Report n. 40

Un problema di programmazione quadratica nella costituzione di capitale

Riccardo Cambini

Pisa, luglio 1991

Un problema di Programmazione Quadratica nella costituzione di un capitale

R. Cambini

1. Introduzione

Il problema di costituire un capitale in T anni mediante versamento di un dato numero di rate , è stato considerato da vari autori in differenti contesti [2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] .
In particolare Manca [10] e successivamente Torrigiani [14] hanno considerato il seguente problema di costituzione di un capitale per inseguimento :

> si deve costituire entro T anni un capitale c mediante n versamenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da effettuarsi alle scadenze successive $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e che vengono capitalizzati ai tassi $i_1, i_2, \ldots, i_n$; in base a stime di disponibilità future si vuole che detti versamenti differiscano ciascuno quanto meno possibile dal precedente ed il primo versamento quanto meno possibile da una quantità prefissata x_0 .

Manca propone la seguente formulazione del problema :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = c \\ x_i \geq 0 \quad i=1,\ldots,n \end{cases}$$

dove $r_h=(1+i_h)^{T-t_h}$, $h=1,\ldots,n$, e suggerisce un metodo risolutivo basato sulla programmazione dinamica .
Torrigiani riconsidera il problema con una impostazione più generale , considerando il capitale c come un 'tetto' da non superare (ovvero il vincolo $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = c$ è sostituito con $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leq c$) e ne suggerisce una risoluzione a partire dalle condizioni di Kuhn-Tucker .

In questo lavoro viene analizzato il problema di programmazione quadratica nella formulazione data da Torrigiani . A differenza del suo approccio però , lo studio è stato condotto a partire dalla determinazione di alcune proprietà generali del problema deducibili dalla sua particolare struttura (par. 2) ; in particolare si dimostra la proprietà fondamentale che la soluzione ottima del problema ha componenti (rate) non crescenti .
Una tale proprietà permette di stabilire <u>a priori</u> (par. 3) che , salvo casi banali , la soluzione ottima ha un certo numero di componenti nulle (le ultime) ed aderisce al vincolo $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leq c$. Ciò comporta il fatto che la soluzione ottima del problema coincide con quella di uno tra i seguenti problemi :

$$P^n : \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad P^h : \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = c \\ x_i = 0 \quad i = h+1, \ldots, n \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, n-1$$

Di tali problemi viene determinata (par. 4) la soluzione ottima <u>esplicita</u> per mezzo del calcolo dell'inversa della matrice associata alla forma quadratica della funzione obbiettivo . I risultati ottenuti permettono di studiare l'ammissibilità di tali soluzioni rispetto al problema originario e ciò rende possibile individuare , <u>sempre a priori</u> , il problema P^h la cui soluzione ottima coincide con quella cercata (par. 5) e , di conseguenza , fornire la soluzione ottima esplicita del problema originario in funzione dei parametri c, x_0 ed r_i $i=1,\ldots,n$.
Vogliamo sottolineare infine che lo studio effettuato differisce da quello proposto in [14] non solo per il diverso approccio teorico , ma anche per il modo in cui viene determinata la soluzione ottima . Torrigiani infatti risolve un numero finito (non noto a priori) di problemi quadratici , l'ultimo dei quali fornisce la soluzione ottima cercata , mentre in questo lavoro si individua <u>direttamente</u> il problema P^h la cui soluzione ottima , che determineremo <u>esplicitamente</u> , coincide con quella del problema originario .

2. Proprietà generali del problema

Riprendiamo la formulazione del problema descritto nell'introduzione ,

$$P : \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leq c \\ x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,n \end{cases}$$

con $r_i > 0$, $i=1,\dots,n$, $c \geq 0$ ed $x_0 \geq 0$.

Esso si può riscrivere nella seguente forma compatta

$$P : \begin{cases} \min f(x) = x^T Q x - 2 x_0 e_1^T x + x_0^2 \\ r^T x \leq c \\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove $e_1 = [1,0,\dots,0]^T$, Q è una matrice simmetrica di ordine n definita nel seguente modo :

$$Q = (q_{ij}) \quad \text{con} \quad q_{ij} = \begin{cases} 0 & i<j-1 \ , \ i>j+1 \\ -1 & i=j-1 \ , \ i=j+1 \\ 2 & i=j \ , \ i \neq n \\ 1 & i=j \ , \ i=n \end{cases}$$

ed i parametri r , c ed x_0 possono essere considerati positivi a meno di casi banali (se difatti $x_0=0$ oppure $c=0$ il vettore nullo $[0,\dots,0]^T$ è banalmente soluzione ottima) .

Vale per il problema un'importante proprietà espressa nel seguente teorema :

<u>**Teorema 2.1**</u>

La funzione obbiettivo f(x) del problema P è strettamente convessa .

<u>**Dim**</u> Osserviamo che , essendo f(x) una funzione quadratica , essa risulterà strettamente convessa se e solo se la forma quadratica ad essa associata è definita positiva .

In questo caso la forma quadratica è $x^TQx=x_1^2+\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1})^2$ e risulta banalmente $x^TQx\geq 0 \ \forall\ x\in\Re^n$; inoltre $x^TQx=0$ se e solo se $x_1=0$ e $x_i=x_{i-1}$ $\forall i=2,\dots,n$ ovvero se e solo se x è il vettore nullo . La tesi è così dimostrata .

♦

Come immediata conseguenza del teorema precedente si ha che la matrice Q è invertibile e che il problema P ammette una unica soluzione ottima per ogni valore dei parametri r , c ed x_0 .

Vediamo adesso come la particolare struttura del problema permetta di stabilire una importante proprietà della soluzione ottima per mezzo della quale potremo caratterizzare quest'ultima rispetto al numero delle sue componenti non nulle :

Teorema 2.2

Sia $\bar{x}$ la soluzione ottima del problema P . Risulta :

$$x_0\geq \bar{x}_1\geq \bar{x}_2\geq\dots\geq \bar{x}_{j-1}\geq \bar{x}_j\geq\dots\geq \bar{x}_n\geq 0 \tag{2.1}$$

Dim Per uniformità di notazione denoteremo nella dimostrazione x_0 con $\bar{x}_0$. Per come è definito il problema P , tutte le componenti di $\bar{x}$ sono non negative.

Supponiamo ora per assurdo che $\exists\ j\in\{1,\dots,n\}$ tale che $\bar{x}_{j-1}<\bar{x}_j$ e costruiamo il seguente vettore $\bar{y}$: $\bar{y}_0=\bar{x}_0$; $\bar{y}_i=\min(\bar{x}_i,\bar{y}_{i-1})$ $i=1,\dots,n$.

Poiché risulta $0\leq \bar{y}_i\leq \bar{x}_i$, $i=1,\dots,n$, si ha che il vettore $\bar{y}$ è ammissibile per P in quanto , oltre ad essere non negativo , è tale che $r^T\bar{y}\leq r^T\bar{x}\leq c$.

