} \{u A^i\}, \quad M = \underset{i \in N}{\mathrm{Max}} \{u A^i\},$$

risulta ("corollario di Brauer-Solow")

$$\begin{array}{l} m = \lambda^+ = M, \text{ se } m = M \\ m < \lambda^+ < M, \text{ se } m < M. \end{array} \tag{123}$$

Per nostra comodità:

- estendiamo il teorema anche al caso $n = 1$, $A > 0$, ponendo allora $\lambda^+_A = A$, $p^+ = 1$;

- denotiamo con $\lambda^+ = \lambda^+_A = \text{dom}(A)$ l'autovalore dominante, cioè di modulo massimo, di una matrice quadrata $A \geqq [0]$, connessa o non, di ordine $n \geqq 1$;

- osserviamo che, per la proprietà (vii) della forma normale di Gantmacher, risulta $\lambda^+ \geqq 0$;

- osserviamo che con $\mu > 0$ risulta $\lambda^+_{\mu A} = \mu\lambda^+_A$.

6.4) *Matrici di classe Z e K.*

Nell'ambito delle matrice quadrate $Z = [z_{ij}]$, di ordine $n > 1$, individuiamo la sottoclasse Z delle Z-matrici o matrici di classe Z, come segue

$$[z_{ij}] \in Z \Leftrightarrow \{i \neq j \Rightarrow z_{ij} \leqq 0\} .$$

Esistono diversi collegamenti tra tali matrici, il teorema di Perron-Frobenius, le matrici a diagonale quasi dominante e i risultati sulla stabilità (nelle ipotesi di Metzler) della matrice di sostituzione di equilibrii walrasiani. Tali collegamenti si possono cogliere mediante il seguente teorema sulle K-matrici o matrici di classe K: quelle Z-matrici cioè, che verificano una qualunque delle proposizioni del seguente teorema.

<u>Teorema</u>. Sia Z una Z-matrice di ordine n; allora le seguenti proposizioni si equivalgono:

(1) Esiste un vettore $p \geqq [0]$ soluzione di $p\,Z > [0]$.

(2) Esiste un vettore $p > [0]$ soluzione di $p\,Z > [0]$.

(3) Esistono vettori $b > [0]$ e $p \geqq [0]$ tali per cui risulta $p\,Z = b$.

(4) Comunque scelto $b \geqq [0]$, esiste un vettore $p \geqq [0]$ soluzione di $p\ Z = b$.

(5) Sono positivi tutti i minori principali di Z.

(6) Sono positivi tutti gli n minori principali di nord-ovest di Z, cioè i determinanti delle matrici $[z_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, k$; $k \in N$. E' questa la nota *condizione di Hawkins-Simon.*

(7) Z^{-1} esiste ed ha linee tutte semipositive.

(8) Z ammette la seguente rappresentazione:

$$Z = [\lambda I - B], \text{ con } B \geqq [0], \ \lambda > \lambda_B^+.$$

(9) Z ha diagonale positiva quasi-dominante nel senso di Mc Kenzie (cfr. [37] e, per possibili ridefinizioni ed estensioni, [32]).

(10) La parte reale di ogni autovalore di Z è positiva.

(11) Gode di una delle precedenti proprietà: Z', oppure P Z P', con P matrice di permutazione, oppure D Z E, con D ed E matrici diagonali con diagonale positiva, oppure ciascuna delle matrici $A^{11}, \dots, A^{ss}$ della forma normale (120) di A, oppure ciascuna delle matrici $A_{11}, \dots, A_{ss}$ dell'analoga forma (122).

Su tale teorema sono utili le seguenti osservazioni:

a) Se Z è K-matrice, allora Z ammette la rappresentazione di cui al punto (8) del precedente teorema e la sua inversa ammette lo sviluppo in serie ("serie di C. Neumann"):

$$(124) \qquad Z^{-1} = [\lambda I - B]^{-1} = (1/\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} (B)^k,$$

nel quale $(B)^k$ denota la k-esima potenza di B, con $(B)^0 = I$.

b) Nella rappresentazione di cui al punto (8), Z è connessa se e solo se lo è B. Il caso di una Z-matrice connessa consente di riformulare alcune caratterizzazioni delle K-matrici in forma indebolita. Ad es. le proposizioni (1), (2), (3) si possono riformulare come segue:

(1') Esiste un vettore $p \geqq [0]$ soluzione di $p\,Z \geq [0]$.

(2') Esiste un vettore $p > [0]$ soluzione di $p\,Z \geq [0]$.

(3') Esistono vettori $b \geq [0]$ e $p \geqq [0]$ tali per cui risulta $p\,Z = b$.

