Report n. 42

Alcuni valori medi, variabilità paretiana ed entropia

Vincenzo BRUNO

Pisa, agosto 1991

1 - L'entropia è uno dei principi della fisica contemporanea. All'origine è la denominazione attribuita da Clausius ad una funzione per analizzare, nel 1867, lo stato termodinamico di un sistema.

Non vi è passaggio spontaneo di calore da un corpo a più alta temperatura ad un corpo a più bassa temperatura senza che l'entropia muti. Essa misura l'energia che si sviluppa in detto passaggio.

Secondo Boltzmann si ha il massimo di entropia per un sistema quando le differenti situazioni in cui si trovano i singoli microsistemi, di cui esso è composto, hanno la medesima probabilità di verificarsi.

Infatti esiste, in tale caso, una equiripartizione fra i microsistemi negli stati differenti.

L'entropia di Boltzmann ($H = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$) è al centro delle moderne rielaborazioni della termodinamica.

Nello studio della diffusione delle temperature e delle connesse variazioni di energia si possono opporre le considerazioni statistiche della variabilità, il cui particolare aspetto è la concentrazione, data la mobilità insita nei predetti fenomeni fisici. Infatti si può considerare il caso limite dello stato in cui tutta l'energia è concentrata in una sola unità, a temperatura massima, e l'altro in cui vi è equilibrio termico con concentrazione nulla di energia[1].

Il rapporto di concentrazione e soprattutto gli indici descrittivi di concentrazione, α e δ, sono misure relative della diffusione dell'energia. Questi ultimi ci descrivono, particolarmente, il variare del predtto fenomeno e le relative concentrazioni nel passaggio di calore da un momento ad un altro.

2 - Si deve a Shannon l'estensione della denominazione "entropia" al di fuori della termodinamica. Già Hartley ha introdotto il predetto

---

[1]Cifr. ad es.:
<u>Castellano V.</u>, Sur l'entropie et d'autres difficultés des sciences qui influencent la culture contemporaine, et sur la plaçe de la Statistique dans un tableau révise du role des sciences- Metron, vol. XLIII, n.3-4, Roma 1985.

concetto nel campo della teoria delle informazioni, onde stabilire il grado d'indeterminatezza del risultato di un esperimento casuale[2]
Secondo lo Shannon, l'entropia si definisce:

$$(1) \qquad H_n = - K \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

La (1) è una distribuzione discreta con probabilità, $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
K è una costante. Per K = 1, si ha:

$$(2) \qquad H_n = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \log 1/p_i \ ;$$

Si ha:

$$0 \leq H_n \leq \log n$$

I logaritmi sono in base 10.
L'entropia accerta, in tale caso, il grado d'incertezza e coglie le variazioni intervenute nello stesso contesto in tempi 0 situazioni diverse.

3 - E' nota l'espressione generale dei valori medi di posizione (M_p), in funzione ad α che è:

$$(3) \qquad M_p = X_1 \ (h/g)^{1/\alpha}$$

Nella (3), X_1 = valore minimo. Per dato medio di posizione s'intende una modalità che ha un certo posto nella graduatoria crescente delle modalità, X_i, della seriazione.
Nella (3), per ottenere la frazione g/h (in cui g/h è una frazione propria con g variabile da 1 a N-1 e con H, variabile da 2 a N), occorre fare riferimento al valore superiore alla frazione, h - g/h delle modalità[3].

---

[2]Cfr ad es.:
Landenna G., Indici basati sul concetto di entropia e della dipendenza fra più fenomeni qualitativi. Studi in Onore di Silvio Vianelli, vol. I, Università degli Studi di Palermo, Istituto di Statistica, Facoltà di Economia e Commercio, Palermo 1986.
[3]Cifr. ad es.:

Il secondo quartile, Q_2, che coincide con il valore mediano, è:

(4) $$M_e = X_1\ 2^{1/\alpha}$$

Il primo decile (D_1) è dato da:

(5) $$D_1 = X_1\ (10/9)^{1/\alpha}$$

Per δ, si ricava, M_p, definita dalla seguente formula:

(6) $$M_p = X_1\ (h/g)^{\delta-1/\delta}$$

La mediana è:

(7) $$M_e = X_1\ 2^{\delta-1/\delta}\ .$$

Il primo decile (D_1) risulta essere:

(8) $$D_1 = X_1(10/9)^{\delta-1/\delta}$$

4 - E' noto che è:

(9) $$\alpha = M_1\ X_1 /\ M_1 - X_1;$$

α, è dunque il rapporto fra la media aritmetica e la differenza tra la media aritmetica ed il valore minimo della seriazione. Se ne deduce che α limita ad 1, quando X_1 tende a O.