Notiamo però che , essendo per ipotesi $\bar{x}_{j-1}<\bar{x}_j$, si ha $\bar{y}_{j-1}=\bar{y}_j$ e quindi:

$$\bar{y}\neq\bar{x} \quad \text{e} \quad 0=|\bar{y}_j-\bar{y}_{j-1}|<|\bar{x}_j-\bar{x}_{j-1}| \tag{2.2}$$

Dimostriamo adesso che $|\bar{y}_i-\bar{y}_{i-1}|\leq|\bar{x}_i-\bar{x}_{i-1}|$ $i=1,\dots,n$:

se $\bar{y}_i<\bar{x}_i$ allora $\bar{y}_i=\bar{y}_{i-1}$ e ciò implica $0=|\bar{y}_i-\bar{y}_{i-1}|\leq|\bar{x}_i-\bar{x}_{i-1}|$;

se invece $\overline{y}_i=\overline{x}_i$ allora $\overline{x}_i\leq\overline{y}_{i-1}\leq\overline{x}_{i-1}$ $\Rightarrow$ $0\leq(\overline{y}_{i-1}-\overline{x}_i)\leq(\overline{x}_{i-1}-\overline{x}_i)$ $\Rightarrow$ $0\leq(\overline{y}_{i-1}-\overline{y}_i)\leq(\overline{x}_{i-1}-\overline{x}_i)$ $\Rightarrow$ $0\leq|\overline{y}_i-\overline{y}_{i-1}|\leq|\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1}|$.

Poiché quindi $|\overline{y}_i-\overline{y}_{i-1}|\leq|\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1}|$ $\forall$ $i=1,\dots,n$ risulta, tenuto conto di (2.2), che $f(\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i-\overline{y}_{i-1})^2<f(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_i-\overline{x}_{i-1})^2$ il che è assurdo .

♦

__Osservazione 2.1__

In termini del problema della costituzione di un capitale, la (2.1) afferma che i versamenti da effettuare in modo che ciascuno differisca il meno possibile dal precedente sono non crescenti .

Come conseguenza immediata del teorema (2.2) abbiamo il seguente corollario:

__Corollario 2.1__

Sia $\overline{x}$ la soluzione ottima del problema P .

a) $\overline{x}$ ha n componenti non nulle se e solo se $\overline{x}_n\neq 0$.

b) $\overline{x}$ ha h componenti non nulle , $1\leq h<n$, se e solo se $\overline{x}_h\neq 0$ e $\overline{x}_{h+1}=0$.

__Dim__ segue direttamente dalla (2.1) . ♦

3. Caratterizzazione della soluzione ottima

Denotiamo con $e=[1,\dots,1]^T$ il vettore avente tutte le componenti uguali ad 1 e con $\bar{x}^0=x_0e$ la soluzione ottima del problema "libero" P^0 : $\min f(x)$, $x\in\Re^n$; ovviamente $\bar{x}^0$ è soluzione ottima del problema P se e solo se $\bar{x}^0$ è ammissibile per P .

Poiché la funzione obbiettivo f(x) è strettamente convessa oltre che definita e continua su un insieme compatto , se il punto di minimo libero non appartiene alla regione ammissibile del problema P , allora la soluzione ottima di P dovrà necessariamente aderire ad alcuni vincoli .

Allo scopo di individuare tali vincoli introduciamo i seguenti problemi ausiliari:

$$P^n : \begin{cases} \min f(x) \\ r^Tx=c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad P^h : \begin{cases} \min f(x) \\ r^Tx=c \\ x_i=0 \quad i=h+1,\dots,n \end{cases} \qquad h=1,\dots,n-1$$

le cui soluzioni ottime saranno indicate rispettivamente con $\bar{x}^n$ ed $\bar{x}^h$, $h=1,\dots,n-1$.

L'importanza dei problemi ausiliari è palesata dal seguente teorema :

Teorema 3.1

Siano $\bar{x}$ e $\bar{x}^i$ $i=0,1,\dots,n$ le soluzioni ottime rispettivamente dei problemi P e P^i $i=0,1,\dots,n$.

Se $\bar{x}^0$ non è ammissibile per P allora $\exists\, h\in\{1,\dots,n\}$ tale che $\bar{x}=\bar{x}^h$.

Dim Dimostriamo preliminarmente che se $\bar{x}^0$ non è ammissibile per P allora $\bar{x}$ deve necessariamente aderire al vincolo $r^Tx\leq c$.

Se per assurdo così non fosse risulterebbe $r^T\bar{x}<c$. D'altra parte le componenti di $\bar{x}^0$ sono strettamente positive e quindi la non ammissibilità di $\bar{x}^0$ per P implica che $r^T\bar{x}^0>c$; di conseguenza per la continuità della funzione $r(x)=r^Tx$ $\exists\ \bar{y}=\lambda\bar{x}^0+(1-\lambda)\bar{x}$, $0<\lambda<1$, tale che $r^T\bar{y}=c$.

Poiché poi $0<\lambda<1$, $\bar{x}^0\geq 0$, $\bar{x}\geq 0$ abbiamo che anche $\bar{y}\geq 0$ risultando quindi ammissibile per P .

Essendo $\overline{x}^0$ l'unico punto di minimo libero per f(x) si ha $f(\overline{x}^0)<f(\overline{x})$; d'altra parte , per la convessità di f(x) , abbiamo

$$f(\overline{y})=f(\lambda\overline{x}^0+(1-\lambda)\overline{x})\leq\lambda f(\overline{x}^0)+(1-\lambda)f(\overline{x})=f(\overline{x})+\lambda(f(\overline{x}^0)-f(\overline{x}))<f(\overline{x})$$

il che è assurdo poiché contraddice l'ottimalità di $\overline{x}$.

Sia ora h il numero di componenti non nulle di $\overline{x}$; per il teorema 1.2 si ha $\overline{x}_i>0$ per $i=1,\dots,h$ e $\overline{x}_i=0$ per $i=h+1,\dots,n$: la $\overline{x}$ quindi sarà soluzione ottima , oltre che del problema P , anche del problema

$$P' : \begin{cases} \min f(x) \\ r^T x=c \\ x_i=0 \ \ i=h+1,\dots,n \\ x_1>0,\dots,x_h>0 \end{cases}$$

risultando così ottimo locale per il problema ausiliario P^h .

Poiché però la f(x) è strettamente convessa , la $\overline{x}$ dovrà essere , oltre che ottimo locale , anche ottimo globale per P^h e quindi $\overline{x}=\overline{x}^h$.

♦

<u>Osservazione 3.1</u>

Il numero di componenti non nulle di $\overline{x}$ sarà sicuramente maggiore od uguale ad 1: nel caso infatti in cui sia $\overline{x}=\overline{x}^0=x_0$e tutte le componenti di $\overline{x}$ sono non nulle; se invece $\overline{x}^0$ non è ammissibile per P la $\overline{x}$ deve aderire al vincolo $r^T x\leq c$ e quindi, visto che $c>0$ ed $r_i>0$ $\forall$ $i=1,\dots,n$, deve necessariamente essere $\overline{x}\neq[0,\dots,0]^T$.

Si osservi inoltre che quando $\overline{x}^0$ non appartiene alla regione ammissibile di P l'aderenza della soluzione ottima al vincolo $r^T x\leq c$ riconduce il problema a quello proposto da Manca in [10] .

Tenuto conto della struttura dei problemi ausiliari introdotti abbiamo che :

a) $R(P^{i+1})\supseteq R(P^i)$ $i=1,\dots,n-1$

b) $\Re^n=R(P^0)\supseteq R(P^i)$ $i=1,\dots,n$

dove $R(P^k)$ denota la regione ammissibile del problema P^k , $k=0,1,\dots,n$.