Anzi, se esiste un vettore $p \geqq [0]$ soluzione di uno dei sistemi indicati in (1'), (2'), (3'), la connessione di Z garantisce pure la stretta positività di tale vettore. Tale risultato si prova notando anzitutto che tali sistemi ammetteranno soluzione $p \geq [0]$, poichè se fosse $p = [0]$ si avrebbe $p\,Z = [0]$. Indi si sfrutta il seguente risultato:

Sia Z una Z-matrice connessa e p il vettore (riga) soluzione del sistema

$$\begin{cases} p\,Z \geqq [0] \\ p \geq [0] \end{cases}$$

oppure del sistema

$$\begin{cases} p\,Z = c, \text{ con } c \geqq [0] \\ p \geq [0] \,. \end{cases}$$

Allora è senz'altro $p > [0]$.

Dimostriamo tale asserto. Ammettiamo per assurdo che i suddetti sistemi ammettano soluzione $p \geq [0]$, $p \not> [0]$ e poniamo

$$N_o = \{j \mid p_j = 0\} \ ; \ N_+ = \{ j \mid p_j > 0 \}; \ N = N_o \cup N_+ .$$

Risulta allora $N_o \neq \emptyset$ e sarà verificata la seguente implicazione:

$$j \in N_o \Rightarrow 0 \leq p\, z^j = p_j\, z_{jj} + \sum_{\substack{i \in N_o \\ (i \neq j)}} p_i\, z_{ij} + \sum_{i \in N_+} p_i\, z_{ij} =$$

$$= \sum_{i \in N_+} p_i\, z_{ij} .$$

Poichè Z è Z-matrice, l'ultima sommatoria scritta non può che essere nulla, cioè si ha:

$$i \in N_+ ,\ j \in N_o \ \Rightarrow z_{ij} = 0,$$

contro l'assunta indecomponibilità della matrice Z.

Inoltre la connessione della Z-matrice Z consente di riscrivere la caratterizzazione (7) nella seguente

(7') Z^{-1} esiste ed è $Z^{-1} > [0]$.

Per quanto concerne la positività di Z^{-1} si osservi che se la Z-matrice connessa Z è K-matrice, allora possiamo riscrivere la relazione

$$p\, Z = c, \quad c \geq [0]$$

nella forma $p = c\, Z^{-1}$, e ponendo $c = u^i$ (u^i essendo l'i-esimo vettore base di R^n), si ha $p = u^i\ Z^{-1} = (Z^{-1})_i$, i-esima riga di Z^{-1}. Dunque, per le osservazioni precedenti l'inversa di Z è positiva.

c) E' possibile estendere il teorema al caso n = 1, considerando in tal caso Z-matrice ogni numero reale e K-matrice ogni numero positivo.

d) Sia $B \geq A \geq [0]$. Allora è $\lambda_B^+ \geqq \lambda_A^+$. Se poi A oppure B è connessa, allora è pure $\lambda_B^+ > \lambda_A^+$ (cfr. [44, 45]).

Tale proprietà è nota soprattutto nell'ipotesi, più forte, che A sia connessa. Per il caso più generale di B connessa, si veda [44, 45] oppure si proceda come segue. Con $\lambda_A^+ > \lambda_B^+$, la Z-matrice $(\lambda_A^+ I - B)$ è matrice di classe K, grazie alla proprietà (8). Dunque, esiste, per la proprietà (2), un vettore $p > [0]$ soluzione di $p(\lambda_A^+ I - B) > [0]$, cioè di $p(\lambda_A^+ I - A) > p(B - A)$, e perciò, per le ipotesi fatte su A e B, soluzione di $p(\lambda_A^+ I - A) > [0]$. Per la proposizione (2) ciò basta a qualificare $(\lambda_A^+ I - A)$ come K-matrice, cioè, grazie alla caratterizzazione (8), per avere $\lambda_A^+ > \lambda_A^+$, il che è assurdo, sicchè è certo $\lambda_B^+ \geqq \lambda_A^+$.

Sia ora B connessa, eventualmente grazie alla connessione di A. Allora, per il teorema di Frobenius, esiste un vettore $p > [0]$ soluzione di $p(\lambda_B^+ I - B) = [0]$. Sia $C = (1/2)(A + B)$; quindi è $B \geq C \geq A$. Premoltiplichiamo per $p > [0]$ entrambi i membri di $B \geq C$ (p essendo autovettore associato a λ_B^+); otteniamo

$$p\,B = \lambda_B^+ p \geq p\,C$$

e cioè

$$p(\lambda_B^+ I - C) \geq [0], \text{ con } p > [0].$$

Essendo C connessa, $(\lambda_B^+ I - C)$ è K-matrice, grazie alla proposizione (2'), e sarà dunque $\lambda_B^+ > \lambda_C^+$. Essendo poi $C \geq A$ si ha pure, per la prima parte della presente osservazione, $\lambda_C^+ \geqq \lambda_A^+$, sicchè risulta $\lambda_B^+ > \lambda_A^+$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AA.VV., *Paradoxes in Capital Theory: A Symposium*, Quarterly Journal of Economics, Vol. 80, 1966, 503-583.