E' ovvio che, diventando O il valore minimo X_1, non si può parlare di tendenza alla diminuzione della disuguaglianza.

E' evidente, altresì che α si riferisce all'infinito positivo, quando X_1, limita alla media (M_1), quando, cioè, la variabilità tende ad essere nulla.

Il dato minimo del fenomeno, in funzione ad α ed alla media (M_1), sarà:

(10) $$X_1 = M_1\ (\alpha - 1) / \alpha$$

In relazione a δ tale valore minimo, diventa:

(11) $$X_1 = M_1 / \delta\ .$$

Fortunati P., Valori medi e variabilità, Scritti di Statistica e di Politica Economica-Scritti ed appunti, vol. I, Istituto e Scuola di Statistica, Università di Bologna, Cooperazione Libraria Universitaria, 1968, Bologna.

5 - Nello studio della variabilità ha particolare rilievo, la differenza semplice media, Δ . Dalla nota relazione, $R = \Delta/2M_1$, si ricava la differenza semplice media in funzione al valore minimo X_1 . Ciò si ottiene sostituendo al rapporto di concentrazione ed alla media aritmetica, i rispettivi valori in α.

Sarà:

(12) $\Delta = 2X_1 \alpha / (2 \alpha-1)(\alpha-1)$

Esprimendo nella (18) il dato minimo, X_1, in funzione alla media aritmetica, si deriva:

(13) $\Delta = 2M_1 / (2 \alpha-1)$

Per δ si ricava:

(14) $\Delta = 2X_1 \delta (\delta-1) / \delta+1$

In funzione alla media:

(15) $\Delta = 2M_1 \delta (\delta-1) / \delta +1$;

6 - Indicando, com'è noto, con $p_{(x)}$, la frequenza dei possessori di un fenomeno non maggiore di X e con $q_{(x)}$ la corrispondente frazione dell'ammontare, si ottiene, per la curva paretiana di prima approssimazione:

(16) $p_{(x)} = 1 - ((X_1)/(X))^{\alpha}$;

e

(17) $q_{(x)} = 1 - ((X_1)/(X))^{\alpha-1}$

L'equazione della curva di Lorentz, sarà:

(18) $q = 1 - (1- p)^{\alpha-1/\alpha}$

Il rapporto di concentrazione, R, è, com'è noto, nella legge di Pareto di prima approssimazione:

(19) $R = 1/2\alpha - 1$

In una distribuzione uniforme, si ha:

(20) $R = \alpha/3$

L'indice di concentrazione dello Zenga[4] è dato, nella predetta ipotesi del Pareto, da:

(21) $\xi = 1 / \alpha^2 - \alpha + 1$

Per δ si ottiene:

(22) $p_{(x)} = 1 - ((X_1)/(X))^{\delta/\delta - 1}$

e

(23) $q_{(x)} = 1 - ((X_1)/(X))^{1/\delta - 1}$

L'equazione della curva di Lorentz, sarà:

(24) $q = 1 - (1 - p)^{1/\delta}$

Nella distribuzione uniforme, si ha:

(25) $R = \delta/3(\delta - 1)$

Il rapporto di concentrazione, R, com'è noto, è:

(26) $R = \delta - 1/\delta + 1$

L'indice di concentrazione dello Zenga, sarà:

(27) $\xi = (\delta - 1)^2/\delta(\delta + 1) + 1$;

[4] Amato V., Contributo della Scuola Statistica Italiana alla costruzione delle classi di indici di concentrazione, in: La distribuzione personale del reddito, a cura di M. Zenga, Cattolica, Milano, 1987

7 - Com'è noto esiste una relazione che lega il rapporto di concentrazione, il coefficiente di variazione e il coefficiente di correlazione lineare fra termini e pesi[5].

Per n sufficientemente grande, si può scrivere[6]:

(28) $$R = 1/\sqrt{3}\ .\ \sigma/\ M_1\ .\ r_{as}$$

Si ricava, per $\alpha > 2$:

(29) $$r = \sqrt{3}\ .\ \sigma/2\alpha - 1\ .\ \sqrt{\alpha} - 2/\ \alpha$$

Per δ , si ha:

(30) $$r = \sqrt{3}\ .\ \delta/\delta + 1\ .\ \sqrt{2} - \delta/\ \delta$$

La (35) e la (36) valgono sia per la prima, sia per la seconda approssimazione del Pareto.