Risulta quindi che $$f(\overline{x}^0)\leq f(\overline{x}^n)\leq\dots\leq f(\overline{x}^{i+1})\leq f(\overline{x}^i)\leq\dots\leq f(\overline{x}^1) \qquad (3.1)$$

I risultati ottenuti stabiliscono che la soluzione ottima del problema P coincide con quella del problema libero o con la soluzione ottima di un problema ausiliario ; precisiamo ulteriormente questo fatto con il seguente teorema :

Teorema 3.2
Consideriamo i problemi P e P^i , $i=0,1,\dots,n$, e supponiamo che la soluzione ottima del problema libero P^0 sia non ammissibile per P .
Segue allora che $\bar{x} = \bar{x}^h$ con $h=\max\{i : \bar{x}^i$ è ammissibile per P$\}$.

Dim Per il teorema 3.1 $\bar{x}$ coincide con la soluzione ottima di un problema ausiliario , la tesi quindi segue , essendo $\bar{x}$ l'unica soluzione ottima di P , direttamente dalla (3.1) . ♦

Quest'ultimo teorema suggerisce un possibile metodo per determinare la soluzione ottima di P : si controlla se la soluzione ottima del problema libero $\bar{x}^0$ verifica il vincolo $r^Tx \le c$, in caso affermativo $\bar{x} = \bar{x}^0$; altrimenti si determinano iterativamente le soluzioni ottime dei problemi ausiliari , partendo da P^n e proseguendo ad ogni passo con il problema di indice decrementato di 1 , fino a che non si trova $\bar{x}^i$ ammissibile per P : $\bar{x}^i$ sarà la soluzione ottima $\bar{x}$ di P . Faremo però vedere , nei successivi paragrafi , come l'approccio seguito permetterà di indicare direttamente , in funzione dei parametri r , c ed x_0 , quale (o quali) soluzione ottima dei problemi ausiliari coincide con quella di P .
Per ottenere ciò abbiamo bisogno di stabilire alcune importanti proprietà delle soluzioni ottime dei problemi ausiliari : per questo motivo dedicheremo il prossimo paragrafo allo studio di tali problemi rimandando al quinto paragrafo la determinazione esplicita di $\bar{x}$.

4. Soluzione ottima esplicita dei problemi ausiliari

Consideramo inizialmente il problema $P^n : \begin{cases} \min f(x)=x^TQx-2x_0e_1^Tx+x_0^2 \\ r^Tx=c \end{cases}$.

Come è noto la soluzione ottima $\overline{x}^n$ può essere determinata applicando al problema le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker ; otteniamo infatti :

$$\begin{cases} 2Qx-2x_0e_1=\lambda r \\ r^Tx=c \\ \lambda\in\Re \end{cases} \quad \text{e quindi , essendo Q invertibile ,} \quad \begin{cases} x=x_0Q^{-1}e_1+\frac{\lambda}{2}Q^{-1}r \\ r^Tx=c \\ \lambda\in\Re \end{cases}$$

da cui otteniamo $\quad x_0r^TQ^{-1}e_1+\frac{\lambda}{2}r^TQ^{-1}r=c \quad$ e quindi :

$$\begin{cases} \overline{\lambda}=\dfrac{\overline{c}-r^TQ^{-1}e_1}{r^TQ^{-1}r} \\ \overline{x}^n=x_0(Q^{-1}e_1+\overline{\lambda}\,Q^{-1}r) \\ \text{dove } \overline{\lambda}=\dfrac{\lambda}{2x_0} \text{ e } \overline{c}=\dfrac{c}{x_0} \end{cases} \tag{4.1}$$

Come possiamo notare dalla (4.1) , per esplicitare la $\overline{x}^n$ dobbiamo calcolare l'inversa della matrice Q : il seguente teorema fornisce l'espressione di tale inversa .

Teorema 4.1

Sia $\overline{Q}=(p_{ij})$ con $p_{ij}=\min(i,j)=\begin{cases} j & \text{per } j\le i \\ i & \text{per } j>i \end{cases}$; risulta $\overline{Q}=Q^{-1}$.

Dim Basta verificare che $\overline{Q}\,Q=(e_{ij})=I$. Sia $\overline{Q}_{[i]}$ la i-esima riga di $\overline{Q}$ e q_j la j-esima colonna di Q : risulta $\overline{Q}_{[i]}=[1,2,\ldots,i,0,\ldots,0]+i\,[0,\ldots,0,1,\ldots,1]$; $q_1=[2,-1,0,\ldots,0]^T$; $q_n=[0,\ldots,0,-1,1]^T$; $q_j=[0,\ldots,0,-1,2,-1,0,\ldots,0]^T$, $j=2,\ldots,n-1$. Di conseguenza si ha

$$e_{i1}=\overline{Q}_{[i]}q_1=\begin{cases} i=1 & : 2-1=1 \\ i>1 & : 2-2=0 \end{cases}$$

$$e_{in}=\overline{Q}_{[i]}q_n=\begin{cases} i<n-1: & i(-1+1)=0 \\ i=n-1: & -(n-1)+(n-1)=0 \\ i=n: & -(n-1)+n=1 \end{cases}$$

e per $1<j<n$

$$e_{ij}=\overline{Q}_{[i]}q_j=\begin{cases} j<i: & -(j-1)+2j-(j+1)=0 \\ j=i: & -(i-1)+2i-i=1 \\ j=i+1: & -i+i(2-1)=0 \\ j>i+1: & i(-1+2-1)=0 \end{cases}$$

♦

Come immediata conseguenza del teorema precedente si ha che :

a) $Q^{-1}e_1=[1,\ldots,1]^T$ e quindi $r^TQ^{-1}e_1=\sum_{j=1}^{n}r_j$

b) $Q^{-1}_{[i]}r=\sum_{j=1}^{i}jr_j+i\,(\sum_{j=1}^{n}r_j-\sum_{j=1}^{i}r_j)\quad, i=1,\ldots,n$,

dove $Q^{-1}_{[i]}$ indica la i-esima riga di Q^{-1} .

Per semplificare le notazioni , d'ora in avanti indicheremo con :

$$\sigma_i=\sum_{j=1}^{i}r_j\quad, i=1,\ldots,n \tag{4.2}$$

$$\mu_i=\sum_{j=1}^{i}jr_j\quad, i=1,\ldots,n \tag{4.3}$$

La (4.1) può essere così riscritta :

$$\begin{cases} \overline{\lambda}=\dfrac{\overline{c}-\sigma_n}{r^TQ^{-1}r} \\ \overline{x}^n_i=x_0(1+\overline{\lambda}\,(\mu_i+i(\sigma_n-\sigma_i)))\quad, i=1,\ldots,n \\ \text{dove } \overline{\lambda}=\dfrac{\lambda}{2x_0} \text{ e } \overline{c}=\dfrac{c}{x_0} \end{cases} \tag{4.4}$$

Prendiamo adesso in esame il problema P^h : $\begin{cases} \min f(x) \\ r^T x = c \\ x_i = 0 \quad i=h+1,\dots,n \end{cases}$ $\quad h=1,\dots,n-1.$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker applicate a P^h divengono , tenuto conto che $x_i=0 \ \forall \ i=h+1,\dots,n$, le seguenti :

$$\begin{cases} 2Q^{(h)}x^{(h)}-2x_0 e_1^{(h)}=\lambda r^{(h)} \\ r^{(h)T}x^{(h)}=c \\ \lambda \in \Re \end{cases}$$

dove con $x^{(h)}$, $r^{(h)}$ ed $e_1^{(h)}$ abbiamo indicato i vettori composti dalle prime h componenti di x , r ed e_1 rispettivamente e con $Q^{(h)}$ la matrice principale di testa di ordine h della matrice Q , ovvero la sottomatrice di Q formata dalle prime h righe ed h colonne .

