Report n.52

INVESTIMENTI E FINANZIAMENTI GENERALIZZATI

Paolo MANCA

Meeting of the
EURO-WORKING GROUP ON FINANCIAL MODELLING
Sirmione, 1990

Pisa, marzo 1992
Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (MURST 60%)

INVESTIMENTI E FINANZIAMENTI GENERALIZZATI

Paolo Manca

Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia
Università di Pisa - Via Ridolfi 10 - Pisa - Italia
-Meeting Euro Working Group on Financial Modelling - Sirmione - 1990-

SUNTO :

Il problema di classificare e valutare le operazioni finanziarie (o.f.), storicamente è stato affrontato in modo congiunto, infatti tutte le definizioni proposte (di investimento, di finanziamento ecc.) hanno fatto riferimento, sia pure variamente, a corrispondenti proprietà dei due più usati parametri di valutazione delle operazioni finanziarie stesse: il tasso interno di rendimento e il valore attuale .

I limiti di un tale approccio sono stati quelli di legare la classificazione delle operazioni ad un particolare regime di interesse (l'interesse composto), oltre a considerare per la classificazione esclusivamente parametri sintetici.

Nella presente nota viene proposta, con un approccio originale, una diversa classificazione basata su proprietà algebriche che scaturiscono dalla struttura di spazio vettoriale associata alle operazioni finanziarie stesse.

Precisamente assegnato un certo insieme di o.f., sia W, viene considerata la classe delle o.f. che possono esprimersi come combinazione lineare a coefficienti positivi di tale insieme, sia MP(W), e viene caratterizzato l'insieme MP(W) nei casi in cui W sia :

a - l'insieme degli investimenti e dei finanziamenti semplici (o.f. costituite da due sole rate di segno opposto),

b - l'insieme degli investimenti e dei finanziamenti semplici favorevoli (o.f. costituite da due sole rate di segno opposto la cui somma algebrica è positiva),

c -l'insieme degli investimenti e dei finanziamenti semplici che hanno uno stesso tasso interno di rendimento.

Con questa impostazione si ritrovano e si ricollocano correttamente recenti e meno recenti risultati legati al vastissimo tema della valutazione sintetica e analitica delle o.f..
Inoltre in questo contesto vengono messe in luce le implicazioni e le limitazioni connesse, nella pratica contabile, ai problemi di attribuzione ai vari esercizi di gestione del risultato complessivo (utile o perdita) di un progetto.

§. 1

Premettiamo alcune definizioni e notazioni che utilizzeremo nel contesto del lavoro.
Indichiamo con

$$A = \begin{matrix} a_0, \ldots\ldots, a_n \\ 0\ ,\ldots\ldots, n \end{matrix}$$

una operazione finanziaria (o.f.) di poste $a_0, \ldots, a_n$ scadenti rispettivamente agli istanti $t = 0, \ldots\ldots, t = n$.
Indichiamo con $s_0, \ldots\ldots, s_n$ il flusso cumulato di cassa di A :

$$s_r = \sum_0^r a_h$$

Diciamo nulla una o.f. le cui poste sono tutte nulle.

Senza ledere la generalità supponiamo che per tutte le o.f. non nulle risulti sempre

1) $\quad a_0 \cdot a_n \neq 0$

Un **investimento semplice** (i.s.) è una o.f. del tipo

$$B = \begin{matrix} a\ ,\ b \\ p\ ,\ q \end{matrix}$$

con

2) $\quad a < 0\ ,\ \ b > 0\ ,\ \ p < q$

Un investimento semplice si dice rispettivamente **favorevole** (i.s.f.), **indifferente, non sfavorevole, sfavorevole**, se risulta inoltre

3) $\quad b + a > 0$

ovvero

3') $\quad b + a = 0$

ovvero

3") $\quad b + a \geq 0$

ovvero

3"') $\quad b + a < 0$

Un **finanziamento semplice** (f.s.) è una o.f. del tipo

$$B = \begin{matrix} a\ ,\ b \\ p\ ,\ q \end{matrix}$$

con

$$4)\quad a>0\ ,\quad b<0\ ,\quad p<q$$

Poichè cambiando segno alle poste di un i.s. si ottiene un f.s. e viceversa, questa circostanza, per economia di linguaggio e di esposizione, ci consente di **fare riferimento nel seguito alle sole operazioni di investimento.**

Chiameremo **operazione finanziaria semplice** (o.f.s.) una o.f. che sia o un i.s. o un f.s. o una operazione nulla.
L'opportunità di comprendere come o.f.s. anche l'operazione nulla consente di enunciare in forma più concisa i risultati che presenteremo.

Una o.f.s. dicesi **uniperiodale** se risulta $q = p+1$.

Chiameremo tir (tasso interno di rendimento) di una o.f. A quell'unico valore reale del tasso -se esiste- che annulla il valore attuale di A.

Data una o.f. A noteremo con $f_A(t)$ il suo flusso cumulato di cassa e per ogni reale k indicheremo con $k{\cdot}A$ l'o.f. il cui flusso cumulato di cassa è pari a $k.f_A(t)$.
Date due o.f. A e B noteremo con $A + B$ l'o.f. il cui flusso cumulato di cassa è pari ad $f_A(t) + f_B(t)$.