Per $\alpha = \delta = 2$, $r = 0$.

8 - Nella legge paretiana di seconda approssimazione, la funzione di densità, f(x), sarà:

(31) $$f_{(x)} = \overline{\alpha}\ /\ x + a\ .\ ((x_1 + a)/(x + a))^{\ \overline{\alpha}}$$

La frazione delle unità del fenomeno con un limite maggiore di x , è:

(32) $$N_{x_1}/\ N_x = ((x_1 + a)/(x + a))^{\ \overline{\alpha}}$$

La frazione $C_{(x)}$ dell'ammontare, goduta dai possessori di un fenomeno maggiore di x, è:

(33) $$C_x/C_{x_1} = (\overline{\alpha}\ \ x + a)/(\overline{\alpha}\ \ x_1 + a)^{\ \overline{\alpha}}$$

---

[5] De Vergottini M., Sul significato di alcuni indici di concentrazione, Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Anno II, 1940, Milano.
De Vergottini M., Sul significato di alcune costanti statistiche, Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Anno VIII, 1949, Milano.

[6] Dancelli L., Relazioni e discordanze fra indici di variabilità e concentrazione, in: Distribuzione personale del reddito, a cura di M. Zenga-Cattolica, Milano 1987.

Il valore mediano è espresso da:

(34) $$M_e = (x_1 + a) \cdot \sqrt[\bar{\alpha}]{2} - a$$

Lo scostamento medio dalla mediana, ragguagliato alla media, è:

(35) $$S_{Mer} = (\bar{\alpha}\ (x_1 + a)/(\bar{\alpha}\ x_1 + a)\ (\sqrt[\bar{\alpha}]{2} - 1\ )$$

Il reddito medio globale, viene ad essere:

(36) $$M_1 = (\bar{\alpha}\ x_1 + a)/(\bar{\alpha}\ - 1)$$

Lo scostamento semplice medio dalla media[7], ragguagliato a 2 M_1 è, com'è noto:

(37) $$S'_{Mr} = (x_1 + a)/(\bar{\alpha}\, x_1 + a)\ [(\bar{\alpha}\ - 1)/\ (\bar{\alpha}\ )]^{\bar{\alpha}\ -1}$$

Lo scostamento quadratico medio dalla media aritmetica, come si conosce, viene ad essere,

(38) $$\sigma^2 = 2(\bar{\alpha}\ - 1)^{2(\bar{\alpha}\ -2)}\ A\ /\bar{\alpha}^{\ 2(\bar{\alpha}\ -1)}\ (x_1 + a)^{\bar{\alpha}\ -2}$$

Ragguagliando il precedente a 2M, si ottiene:

(39) $$\sigma^2\ /2M_1 = (\bar{\alpha}\ - 1)^{2\bar{\alpha}\ -3}/\bar{\alpha}^{\ 2(\bar{\alpha}\ -1)}\ (x_1 + a)^{\bar{\alpha}\ -2} \times\ A/\bar{\alpha}\, x_1 + a$$

La differenza semplice media risulta essere:

(40) $$\Delta = 2\ (x_1 + a)/(\bar{\alpha}\ - 1)\ (\bar{\alpha}\ /\ 2\bar{\alpha}\ - 1)$$

Il rapporto di concentrazione, è:

(41) $$R = x_1 + a\ /\ \bar{\alpha}\, x_1 + a\ .\ (\bar{\alpha}\ /\ 2\bar{\alpha}\ - 1)$$

[7] Guerrieri G.-Bonadies P., Su alcuni modelli teorici per l'analisi della distribuzione personale dei redditi; in: La distribuzione personale del reddito, a cura di M. Zenga, Cattolina, Milano 1987.