Poiché Q è definita positiva anche ogni sua matrice principale lo è [1] , $Q^{(h)}$ quindi risulta definita positiva e perciò invertibile .

Con calcoli analoghi a quelli precedentemente fatti abbiamo perciò :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \dfrac{\bar{c} - r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}e_1^{(h)}}{r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}} \\ \bar{x}^h_i = x_0((Q^{(h)})^{-1}_{[i]}e_1^{(h)} + \bar{\lambda}\,(Q^{(h)})^{-1}_{[i]}r^{(h)}) \quad i=1,\dots,h \\ \bar{x}^h_i = 0 \quad i=h+1,\dots,n \\ \text{dove } \bar{\lambda} = \dfrac{\lambda}{2x_0} \quad \text{e} \quad \bar{c} = \dfrac{c}{x_0} \end{cases} \tag{4.5}$$

dove con $(Q^{(h)})^{-1}_{[i]}$ abbiamo indicato la i-esima riga di $(Q^{(h)})^{-1}$.

La particolare struttura della matrice $Q^{(h)}$ permette di calcolarne esplicitamente l'inversa ; vale al riguardo il seguente teorema :

Teorema 4.2

Sia $\overline{Q}=(p_{ij})$ con $p_{ij}=\min(i,j)-\dfrac{ij}{h+1}=\begin{cases} j-\dfrac{ij}{h+1}=j\dfrac{h-i+1}{h+1} & \text{per } j\le i \\ i-\dfrac{ij}{h+1}=i\dfrac{h-j+1}{h+1} & \text{per } j>i \end{cases}$;

risulta $\overline{Q}=(Q^{(h)})^{-1}$.

Dim Basta verificare che $\overline{Q}\,Q^{(h)}=(e_{ij})=I$. Sia $\overline{Q}_{[i]}$ la i-esima riga di $\overline{Q}$ e q_j la j-esima colonna di $Q^{(h)}$:

risulta $\overline{Q}_{[i]}=\dfrac{h-i+1}{h+1}[1,2,\ldots,i,0,\ldots,0]+\dfrac{i}{h+1}[0,\ldots,0,h-i,h-i-1,\ldots,2,1]$;

$q_1=[2,-1,0,\ldots,0]^T$; $q_n=[0,\ldots,0,-1,2]^T$; $q_j=[0,\ldots,0,-1,2,-1,0,\ldots,0]^T$, $j=2,\ldots,n-1$. Di conseguenza si ha

$$e_{i1}=\overline{Q}_{[i]}q_1=\begin{cases} i=1: & \dfrac{h}{h+1}2+\dfrac{1}{h+1}(h-1)(-1)=1 \\ i>1: & \dfrac{h-i+1}{h+1}(2-2)=0 \end{cases}$$

$$e_{in}=\overline{Q}_{[i]}q_n=\begin{cases} i<h-1: & \dfrac{i}{h+1}(-2+2)=0 \\ i=h-1: & \dfrac{2}{h+1}(h-1)(-1)+\dfrac{h-1}{h+1}2=0 \\ i=h: & \dfrac{1}{h+1}((h-1)(-1)+2h)=1 \end{cases}$$

e per $1<j<n$

$$e_{ij}=\overline{Q}_{[i]}q_j=\begin{cases} j<i: & \dfrac{h-i+1}{h+1}(-(j-1)+2j-(j+1))=0 \\ j=i: & \dfrac{h-i+1}{h+1}(-(i-1)+2i)-\dfrac{i}{h+1}(h-i)=1 \\ j=i+1: & \dfrac{h-i+1}{h+1}(-i)+\dfrac{i}{h+1}(2(h-i)-(h-i-1))=0 \\ j>i+1: & \dfrac{i}{h+1}(-(h-j+2)+2(h-j+1)-(h-j))=0 \end{cases}$$

♦

Come immediata conseguenza del teorema precedente si ha che :

a) $(Q^{(h)})^{-1}e_1^{(h)}=\frac{1}{h+1}[h,h-1,\dots,2,1]^T$ e quindi

$$r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}e_1^{(h)}=\frac{1}{h+1}\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j=\sum_{j=1}^{h}r_j-\frac{1}{h+1}\sum_{j=1}^{h}jr_j=\sigma_h-\frac{1}{h+1}\mu_h$$

b) $$(Q^{(h)})^{-1}_{[i]}r^{(h)}=\frac{h-i+1}{h+1}\sum_{j=1}^{i}jr_j+\frac{i}{h+1}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j-\sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right)=$$

$$=\mu_i-\frac{i}{h+1}\mu_i+i(\sigma_h-\frac{1}{h+1}\mu_h-\sigma_i+\frac{\mu_i}{h+1})=\mu_i+i(-\frac{\mu_i}{h+1}+\sigma_h-\frac{1}{h+1}\mu_h-\sigma_i+\frac{\mu_i}{h+1})=$$

$$=\mu_i+i((\sigma_h-\frac{1}{h+1}\mu_h)-\sigma_i)\quad ,\ i=1,\dots,h\ .$$

Per semplificare le notazioni , d'ora in avanti indicheremo :

$$\gamma_h=\frac{1}{h+1}\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j=\sigma_h-\frac{1}{h+1}\mu_h\quad ,\ h=1,\dots,n \tag{4.6}$$

La (4.5) può essere così espressa nel seguente modo :

$$\begin{cases} \bar{\lambda}=\dfrac{\bar{c}-\gamma_h}{r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}} \\ \bar{x}^h_i=x_0\left(\dfrac{h-i+1}{h+1}+\bar{\lambda}(\mu_i+i(\gamma_h-\sigma_i))\right)\quad ,\ i=1,\dots,h \\ \bar{x}^h_i=0\quad ,\ i=h+1,\dots,n \\ \text{dove } \bar{\lambda}=\dfrac{\lambda}{2x_0}\quad \text{e}\quad \bar{c}=\dfrac{c}{x_0} \end{cases} \tag{4.7}$$

Facciamo notare che nelle (4.4) e (4.7) gli unici termini che non sono stati esplicitati sono rispettivamente $r^TQ^{-1}r$ ed $r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}$; questi saranno studiati approfonditamente in seguito .

Intanto cominciamo lo studio delle proprietà delle soluzioni ottime dei problemi ausiliari che ci permetteranno di individuare la soluzione ottima del problema P .

Teorema 4.3

Sia $\overline{x}^n$ la soluzione ottima del problema ausiliario P^n.

$\overline{x}^n$ è ammissibile per P se e solo se $\overline{x}^n_n \geq 0$.

Dim La necessarietà è ovvia , quindi verifichiamo direttamente la sufficienza. $\overline{x}^n$ verifica per definizione il vincolo $r^T x \leq c$ e quindi è ammissibile per P se e solo se tutte le sue componenti sono non negative .