[2] ABRAHAM-FROIS G., BERREBI E., *Théorie de la valeur, des prix er de l'accumulation*, Economica, Paris, 1976.

[3] ARROW K. J., KARLIN S., SUPPES P. (Eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1960.

[4] BHARADWAJ K. R., *Value through Exogenous Distribution*, Economic Weekly (Bombay), 24 Agosto 1963, 1450-1454; tradotto in italiano in [31].

[5] BHARADWAJ K. R., *On the Maximum Number of Switches between two Production Systems*, Schweitzerische Zeitschrift fuer Volkswirtschaft und Statistik, Dicembre 1970, 409-428; tradotto in italiano in [31].

[6] BLAKLEY G. R., GOSSLING W. F., *The Existence, Uniqueness and Stability of the Standard System*, Review of Economic Studies, Vol. 34, 1967, 427-431.

[7] BOTTA F. (a cura di), *Il dibattito su Sraffa*, De Donato Editore, Bari, 1974.

[8] BRUNO M., BURMEISTER E., SHESHINSKI E., *The Nature and Implications of the Reswitching of Techniques*, in [1] , 526-553.

[9] BURMEISTER E., *On a Theorem of Sraffa*, Economica, Vol.35, 1968, 83-87.

[10] BURMEISTER E., DOBELL R., *Mathematical Theories of Economic Growth*, Macmillan Publishing Co., New York, 1970; traduzione italiana: Teorie matematiche dello sviluppo economico, Etas Libri spa, Milano, 1975.

[11] CASTELLANI G., MAZZOLENI P. (Eds.), *Mathematical Programming and its Economic Applications*, F. Angeli, Milano, 1981.

[12] DEBREU G., HERSTEIN I. N., *Nonnegative Square Matrices*, Econometrica, Vol. 21, 1953, 597-607.

[13] EGIDI M., *Equilibrio e stabilità sotto l'effetto della concorrenza negli schemi di Piero Sraffa*, Relazione presentata al convegno G.N.A.F.A. del 24/26 Settembre 1973, Pisa.

[14] EGIDI M., *Stabilità ed instabilità negli schemi sraffiani*, Economia Internazionale, Vol. 28, 1975, 3-41.

[15] EGIDI M., *The Conditions for the Reswithching of Techniques*, Economia Internazionale, Vol. 30, 1977, 434-449.

[16] FIEDLER M., PTAK V., *On Matrices with Non-positive Off-diagonal Elements and Positive Principal Minors*, Czechoslovak Math. J., Vol. 12, 1962, 123-128.

[17] FIEDLER M., PTAK V., *Some Results on Matrices of Class K and their Application to the Convergence Rate of the Iteration Procedures*, Czechoslovak Math. J., Vol. 16, 1966, 260-273.

[18] FIEDLER M., PTAK V., *Some Generalizations of Positive Definiteness and Monotonicity*, Numerische Mathematik, Vol. 9, 1966, 163-172.

[19] FUKUOKA M., KAMIYA D., *Some Aspects of Piero Sraffa's Model of Production*, ciclostilato, Cambridge (U.K.), giugno 1973.

[20] GALE D., *The Theory of Linear Economic Models*, Mc Graw-Hill, New York, 1960.

[21] GANTMACHER F. R., *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience, New York, 1959.

[22] GAREGNANI P., *Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution*, Review of Economic Studies, Vol. 37, 1970, 407-436; tradotto con aggiunta di appendice matematica in [58] .

[23] GIANNINI C., *Modelli lineari e teoria della distribuzione*, ISEDI, Milano, 1976.

[24] GIORGI G., *Alcuni aspetti matematici del modello di Sraffa*, Dissertazione di laurea, Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Univ. di Pavia, 1974.

[25] GIORGI G., MAGNANI U., *Problemi aperti nella teoria dei modelli multisettoriali di produzione congiunta*, Rivista Int. di Scienze Sociali, Vol. 86, 1978, 435-468; ristampato in: P. VARRI (a cura di), *I prodotti congiunti*, Vita e Pensiero, Milano, 1982.

[26] GIORGI G., MAGNANI U., *On two Approaches to Linear Economic Equilibria*, in [11] , 517-524.

[27] HARCOURT G.C., *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1972; traduzione italiana: *La teoria del capitale: una conroversia tra le due Cambridge*, ISEDI, Milano, 1973.