Per $\overline{\delta}$, si ricava:

(42) $$f_{(x)} = \overline{\delta} / (x + a)(\overline{\delta} - 1) \, . \, (x_1 + a/x + a)^{\overline{\delta}/\overline{\delta}- 1}$$

La frazione (N_{x_1}/N_x) diviene:

(43) $$N_{x_1}/N_x = (x_1 + a/x + a)^{\overline{\delta}/\overline{\delta}- 1}$$

La frazione C_x/C_{x_1} è:

(44) $$C_x/C_{x_1} = \overline{\delta}(x + a) - a /\overline{\delta}(x_1 + a) - a \, . \, (x_1 + a/x + a)^{\overline{\delta}/\overline{\delta}- 1}$$

La mediana si definisce:

(45) $$M_e = (x_1 + a) \, . \, \sqrt[\overline{\delta}/\overline{\delta}- 1]{2} - a$$

Lo scostamento medio dalla mediana è:

(46) $$S_{Mer} = \overline{\delta}\, x_1 + \overline{\delta}\, a/ \overline{\delta}\, x_1 + a \, . \, (\sqrt[\overline{\delta}/\overline{\delta}- 1]{2} - 1)$$

Il valore medio globale si deduce:

(47) $$M_1 = \overline{\delta}(x_1 + a) - a$$

Lo scostamento semplice medio dalla media, relativo a $2M_1$ diventa:

(48) $$S'_{Mr} = (x_1 + a)(\overline{\delta} - 1) / (x_1 + a)\overline{\delta} - a \, . \, (1/ \overline{\delta})^{1/\overline{\delta}- 1}$$

Lo scostamento quadratico medio dalla media aritmetica è, in funzione a $\overline{\delta}$ della seconda approssimazione di Pareto:

(49) $$\sigma^2 = 2^{2(2- \overline{\delta}/ \overline{\delta}- 1)} (\overline{\delta} - 1)^2 / \overline{\delta}^{\,2/\overline{\delta}- 1)} (x_1 + a)^{2- \overline{\delta}/\overline{\delta}- 1}$$

Rapportando σ a $2M_1$ si ricava:

(50) $$\sigma^2/2M_1 = (\overline{\delta} - 1)/ \overline{\delta}^{\,(2/\overline{\delta}- 1)}. (x_1 + a)^{2- \overline{\delta}/\overline{\delta}- 1} \times A/\overline{\delta}(x_1 + a)\text{-}a$$

La differenza semplice media si esprimerà:

(51) $\Delta = 2(x_1 + a)(\overline{\delta}^2 - \overline{\delta}) / \overline{\delta} + 1$

Il rapporto di concentrazione risulta:

(52) $R = (x_1 + a)(\overline{\delta}^2 - \overline{\delta}) / (x_1 + a)\overline{\delta}^2 + (\overline{\delta} x_1 - a)$

Per, $\overline{\alpha} = \overline{\delta} = 2$; viene ad aversi:

(53) $f_{(x)} = 2(x_1 + a)^2 / (x + a)^3$;

(54) $N_{x1} / N_x = (x_1 + a/x + a)^2$;

(55) $C_{x1} / C_x = 2x + a/2x_1 + a\ (x_1 + a/x + a)^2$

La mediana è:

(56) $M_e = (x_1 + a)\sqrt{2} - a$;

(57) $S_{Mer} = 2(x_1 + a)/2x_1 + a\ (\sqrt{2} - 1)$

La media aritmetica diviene:

(58) $M_1 = 2x_1 + a$;

(59) $S'_{Mr} = x_1 + a/\ 4x_1 + 2a$

Lo scostamento quadratico medio dalla media aritmetica, ragguagliato a $2M_1$, diventa:

(60) $\sigma^2 / 2M_1 = A/\ 8x_1 + 4a$

La differenza media si esprime:

(61) $\Delta = 4x_1 + 4a/\ 3$

Il rapporto di concentrazione diventa:

(62) $R = 2x_1 + 2a/6x_1 + 3a$

Nella prima approssimazione per α e $\delta = 2$ si ha:

(63) $M_p = x_1 \sqrt{h}/g$;

(64) $M_e = x_1 \sqrt{2}$

Il primo decile (D_1) è:

(65) $D_1 = x_1 \sqrt{10/9}$

Il valore minimo X_1, diventa

(66) $X_1 = M_1/2$;

(67) $\Delta = 2\ M_1/3$;

(68) $R = \xi = 1/3$

Nella distribuzione uniforme si verifica:

(69) $R = 2/3$

9 - Com'è noto nelle distribuzioni che si assimilano alle curve paretiane dei redditi, si possono esprimere α e δ, in funzione dell'entropia[8].
E' noto che:

(70) $\alpha = Hr/Hd\ .\ Q$

---

[8]Cfr. ad es:
Bruno V., La variabilità e l'incertezza statistica con particolare riferimento alle distribuzioni paretiane dei redditi, Giornale degli Economisti ed Annali di Economia, sett.-ott. 1975, Milano.
Bruno V., L'entropia e la variabilità paretiana dei redditi, Giornale degli Economisti ed Annali di Economia, sett.-ott., 1986.
Bruno V., Entropia e distribuzioni dei redditi, Scritti in nore di Francesco Brambilla, vol. primo, Ediz. Bocconi Comunicazione, Milano 1986.