Ricordando la (4.4) , se $\overline{\lambda} \geq 0$ banalmente $\overline{x}^n_i > 0 \ \forall\ i=1,\ldots,n$.

Supponiamo ora $\overline{\lambda} < 0$; come sappiamo $Q^{-1}_{[i]}r = \mu_i + i(\sigma_n - \sigma_i)$, dimostriamo allora che $Q^{-1}_{[i]}r < Q^{-1}_{[i+1]}r \ \ \forall\ i=1,\ldots,n-1$:

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}_{[i]}r - Q^{-1}_{[i+1]}r &= \mu_i + i(\sigma_n - \sigma_i) - \mu_{i+1} - (i+1)(\sigma_n - \sigma_{i+1}) = \\
&= \mu_i + i(\sigma_n - \sigma_i) - \mu_{i+1} - (i+1)(\sigma_n - \sigma_i - r_{i+1}) = \\
&= \mu_i + i(\sigma_n - \sigma_i) - \mu_i - (i+1)r_{i+1} - (i+1)(\sigma_n - \sigma_i) + (i+1)r_{i+1} = \\
&= -(\sigma_n - \sigma_i) < 0 \ .
\end{aligned}
$$

Come immediata conseguenza abbiamo che $\overline{\lambda}\, Q^{-1}_{[i]}r > \overline{\lambda}\, Q^{-1}_{[i+1]}r \ \ \forall\ i=1,\ldots,n-1$ e perciò , essendo $x_0 > 0$, $\overline{x}^n_i > \overline{x}^n_{i+1} \ \ \forall\ i=1,\ldots,n-1$ da cui $\overline{x}^n_i > \overline{x}^n_n \geq 0$ $\forall i=1,\ldots,n-1$. ♦

Osservazione 4.1

Facciamo notare che se $\overline{\lambda} = 0$ banalmente , per la (4.4) , $\overline{x}^n$ coincide con $\overline{x}^0$.

Risulta inoltre che $\overline{x}^n$, se è ammissibile per P , ha almeno n-1 componenti non nulle e precisamente ne ha $\begin{cases} n & \text{se } \ \overline{x}^n_n > 0 \\ n-1 & \text{se } \ \overline{x}^n_n = 0 \end{cases}$.

Teorema 4.4

Sia $\overline{x}^h$ la soluzione ottima del problema ausiliario P^h .

$\overline{x}^h$ è ammissibile per P se e solo se $\overline{x}^h_h \geq 0$.

Dim La necessarietà è ovvia , quindi verifichiamo direttamente la sufficienza.

Analogamente al caso precedente $\overline{x}^h$ verifica per definizione il vincolo $r^Tx \leq c$ e quindi è ammissibile per P se e solo se le sue prime h componenti $\overline{x}^h_i$, $i=1,\ldots,h$, sono non negative.

Riscriviamo l'espressione della $\overline{x}^h_i$, $i=1,\ldots,h$, presentata nella (4.7) nel seguente modo: $\overline{x}^h_i = x_0 \frac{h-i+1}{h+1}(1+\overline{\lambda}\beta_i)$, $i=1,\ldots,h$, dove

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i} jr_j + \frac{i}{h-i+1}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) \quad .$$

Se $\overline{\lambda} \geq 0$ banalmente $\overline{x}^h_i > 0$, $i=1,\ldots,h$; supponiamo quindi $\overline{\lambda} < 0$ e dimostriamo che $\beta_i < \beta_{i+1}$ $\forall\, i=1,\ldots,h-1$:

$$\begin{aligned}
\beta_{i+1}-\beta_i = & \sum_{j=1}^{i+1} jr_j + \frac{i+1}{h-i}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i+1}(h-j+1)r_j\right) \\
& - \sum_{j=1}^{i} jr_j - \frac{i}{h-i+1}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) = \\
= & \sum_{j=1}^{i+1} jr_j - \frac{i+1}{h-i}(h-i)r_{i+1} + \frac{i+1}{h-i}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) \\
& - \sum_{j=1}^{i} jr_j - \frac{i}{h-i+1}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) = \\
= & (i+1)r_{i+1} - (i+1)r_{i+1} + \left(\frac{i+1}{h-i} - \frac{i}{h-i+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) = \\
= & \frac{h+1}{(h-i)(h-i+1)}\left(\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j - \sum_{j=1}^{i}(h-j+1)r_j\right) > 0 \quad .
\end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo che $(1+\overline{\lambda}\beta_i) > (1+\overline{\lambda}\beta_{i+1})$ $\forall\, i=1,\ldots,h-1$ e quindi, essendo per ipotesi $\overline{x}^h_h = x_0 \frac{1}{h+1}(1+\overline{\lambda}\beta_h) \geq 0$, abbiamo $(1+\overline{\lambda}\beta_i) > (1+\overline{\lambda}\beta_h) \geq 0$ $\forall\, i=1,\ldots,h-1$ e perciò $\overline{x}^h_i \geq 0$ $\forall\, i=1,\ldots,h-1$. ♦

Osservazione 4.2

Analogamente al caso precedente $\overline{x}^h$, se è ammissibile per P, ha almeno h-1 componenti non nulle e precisamente ne ha $\begin{cases} h & \text{se } \overline{x}^h_h > 0 \\ h-1 & \text{se } \overline{x}^h_h = 0 \end{cases}$.

Nel caso inoltre in cui sia $\overline{x}^h_h=0$, poiché la funzione obbiettivo ammette una unica soluzione ottima e grazie alla (3.1) , abbiamo che $\overline{x}^h$ coincide con $\overline{x}^{h-1}$ ed entrambe sono ammissibili per P .

Studiamo adesso in modo esplicito per quali parametri risultano $\overline{x}^n_n\geq 0$ e $\overline{x}^h_h\geq 0$ h=1,...,n-1 . Ricordando le (4.4) e (4.7) abbiamo :

$$\overline{x}^n_n=x_0\left(1+\frac{\overline{c}-\sigma_n}{r^TQ^{-1}r}\mu_n\right)\geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad \overline{c}\geq\frac{\sigma_n\mu_n-r^TQ^{-1}r}{\mu_n}$$

$$\overline{x}^h_h=x_0\frac{1}{h+1}\left(1+\frac{\overline{c}-\gamma_h}{r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}}\mu_h\right)\geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad \overline{c}\geq\frac{\gamma_h\mu_h-r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}}{\mu_h}$$

Per semplificare le notazioni d'ora in avanti indicheremo :

$$v_n=\sigma_n\mu_n-r^TQ^{-1}r \quad ; \quad v_h=\gamma_h\mu_h-r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)} \quad h=1,\dots,n-1 \qquad (4.8)$$

Nel seguente teorema vedremo come i valori v_i in (4.8) possano essere facilmente calcolati :

<u>**Teorema 4.5**</u>

Sia $M^{(h)}$, h=1,...,n , una matrice quadrata di ordine h definita nel seguente modo:

$$M^{(h)}=(m_{ij}) \qquad \text{con} \qquad m_{ij}=j-\min(i,j)=\begin{cases} 0 & \text{se } j\leq i \\ j-i & \text{se } j>i \end{cases} .$$

$$\text{Risulta } v_h=r^{(h)T}M^{(h)}r^{(h)}=\begin{cases} \sum_{i=2}^{h} r_i\left(\sum_{j=1}^{i-1} r_j(i-j)\right)=\sum_{i=2}^{h} i\,r_i\gamma_{i-1} & \text{se } h=2,\dots,n \\ 0 & \text{se } h=1 \end{cases} .$$

Dim Essendo $\mu_n=\sum_{j=1}^{n} j r_j=[1,2,\dots,n]\,r$ e $\sigma_n=\sum_{j=1}^{n} r_j=r^Te$, si ha $v_n=\sigma_n\mu_n-r^TQ^{-1}r$ e quindi $v_n=r^T e\,[1,2,\dots,n]\,r-r^TQ^{-1}r$, quindi $v_n=r^T\,\overline{M}\,r$

dove $\overline{M}=(e\ [1,2,\dots,n] - Q^{-1})$. Tenuto conto che $Q^{-1}=(p_{ij})$ con $p_{ij}=\min(i,j)$, abbiamo $\overline{M}=(\overline{m}_{ij})$ con $\overline{m}_{ij}=j-p_{ij}=j-\min(i,j)=m_{ij}$ e quindi $\overline{M}=M$.