[28] KOEHLER G., WHINSTON A., WRIGHT G., *Optimization over Leontief Substitution Systems*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[29] LIPPI M. *I prezzi di produzione*, Il Mulino, Bologna, 1979.

[30] LUNGHINI G. (a cura di), *Valori, prezzi e equilibrio generale*, Il Mulino, Bologna, 1971.

[31] LUNGHINI G. (a cura di), *Produzione, capitale e distribuzione*, ISEDI, Milano, 1975.

[32] MAGNANI U., *Sulle matrici a diagonale quasi dominante di Hadamard-Mc Kenzie-Lancaster*, Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Univ. di Pavia, N. 49, 1973.

[33] MAGNANI U., *Distribuzione e prezzi nel modello di P. Sraffa*, Facoltà di Economia e Commercio, Univ. di Pavia, Serie Relazioni, N. 6, 1974.

[34] MAGNANI U., *Matematica per l'economia*, GJES, Pavia, 1978.

[35] MAGNANI U., MERIGGI M. R., *Characterizations of K matrices*, in [11] , 536-547.

[36] MANARA C.F., NICOLA P.C., *Elementi di economia matematica*, Editrice Viscontea, Milano, 1967, 1970.

[37] MC KENZIE L. W., *Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory*, in [3], 47-62.

[38] MEEK R. L., *Mr Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics*, Scottish J. of Political Economy, giugno 1961, 119-136; tradotto in [7], [30] .

[39] MELDOLESI L., *La derivazione ricardiana di "Produzione di merci a mezzo di merci"*, Economia Internazionale, Vol. 19, 1966, 612-635; ristampato in [7] .

[40] MORISHIMA M., *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[41] NAPOLEONI C., *L'equilibrio economico generale. Uno studio introduttivo*, Boringhieri, Torino, 1965.

[42] NEWMAN P., *Production of Commodities by means of Commodities*, Schweitzerische Zeitschrift fuer Volkswirtschaft und Statistik, marzo 1962, 58-75; tradotto in [7] , [31] .

[43] NICOLA P. C., *Lezioni di dinamica economica*, Il Mulino, Bologna, 1976.

[44] NIKAIDO H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York, 1968.

[45] NIKAIDO H., *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North Holland, Amsterdam, 1972.

[46] PASINETTI L. L., *Lezioni di teoria della produzione*, Il Mulino, Bologna, 1975.

[47] PASINETTI L. L. (a cura di), *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, Il Mulino, Bologna, 1977.

[48] POOLE G., BOULLION T., *A Survey of M-matrices*, SIAM Review, Vol. 16, 1974, 419-426.

[49] QUADRIO CURZIO A., *Rendita e distribuzione in un modello economico plurisettoriale*, Giuffrè, Milano, 1967.

[50] RODANO G., *Considerazioni sul sistema dei prezzi di produzione I. Una ripresa critica della soluzione di Piero Sraffa*, Quaderni della Rivista Trimestrale, N. 33-34, 1972, 70-105.

[51] RODANO G., *La teoria dei prezzi da Marx a Sraffa*, Cooperativa Editrice Economia e Commercio, Napoli, 1976.

[52] RONCAGLIA A., *Sraffa e la teoria dei prezzi*, Laterza, Bari, 1975.

[53] SCHEFOLD B., *Mr Sraffa on Joint Production*, ciclostilato, s. d., Faculty of Economics, Cambridge (U. K.).

[54] SCHWARTZ J. T., *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, Gordon & Breach, New York, 1961.

[55] SENETA E., *Nonnegative Matrices. An Introduction to the Theory and Applications*, G. Allen & Unwin, London, 1973.

[56] SOLOW R., *On the Structure of Linear Models*, Econometrica, Vol. 20, 1952, 29-46.

[57] SRAFFA P., *Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960. Traduzione italiana: *Produzione di merci a mezzo di merci. Premesse a una critica della teoria economica*, Einaudi, Torino, 1960, 1969, 1972.

[58] SYLOS LABINI P. (a cura di), *Prezzi relativi e distribuzione del reddito*, Boringhieri, Torino, 1973.

[59] TUCCI M., *A Mathematical Formalization of a Sraffa Model*, Metroeconomica, Vol. 28, 1976, 16-24.

[60] VARGA R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[61] VARRI P., *Basic and Non-basic Commodities in Mr Sraffa's Price System*, Metroeconomica, Vol. 31, 1979, 55-72.

[62] WOODS J. E., *Mathematical Economics*, Longman, London, 1978.

[63] ZAGHINI E., *On Non-basic Commodities*, Schweitzerische Zeitschrift fuer Volkswirtschaft und Statistik, gennaio 1967, 257-266.