Nella (70) l'indice α è il rapporto fra l'entropia delle unità del fenomeno (redditieri Nx) e l'entropia delle classi del fenomeno (reddito, x), moltiplicato un fattore, Q, dato dal rapporto fra la frazione delle classi del fenomeno (reddito, x_1/x) e la frazione del numero delle unità del fenomeno (redditieri, Nx_1/Nx).
Si conosce che:

(71) $\delta = Hr/Hc \,.\, Z$

Nella (71), l'indice δ è il rapporto fra l'entropia del numero delle unità (redditieri, Nx) e l'entropia dell'ammontare (ammontare del reddito Cx/Cx_1), moltiplicato il rapporto fra la frazione dell'ammontare del fenomeno e quello del numero delle unità del collettivo esaminato.
Com'è noto, se una data distribuzione presenta valori di α e δ variabili entro limiti modesti, tali valori possono essre rappresentati, in modo soddisfacente, dalla legge paretiana di prima approssimazione, di cui si sono viste le espressioni entropiche.
Alcune distribuzioni dei fenomeni sono caratterizzate da una varibilità rilevante degli indici, α e δ, per cui il Pareto per spiegarle ha proposto una distribuzione con tre costanti, conosciuta come legge di seconda approssimazione.
Si ha:

(72) $N_x/ N_{x1} = (x_1 + a/x + a)^{\overline{\alpha}}$

Poniamo:

(73) $N_x/ N_{x1} = a \,;\quad x_1 + a/x + a = e$

Per cui:

(74) $a = e^{\overline{\alpha}} \,;$

da cui:

(75) $\overline{\alpha} = a \log a/ a \,.\, e/e \log e = Hr/He \,.\, e/a$

Ponendo, e/a = Q', si avrà, come si è visto, a suo tempo:

(76) $\overline{\alpha} = Hr/He \,.\, Q'$

L'indice $\overline{\alpha}$, è, dunque, nella legge di Pareto di seconda approssimazione, il rapporto fra l'entropia delle unità (redditieri) e l'entropia delle classi del fenomeno (reddito), corrette con l'aggiunta della costante a. Il predetto rapporto viene moltiplicato per un altro, dato dalla frazione delle singole intensità (reddito) (con l'aggiunta della costante a) e la frazione delle unità (redditieri).
La costante, a, come si sa, può essere tanto positiva, quanto negativa, ma tale che $a + x_1 > 0$.
Si conosce che:

(77) $a = (\overline{\alpha} - \alpha_x) \, x \,/\, \alpha_x - 1$

Nella (77) si ha:

(78) $\overline{\alpha} = \alpha_x \, (a + x) - a \,/\, x$

Come si è visto[9], nella legge di prima approssimazione, è una costante il rapporto:

(79) $Mx/X = \alpha \,/\, \alpha - 1 = \delta$;

mentre, in quella di seconda approssimazione, è una costante il rapporto:

(80) $Mx + a/x + a = \overline{\alpha} \,/\, \alpha - 1 = \overline{\delta}$

Nella legge di seconda approssimazione, il rapporto, Mx/x, è variabile e cioè decrescente o crescente a seconda che **a** sia positivo o negativo.
Pertanto l'esponente al quale si deve innalzare la frazione dell'ammontare di un fenomeno superiore ad x per ottenere la

[9]Cfr. ad es:
De Vergottini M., Statistica economica - La distribuzione dei redditi e dei patrimoni, Crisafulli, Catania 1943.

corrispondente frazione delle unità che la possiedono, non è costante, come quella di prima approssimazione, ma decrescente o crescente, a seconda che **a** sia positivo o negativo.
Se si vuole rendere costante tale esponente è necessario aumentare o diminuire i singoli rapporti, Cx/Cx_1, di una quantità decrescente a seconda che **a** sia positivo o negativo.
Tenendo presente che, $Cx = Mx\ Nx$, si può scrivere:

(81) $$Nx/Nx_1 = [Nx\ (Mx + a)/\ Nx_1\ (Mx_1 + a)]^{\bar{\delta}}$$

Poniamo:

(82) $$Nx/Nx_1 = a\ ;\ Mx + a/Mx_1 + a = Z'$$

Nella (82), si esprime:
a = frazione delle unità (redditieri)
Z' = frazione delle media generale (reddito medio) superiore al limite x, a sua volta, ragguagliato alla media del fenomeno non inferiore ad x_1. Tali medie sono corrette con a diverso da zero. Trattasi di rapporti fra medie del collettivo osservato.
Si ha:

(83) $$a = (a\ Z')^{\bar{\delta}}$$

Da cui:

(84) $$\bar{\delta} = a \log a/\ a \times a\ Z'/\ aZ' \log aZ'$$

Si avrà:

(85) $$\bar{\delta} = a \log a/\ aZ' \log aZ' \times aZ'/a$$

Ne deriva:

(86) $$\bar{\delta} = Hr/\ Hz\ .\ Z'$$

L'indice $\bar{\delta}$ è, nella legge di Pareto di seconda approssimazione, uguale al rapporto fra l'entropia delle unità (redditieri) e l'entropia del prodotto fra le frazioni delle unità del fenomeno e quelle dei rispettivi valori medi (corretti dalla costante a). Il tutto viene moltiplicato per la frazione fra le medie (corrette di a).

10 - Sostituendo ai dati di α le rispettive espressioni entropiche, si ottengono alcune caratterizzazioni utili per l'analisi delle medie e della variabilità di Pareto di prima approssimazione. La formula generale dei valori medi di posizione, viene, ad essere:

(87) $$Mp = X_1 \, (h/g)^{Hd/HrQ}$$

La mediana, Me, è uguale, com'è noto, a :

(88) $$Me = X_1 \, 2^{Hd/HrQ}$$

Il primo decile (D1) è dato da:

(89) $$D1 = X_1 \, (10/9)^{Hd/HrQ}$$

Sostituendo nelle formule, a suo tempo trovate, i valori entropici di δ, si viene ad avere:

(90) $$Mp = X_1 \, (h/g)^{Hr \; Z\text{-}Hc/HrZ}$$

La mediana, Me, com'è noto, diventa:

(91) $$Me = X_1 \, 2^{Hr \; Z\text{-}Hc/HrZ}$$

Il primo decile (D1):

(92) $$D1 = X_1 \, (10/9)^{Hr \; Z\text{-}Hc/HrZ}$$

Il valore entropico minimo (X_1) in funzione ad α ed alla media (M1):

(93) $$X_1 = (Hr\ Q\text{-}\ Hd\ /HrQ)$$

Scrivendo il predetto dato (X_1) in funzione all'entropia di δ ed alla media (M1), si ottiene:

(94) $X_1 = M1\ HC / Hr\ Z$

La differenza media, Δ, per l'entropia di α , viene ad essere:

(95) $\Delta = 2\ X_1\ (Hr\ Hd\ Q) / 2\ Hr^2\ Q^2 - 3\ Hr\ Hd^2 Q + Hd^2)$

Risulta altresì:

(96) $\Delta = 2\ M1\ Hd / 2\ Hr\ Q - Hd$

Con l'entropia di δ , si ottiene, in funzione all'intensità minima:

(97) $\Delta = 2\ X_1 \times HrZ\ (HrZ - Hc) / Hc(HrZ + Hc)$

In funzione alla media, si ha:

(98) $\Delta = 2\ M1 \times HrZ - Hc / HrZ + Hc$

11 - La frequenza dei possessori di un fenomeno (reddito) non maggiore di X, p(x), sarà per la curva paretiana di prima approssimazione e per α :

(99) $p(x) = 1 - (X_1/X)^{HrQ/Hd}$

La corrispondente frazione dell'ammontare (reddito globale) q(x), diventa:

(100) $q(x) = 1 - ((X_1/X)^{HrQ-Hd/Hd}$

La curva di Lorentz, sarà:

(101) $p = 1 - (1 - p)^{HrQ-Hd/HrQ}$

In una distribuzione uniforme si ha:

(102) $R = Hr\ Q / 3\ Hd$

Il rapporto di concentrazione, R, viene ad essere, come si è visto a suo tempo, uguale a:

(103) $$R = Hd/\ 2Q\ Hr - Hd$$

L'indice di concentrazione dello Zenga per α risulta:

(104) $$\xi = Hd^2/\ Hr\ Q(HrQ - Hd) + Hd$$

Per δ si ottiene:

(105) $$p(x) = 1 - (X_1/X)^{HrZ/HrZ-Hc}\ ;$$

e

(106) $$q(x) = 1 - (X_1/X)^{Hc/HrZ-Hc}$$

La curva di Lorentz, si definisce:

(107) $$q = 1 - (1 - p)^{Hc/HrZ}$$

Nella distribuzione uniforme, si ha R uguale a:

(108) $$R = Hr\ Z\ /\ 3(Hr\ Z - Hc)$$

Il rapporto di concentrazione diviene, com'è noto:

(109) $$R = Hr\ Z - Hc\ /\ Hr\ Z + Hc$$

L'indice di concentrazione dello Zenga viene ad essere:

(110) $$\xi = (Hr\ Z - Hc)^2\ /\ (HrZ - Hc)^2 + Hr\ Hc\ Z\ ;$$

11 - Per $\alpha > 2$ (per n sufficientemente grande), il coefficiente di correlazione lineare, r, viene espresso in chiave entropica dalla seguente formula:

(111) $$r = \sqrt{3}\ .\ HrQ/\ 2HrQ - Hd\ .\ \sqrt{HrQ - 2Hd\ /\ Hr\ Q} =$$

$$= \sqrt{Hr\ Q(HrQ - 2Hd)\ /\ 2HrQ - Hd}\ .\ \sqrt{3}$$

Per δ , si ha:

(112) $$r = \sqrt{3} \cdot HrZ/ HrZ + Hc \cdot \sqrt{2}Hc- HrZ / Hr Z =$$

$$= \sqrt{Hr} Z(2Hc- HrZ) / HrZ + Hc \cdot \sqrt{3}$$

12 - Nella legge di Pareto di seconda approssimazione, per α, la funzione di densità, f(x), è:

(113) $$f(x) = HrQ' / He(x+a) \cdot (X_1+a/X+a)^{HrQ'/He}$$

La frazione delle unità del fenomeno (redditieri) con una intensità (reddito) maggiore di X, sarà:

(114) $$Nx/NX_1= ((X_1+a/X+a)^{HrQ'/He}$$

La frazione, C(x), dell'ammontare di un fenomeno (reddito globale), goduta dai possessori di una intensità (reddito) maggiore di X, è:

(115) $$Cx/CX_1= HrQ'X + He\ a / HrQ'X_1+ He\ a \cdot (X_1+a/X+a)^{HrQ'/He}$$

Il fenomeno mediano si presenta:

(116) $$Me = (X_1+a) \cdot \sqrt[HrQ/He]{2} - a$$

Lo scostamento medio dalla mediana, ragguagliato alla media, si manifesta:

(117) $$S_{Mer} = HrQ'X_1+ Hr\ Q'a / HrQ'X_1+ He\ a \cdot (\sqrt[HrQ/He]{2} - 1)$$

Il fenomeno medio globale viene ad essere:

(118) $$M1 = HrQ'X_1+ He\ a / HrQ' - He$$

Lo scostamento semplice medio dalla media, rapportato a $2M_1$, diviene:

(119) $S'_{Mr} = HeX_1 + He\ a\ /\ HrQ'X_1 + He\ a \times\ (HrQ'-He/HrQ')^{HrQ'-He/He}$

La differenza semplice media risulta:

(120) $\Delta = 2HeX_1 + He\ a\ /\ HrQ'-He \times\ (HrQ'/2HrQ'-He)$

Il coefficiente di variazione, $\sigma/M1$, si palesa:

(121) $\sigma^2/2M1\ =\ (HrQ'-He/He)^{2HrQ'-3He/He} \times\ A/HrQ'X_1 + He\ a\ \times$

$\times\ H^2e/\ HrQ'^{(2HrQ'-2He/He)} \times\ 1/(X_1 +\ a)^{(HrQ'-2He/He)}$

Il rapporto di concentrazione è uguale:

(122) $R = HeX_1 + He\ a\ /\ HrQ'X_1 + He\ a\ .\ (HrQ'/2HrQ'-He)$

13 - Nelle distribuzioni dei fenomeni che si assimilano alla seconda legge di approssimazione del Pareto, per $\overline{\delta}$, diviene:

(123) $f(x) = HrZ'/(x+a)(HrZ'-Hr)\ .\ (X_1 +\ a/x\ +\ a)^{HrZ'/HrZ'-Hz}$

La frazione delle unità del fenomeno (redditieri), con una intensità (reddito) maggiore di X, si esplica:

(124) $Nx/NX_1 =\ (X_1 +\ a/x\ +\ a)^{HrZ'/HrZ'-Hz}$

La frazione, C(x), è:

(125) $C(x)/CX_1 = HrZ'(x+a)-Hz\ a/\ HrZ'(X_1 + a)\ -\ Hz\ a\ .\ (X_1 + a/x\ +$
$+\ a)^{HrZ'/HrZ'-Hz}$

Il valore mediano si esprime:

(126) $Me = (X_1 + a)\ .\ \sqrt[HrZ'/HrZ'-Hz]{2}\ \ -\ a$

Il dato medio globale viene ad essere:

(127) $$M1 = HrZ'(X_1 + a) - Hz\ a\ /\ Hz$$

Lo scostamento medio dalla mediana risulta:

(128) $$S_{Mer} = HrZ'(X_1 + a)\ /\ HrZ'X_1 + Hz\ a\ .\ \left(\sqrt[HrZ'/HrZ'-Hz]{2} - 1\right)$$

Lo scostamento semplice medio relativo dalla media, S'_{Mr}, risulta :

(129) $$S'_{Mr} = (X_1 + a)(HrZ'-Hz)/(X_1 + a)HrZ'-Hz\ a\ .\ (Hz/HrZ')^{Hz/HrZ'-Hz}$$

La differenza semplice media si estrinseca:

(130) $$\Delta = 2(X_1 + a)HrZ'(HrZ'-Hz)/Hz(HrZ'+Hz)$$

Lo scostamento quadratico medio relativo si esplica:

(131) $$\sigma^2/2M1 = (HrZ'-Hz)\ .\ Hz^{3Hz-HrZ'/HrZ'-Hz}\ /(X_1 + a)^{2Hz-HrZ'/HrZ'} \times$$

$$\times\ A/HrZ'(X_1 + a) - Hz\ a\ ;$$

Il rapporto di concentrazione, con $\bar{\delta}$ della legge di Pareto di seconda approssimazione, osservato in chiave entropica, diviene:

(132) $$R = (X_1 + a)\ HrZ'(HrZ'-Hz)/(X_1 + a)\ Hr^2Z'^2 + Hz(HrZ'X_1 - Hz\ a)$$

14 - Nella presente ricerca si sono esaminate alcune relazioni tipiche di α e di δ, sia della legge di prima approssimazione, sia di quella di seconda approssimazione del Pareto.
Alcuni valori medi e particolari aspetti della variabilità paretiana, vengono analizzati in termini di entropia.
La predetta variabilità osserva i gradi d'indeterminatezza delle singole componenti.

Le disamine entropiche delle curve paretiane e le osservazioni matematiche che ne derivano arricchiscono le singole ricerche di nuove metodologie.

Queste ultime consentono di accertare, fra l'altro, i gradi delle incertezze insite in parecchi fenomeni.

L'uso degli indici proposti fa emergere aspetti inediti e ricchi di sviluppo in varie discipline (quali la termodinamica, la comunicazione ed altre). Le formulazioni fin qui citate permettono di misurare, particolarmente nel campo dei fenomeni fisici, chimici, biologici ed altri, le caratteristiche più peculiari della loro variabilità e della loro concentrazione. Si descrive lungo la componente assunta come variabile indipendente (che per parecchi fenomeni potrebbe essere il tempo) l'andamento della variabilità e della concentrazione.

La possibilità di analizzare i vari indici studiati (medie e variabilità) in funzione alle entropie dei fenomeni che appaiono legati dalle leggi di concentrazione di α e di δ, consentono di acquisire elementi non avvertibili per altre vie.

I collettivi, tipici delle ricerche statistiche, acquistano riflessi nuovi e mostrano dipendenze fra le singole parti finora sconosciute.

Fra l'altro vengono fuori legamenti pluridimensionali che è impossibile studiare con i metodi fin qui noti.

La sistematica della "Statistica dell'incertezza", nella poliedricità dei suoi interessi, è di rilievo per gli studi avvenire.