Vediamo adesso il caso di v_h con $h=1,\dots,n-1$.

Essendo , in notazione vettoriale , $\mu_h=\sum_{j=1}^{h} jr_j=[1,2,\dots,n]\, r^{(h)}$ e

$\gamma_h=\frac{1}{h+1}\sum_{j=1}^{h}(h-j+1)r_j=r^{(h)T}\frac{1}{h+1}[h,h-1,\dots,2,1]^T$ si ha $v_h=\gamma_h\mu_h-r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}$,

quindi $v_h=r^{(h)T}\frac{1}{h+1}[h,h-1,\dots,2,1]^T[1,2,\dots,h]\, r^{(h)}-r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}=r^{(h)T}\,\overline{M}\, r^{(h)}$

dove $\overline{M}=r^{(h)T}\left(\frac{1}{h+1}[h,h-1,\dots,2,1]^T[1,2,\dots,h]-(Q^{(h)})^{-1}\right)r^{(h)}$.

Tenuto conto che $(Q^{(h)})^{-1}=(p_{ij})$ con $p_{ij}=\min(i,j)-\frac{ij}{h+1}$, abbiamo $\overline{M}=(\overline{m}_{ij})$ con $\overline{m}_{ij}=\frac{1}{h+1}(h-i+1)j-p_{ij}=\frac{h-i+1}{h+1}j-\min(i,j)+\frac{ij}{h+1}=j-\min(i,j)=m_{ij}$ e quindi $\overline{M}=M$.

♦

Grazie a quest'ultimo teorema siamo adesso in grado di fornire una forma completamente esplicita delle soluzioni ottime dei problemi ausiliari :

$$\overline{x}^{\,n} \text{ è data da } \begin{cases} \overline{\lambda}=\dfrac{\overline{c}-\sigma_n}{\sigma_n\mu_n-v_n} \\ \overline{x}^{\,n}_i=x_0(1+\overline{\lambda}(\mu_i+i(\sigma_n-\sigma_i))) \quad , i=1,\dots,n \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\overline{x}^{\,h} \text{ è data da } \begin{cases} \overline{\lambda}=\dfrac{\overline{c}-\gamma_h}{\gamma_h\mu_h-v_h} \\ \overline{x}^{\,h}_i=x_0\left(\dfrac{h-i+1}{h+1}+\overline{\lambda}(\mu_i+i(\gamma_h-\sigma_i))\right) \quad , i=1,\dots,h \\ \overline{x}^{\,h}_i=0 \quad , i=h+1,\dots,n \end{cases} \tag{4.10}$$

dove , lo ricordiamo , $\overline{\lambda}=\frac{\lambda}{2x_0}$, $\overline{c}=\frac{c}{x_0}$ ed inoltre $\sigma_h=\sum_{j=1}^{h} r_j$, $\mu_h=\sum_{j=1}^{h} jr_j$,

$$\gamma_h = \sigma_h - \frac{1}{h+1}\mu_h \ , \ h=1,\ldots,n \qquad \text{e} \qquad v_h = \begin{cases} \sum_{i=2}^{h} i r_i \gamma_{i-1} & \text{se } h=2,\ldots,n \\ 0 & \text{se } h=1 \end{cases} .$$

Utilizzando queste notazioni , otteniamo le seguenti importanti proprietà :

Proprietà 4.1
Siano $\overline{x}^0$ e $\overline{x}^h$ le soluzioni ottime del problema libero e dei problemi ausiliari P^h, $h=1,\ldots,n$. Valgono allora le seguenti proprietà :

a: $\overline{x}^0$ è ammissibile per P se e solo se $\frac{c}{x_0} \geq \sigma_n$.

b: $\overline{x}^h$ è ammissibile per P se e solo se $\frac{c}{x_0} \geq \frac{v_h}{\mu_h}$ $h=1,\ldots,n$.

c: $\overline{x}^h$ è ammissibile per P ed ha h componenti non nulle se e solo se $\frac{c}{x_0} > \frac{v_h}{\mu_h}$ $h=1,\ldots,n$.

d: $\overline{x}^0$ non è ammissibile per P oppure $\overline{x}^0 = \overline{x}^n$ se e solo se $\frac{c}{x_0} \leq \sigma_n$.

e: $\overline{x}^{h+1}$ non è ammissibile per P oppure $\overline{x}^{h+1} = \overline{x}^h$ se e solo se $\frac{c}{x_0} \leq \frac{v_{h+1}}{\mu_{h+1}}$ $h=1,\ldots,n-1$.

Dim Segue direttamente dai teoremi 4.3 e 4.4 , dalle osservazioni 4.1 e 4.2 e dal fatto che $\overline{x}^0$ è ammissibile per P se e solo se verifica il vincolo $r^T x \leq c$ e quindi , essendo $\overline{x}^0 = x_0 e$ con $e=[1,\ldots,1]^T$, se e solo se $x_0 \sum_{i=1}^{n} r_i \leq c$.

♦

I parametri $\frac{v_i}{\mu_i}$ ci permettono di determinare delle importanti relazioni tra le varie soluzioni ottime dei problemi ausiliari :

Teorema 4.6

Siano v_i , σ_i e μ_i , i=1,...,n , i parametri definiti in precedenza ; vale la seguente relazione :

$$0=\frac{v_1}{\mu_1}<\ldots<\frac{v_i}{\mu_i}<\frac{v_{i+1}}{\mu_{i+1}}<\ldots<\frac{v_n}{\mu_n}<\sigma_n \qquad (4.11)$$

Dim $\frac{v_1}{\mu_1}=0$ poiché $v_1=0$, inoltre $\frac{v_n}{\mu_n}<\sigma_n$ poiché $\mu_n>0$ e $0<r^TQ^{-1}r=\sigma_n\mu_n-v_n=\mu_n(\sigma_n-\frac{v_n}{\mu_n})$.

Dobbiamo ora verificare soltanto che $\frac{v_h}{\mu_h}<\frac{v_{h+1}}{\mu_{h+1}}$ $\forall$ h=1,...,n-1 :

essendo $\mu_h>0$ ed $0<r^{(h)T}(Q^{(h)})^{-1}r^{(h)}=\gamma_h\mu_h-v_h=\mu_h(\gamma_h-\frac{v_h}{\mu_h})$ abbiamo :

$$\frac{v_{h+1}}{\mu_{h+1}}-\frac{v_h}{\mu_h}=\frac{v_h+(h+1)r_{h+1}\gamma_h}{\mu_h+(h+1)r_{h+1}}-\frac{v_h}{\mu_h}=\frac{v_h\mu_h+(h+1)r_{h+1}\gamma_h\mu_h-v_h\mu_h-(h+1)r_{h+1}v_h}{\mu_h\mu_{h+1}}=$$

$$=\frac{(h+1)r_{h+1}}{\mu_{h+1}}(\gamma_h-\frac{v_h}{\mu_h})>0 \ .$$

♦

Corollario 4.1

Siano $\bar{x}^0$ e $\bar{x}^h$ le soluzioni ottime del problema libero e dei problemi ausiliari P^h, h=1,...,n ; risulta :

a: $\bar{x}^h\notin R(P)$, h=2,...,n se e solo se $\bar{x}^0\notin R(P)$ e $\bar{x}^i\notin R(P)$, i=h,...,n

b: $\bar{x}^h\in R(P)$, h=2,...,n se e solo se $\bar{x}^i\in R(P)$, i=1,...,h

c: $\bar{x}^n=\bar{x}^0$ implica che $\bar{x}^0\in R(P)$ e $\bar{x}^i\in R(P)$, i=1,...,n

d: $\bar{x}^{h+1}=\bar{x}^h$, h=1,...,n-1 implica che $\bar{x}^0\notin R(P)$ e $\bar{x}^i\notin R(P)$, $\forall$i>h+1

Dim Segue direttamente dai teoremi 4.3 e 4.4 , dalle osservazioni 4.1 e 4.2 e dal teorema 4.6 .

♦

5. Determinazione della soluzione ottima

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per poter caratterizzare esplicitamente la $\bar{x}$ in termini delle soluzioni ottime dei problemi ausiliari e del problema libero :

Teorema 5.1

Siano $\bar{x}$ ed $\bar{x}^i$, $i=0,1,\ldots,n$, le soluzioni ottime rispettivamente dei problemi P e P^i , $i=0,1,\ldots,n$.

a: $\bar{x}=\bar{x}^0$ se e solo se $\bar{x}^0$ è ammissibile per P

b: $\bar{x}=\bar{x}^n$ con n componenti non nulle se e solo se
$$\begin{cases} \bar{x}^n \text{ è ammissibile per P} \\ \bar{x}^n_n \neq 0 \\ \bar{x}^0 \notin R(P) \text{ oppure } \bar{x}^n = \bar{x}^0 \end{cases}$$

c: $\bar{x}=\bar{x}^h$ con h componenti non nulle se e solo se
$$\begin{cases} \bar{x}^h \text{ è ammissibile per P} \\ \bar{x}^h_h \neq 0 \\ \bar{x}^{h+1} \notin R(P) \text{ oppure } \bar{x}^h = \bar{x}^{h+1} \end{cases}$$

dove $h\in\{1,\ldots,n-1\}$.

Dim a: Ovvia essendo P^0 il problema libero .

Dim b ⇒: Banalmente dalle ipotesi segue che $\bar{x}^n$ è ammissibile per P e, grazie al corollario 2.1 , che $\bar{x}^n_n \neq 0$. Supponiamo adesso che anche $\bar{x}^0$ sia ammissibile per P ; in questo caso , essendo P^0 il problema libero , deve essere $\bar{x}=\bar{x}^0$ ma allora , per l'unicità della soluzione ottima , risulta $\bar{x}^n=\bar{x}^0$.

Dim b ⇐: Poiché $\bar{x}^n$ è ammissibile per P e $\bar{x}^n_n \neq 0$, per l'osservazione 4.1, $\bar{x}^n$ ha n componenti non nulle . Nel caso quindi in cui $\bar{x}^0$ non sia ammissibile per P abbiamo , grazie al teorema 3.2 , che $\bar{x}=\bar{x}^n$; se invece $\bar{x}^n=\bar{x}^0$ banalmente , essendo P^0 il problema libero , risulta $\bar{x}=\bar{x}^0=\bar{x}^n$.

Dim c ⇒: Banalmente dalle ipotesi segue che $\overline{x}^h$ è ammissibile per P e, grazie al corollario 2.1 , che $\overline{x}^h_h \neq 0$. Supponiamo adesso che anche $\overline{x}^{h+1}$ sia ammissibile per P ; in questo caso , per l'unicità della soluzione ottima e per la (3.1) , risulta $\overline{x}^n = \overline{x}^0$.

Dim c ⇐: Poiché $\overline{x}^h$ è ammissibile per P e $\overline{x}^h_h \neq 0$, per l'osservazione 4.2, $\overline{x}^h$ ha h componenti non nulle . Nel caso in cui sia $\overline{x}^{h+1} \notin R(P)$ abbiamo , grazie al corollario 4.1 , che $\overline{x}^0 \notin R(P)$ e $\overline{x}^i \notin R(P)$ $\forall$ $i \geq h+1$ e quindi , per il teorema 3.2 , $\overline{x} = \overline{x}^h$. Se invece $\overline{x}^{h+1} = \overline{x}^h$ risulta , sempre per il corollario 4.1, che $\overline{x}^0 \notin R(P)$ e $\overline{x}^i \notin R(P)$ $\forall$ $i > h+1$ e quindi , per il teorema 3.2 , $\overline{x} = \overline{x}^{h+1} = \overline{x}^h$.

♦

Corollario 5.1

Siano $\overline{x}$ ed $\overline{x}^i$, i=0,1,…,n , le soluzioni ottime rispettivamente dei problemi P e P^i , i=0,1,…,n .

a:	$\overline{x} = \overline{x}^0$	se e solo se	$\frac{c}{x_0} \geq \sigma_n$
b:	$\overline{x} = \overline{x}^n$ con n componenti non nulle	se e solo se	$\frac{v_n}{\mu_n} < \frac{c}{x_0} \leq \sigma_n$
c:	$\overline{x} = \overline{x}^h$ con h componenti non nulle	se e solo se	$\frac{v_h}{\mu_h} < \frac{c}{x_0} \leq \frac{v_{h+1}}{\mu_{h+1}}$

dove $h \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Dim Segue direttamente dal precedente teorema 5.1 e dalle proprietà 4.1 .

♦

Grazie al corollario 5.1 siamo in grado di individuare direttamente , tramite i parametri c , x_0 ed r_i , quale sia la soluzione ottima del problema P ed inoltre, con lo studio svolto nel paragrafo 4, ne conosciamo addirittura una forma esplicita .

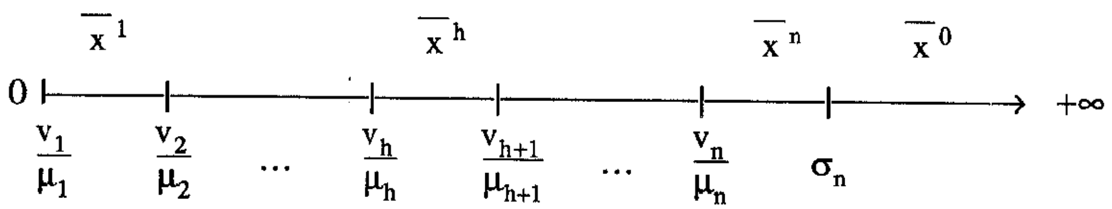
Un possibile schema per il calcolo della soluzione ottima può essere il seguente:

<u>FASE 1</u> : si calcolano iterativamente i parametri σ_i , μ_i , γ_i e v_i con le seguenti formule ricorsive :

$$\begin{cases} \sigma_1=r_1 & \sigma_{i+1}=\sigma_i+r_{i+1} & i=1,\ldots,n-1 \\ \mu_1=r_1 & \mu_{i+1}=\mu_i+(i+1)r_{i+1} & i=1,\ldots,n-1 \\ \gamma_1=\dfrac{r_1}{2} & \gamma_{i+1}=\gamma_i+\dfrac{\mu_{i+1}}{(i+1)(i+2)} & i=1,\ldots,n-1 \\ v_1=0 & v_{i+1}=v_i+(i+1)r_{i+1}\gamma_i & i=1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

fino a che non si trova , se esiste , un $h\in\{1,\ldots,n-1\}$ tale che $\dfrac{v_h}{\mu_h}<\dfrac{c}{x_0}\leq\dfrac{v_{h+1}}{\mu_{h+1}}$.

<u>FASE 2</u> : Se tale h esiste allora $\overline{x}$ coincide con la soluzione ottima del problema ausiliario P^h calcolabile tramite la (4.10) .
Se invece tale h non esiste allora si verifica se è $\dfrac{v_n}{\mu_n}<\dfrac{c}{x_0}<\sigma_n$:
se ciò è vero $\overline{x}$ coincide con $\overline{x}^{\,n}$ calcolabile per mezzo della (4.9) , altrimenti coincide con $\overline{x}^{\,0}$ e quindi ha tutte le componenti uguali ad x_0 .



Non abbiamo quindi bisogno , come abbiamo accennato alla fine del terzo paragrafo e come ha fatto Torrigiani nel suo lavoro [14] , di risolvere iterativamente più problemi : sappiamo direttamente quale è la soluzione e non dobbiamo invertire alcuna matrice per calcolarla dal momento che ne conosciamo già una forma esplicita .
Una caratteristica computazionale molto interessante di questa tecnica è che siamo in grado di individuare subito quante e quali sono le componenti nulle

della soluzione ottima di modo da evitare errori di cancellazione numerica nel loro calcolo .
Facciamo infine notare come γ_{i+1} , i=1,...,n-1 , può essere calcolata , oltre che con la formula $\gamma_{i+1}=\sigma_{i+1}-\frac{\mu_{i+1}}{i+2}$, anche come $\gamma_{i+1}=\gamma_i+\frac{\mu_{i+1}}{(i+1)(i+2)}$: questa forma permette di evitare errori numerici di cancellazione nel calcolo dei γ_i con indice basso.
Di seguito forniamo una procedura Pascal che , presi in input i parametri n, c, x_0 ed r_i i=1,...,n , determina la soluzione ottima x per la classe di problemi trattati ed indica inoltre , tramite la variabile intera probl , se x è ottimo anche del problema libero P^0 (probl=0) oppure del problema ausiliario P^h (probl=h). Tale procedura è stata testata su alcuni esempi numerici implementando un programma su computer Macintosh .

```
Type  vect = array[1..max] of real;

procedure sol_ottima (n: integer; c, x_0: real; var r, x: vect; var probl: integer);
  var
   m, v, g , cond, s : vect;
   h: integer;
   ll, cc: real;

  procedure probl_aux_h;
    var
     i: integer;
  begin
    probl := h;
    for i := (h + 1) to n do
     x[i] := 0;
    ll := (cc - g[h]) / (m[h] * g[h] - v[h]);
    for i := 1 to h do
     x[i] := x_0 * ((h - i + 1) / (h + 1) + ll * (m[i] + i * (g[h] - s[i])))
  end;

  procedure probl_aux_n;
    var
     i: integer;
  begin
    probl := n;
    ll := (cc - s[n]) / (s[n] * m[n] - v[n]);
    for i := 1 to n do
     x[i] := x_0 * (1 + ll * (m[i] + i * (s[n] - s[i])))
  end;

  procedure probl_libero;
    var
     i: integer;
  begin
    probl := 0;
    for i := 1 to n do
     x[i] := x_0
  end;
```

```
begin
  h := 0;
  s[1] := r[1];
  m[1] := r[1];
  v[1] := 0;
  cond[1] := 0;
  g[1] := r[1] / 2;
  cc := c / x_0;
  repeat
    h := h + 1;
    s[h + 1] := s[h] + r[h + 1];
    m[h + 1] := m[h] + (h + 1) * r[h + 1];
    g[h + 1] := g[h] + (m[h + 1] / ((h + 1) * (h + 2)));
    v[h + 1] := v[h] + (h + 1) * r[h + 1] * g[h];
    cond[h + 1] := v[h + 1] / m[h + 1]
  until ((h >= (n - 1)) or ((cc > cond[h]) and (cc <= cond[h + 1])));
  if cc <= cond[h + 1] then
   probl_aux_h
  else
    begin
      if ((cc > cond[n]) and (cc < s[n])) then
       probl_aux_n
      else
       probl_libero
    end;
end;
```

Bibliografia

[1] Bini, D., Capovani M. ed O. Menchi : *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli 1988 .

[2] Bonferroni, C. : *Sull'accumulo per inseguimento* , Giornale di matematica finanziaria , 1955 .

[3] Boot, J. : *Quadratic programming* , North-Holland Publishing Co. , 1964 .

[4] Carusi, M. : *Su di un problema di ottimo relativo alla costituzione di un capitale* , G.I.I.A. , 1971 .

[5] Gosio, C. : *Osservazioni su un problema di ottimo relativo alla costituzione di un capitale* , Dipartimento di R.O. e scienze statistiche , Pisa , 1976 .

[6] Gosio, C. : *Sulla costituzione di un capitale per inseguimento* , Istituto di matematica finanziaria , Università di Genova , 1983 .

[7] Künzi, H. P. e W. Krelle : *La Programmation non linéaire* , Gauthier-Villars , 1969 .

[8] Levi, E. : *La costituzione di un capitale per inseguimento* , Istituto di matematica finanziaria , Università di Torino , 1964 .

[9] Lisei, G. : *Su di un problema di ottimo relativo alla costituzione di un capitale* , Istituto di matematica finanziaria , Università di Genova , 1971 .

[10] Manca, P. : *Problemi di ottimo relativi alla costituzione di un capitale per inseguimento* , Istituto di matematica finanziaria , Università di Pisa , 1968 .

[11] Mazzoni, P. : *Sulla costituzione di un capitale per inseguimento* , G.I.I.A. , 1955 .

[12] Ottaviani, G. : *I sistemi di finanziamento e le riserve matematiche complessive ed individuali nell'assicurazione obbligatoria di invalidità, vecchiaia e superstiti* , Atti del Convegno sui problemi attuariali e statistici della Sicurezza Sociale , Roma , 1956 .

[13] Pacioni, G. : *Alcune considerazioni sul problema dell'inseguimento dei capitali* , G.I.I.A. , 1962 .

[14] Torrigiani, M. : *Su di un problema di ottimo nella costituzione di un capitale* , Istituto di Matematica Generale e Finanziaria , Università di Firenze , 1983 .

[15] Van de Panne, C. : *Methods for linear and quadratic programming* , North-Holland Publishing Co. , 1975 .