§. 2

Come esposto e dimostrato in /3/, il problema di esprimere una o.f A come 'somma' di o.f.s. uniperiodali e consecutive che siano o nulle o investimenti semplici (i.s.) o finanziamenti semplici (f.s.).

$$5)\qquad A = \sum_{0}^{n-1} A_r$$

con
$$6)\qquad A_r = \begin{matrix} x_r\ ,\ y_r \\ \\ r\ \ ,\ r+1 \end{matrix}$$

ha soluzione se e solo se A possiede almeno due poste non nulle di segno opposto, in tal caso ogni soluzione della (5) si ricava dal sistema di equazioni e vincoli

7a)
$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= y_0 + x_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= y_{n-2} + x_{n-1} \\ a_n &= y_{n-1} \end{aligned}$$

7b)
$$\begin{aligned} y_0 &= - u_0 \cdot x_0 \\ y_1 &= - u_1 \cdot x_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= - u_{n-1} \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

7c) $u_r > 0 \qquad r = 0,\ldots., n-1$

e precisamente a partire da $x_0 = a_0$ si hanno le soluzioni

8) $x_r = P_r$

$$y_r = -u_r \cdot P_r$$
$$r = 0,\ldots\ldots, n-1$$

essendo

9) $P_0 = a_0$

$$P_r = \sum_0^{r-1} a_h \left(\prod_h^{r-1} u_s \right) + a_r$$

$$r = 1,\ldots, n-1$$

ed essendo i parametri $u_0,\ldots.,u_{n-1}$ vincolati alle condizioni

10) $u_r > 0 \qquad r = 0,\ldots., n-1$

$$a_n + u_{n-1} \cdot P_{n-1} = 0$$

E' importante osservare, anche ai fini di una scelta dei parametri u_r subordinatamente alle (10), come i vari P_r rappresentino **il valore (retrospettivo) finanziario di**

bilancio al tempo r dell'o.f. A ove $i_r = u_r - 1$ misuri l'interesse relativo al periodo (r, r+1) ; tale interesse da intendersi quale interesse attivo se l'o.f.s. A_r risulta essere un i.s., da intendersi quale interesse passivo se A_r risulta essere un f.s., da intendersi quale interesse ininfluente se A_r risulta essere nulla.

Risolvendo ancora il sistema (7) a partire da $y_{n-1} = a_n$ si ottiene una diversa rappresentazione delle soluzioni a cui è possibile attribuire un corrispondente significato di misura finanziaria del valore prospettivo di bilancio alle varie epoche. (cfr /4/).
E utile inoltre sottolineare come tra i valori finanziari di bilancio sussistano le relazioni ricorrenti

11) $P_{r+1} = P_r \cdot u_r + a_{r+1}$

§. 3

Assegnata una particolare classe di o.f. , sia W, indichiamo con MP(W) la classe delle o.f. che possono esprimersi come combinazioni lineari a coefficenti positivi di o.f. di W .

I problemi che riguardano la caratterizzazione di MP(W) in funzione di W e, viceversa, la ricerca di insiemi minimali che generano MP(W), aprono nuovi ambiti di ricerca e collocano in un contesto unitario importanti risultati, apparentemente non collegati tra loro, ottenuti in passato da numerosi studiosi (vedi /1/ , /2/ , /7/ , /9/ , /10/ , /11/ , /12/ e la bibliografia ivi riportata).

In questa nota, anche per non appesantire la trattazione, ci limitiamo a proporre, nell'ottica delineata, i casi più interessanti e precisamente:

1- il caso in cui si consideri l'insieme degli i.s.: sia W1 ,

2- il caso in cui si consideri l'insieme degli i.s.f.: sia W2 ,

3- il caso in cui si consideri l'insieme degli i.s. aventi tutti uno stesso rendimento di periodo i_0 : sia $S(i_0)$.

Precisato che risulta:

12) $MP(W) \supset W$

13) $MP(MP(W)) = MP(W)$

- chiamiamo **investimento generalizzato** (i.g.) ogni o.f. che appartiene ad MP(W1),
-.chiamiamo **investimento generalizzato favorevole** (i.g.f.) ogni o.f. che appartiene ad MP(W2),
- chiamiamo **investimento di Soper al tasso i_0** (i.S (i_0)) ogni o.f.che appartiene ad MP(S (i_0)).

(Ove non sia necessario specificare il valore del tasso parleremo semplicemente di investimento di Soper (i.S.)).

Analoghe risultano le definizioni per investimenti / finanziamenti non sfavorevoli e sfavorevoli.

In virtù delle (12) e (13), queste definizioni soddisfano a due condizioni intuitivamente irrinunciabili e cioè :

- che comunque si voglia definire un "investimento", anche gli i.s. siano "investimenti",

- che l'effettuazione di più investimenti dia luogo nel suo complesso ancora ad un investimento.

OSSERVAZIONE I - Ogni i.s., ovvero i.s.f., che non sia uniperiodale può esprimersi come somma di i.s., ovvero i.s.f., uniperiodali consecutivi aventi il suo stesso tir.
Infatti se è

$$B = \begin{matrix} a & b \\ p & q \end{matrix}$$

con $a < 0$ e $b > 0$, è anche

$$B = \sum B_r$$

$$\text{con } B_r = \begin{matrix} a \cdot (1+e)^r & -a \cdot (1+e)^{r+1} \\ r & r+1 \end{matrix}$$

essendo

$$e = (-\frac{b}{a})^{1/(q-p)} - 1$$

Segue allora facilmente da (7), (8), (9), (10) che :

TEOREMA 1 - Una o.f. è un i.g., oppure un i.g.f., oppure un i.S(i_0), se e solo se può esprimersi come somma di i.s. uniperiodali, oppure come somma di i.s.f. uniperiodali, oppure come somma di i.s. uniperiodali aventi lo stesso tasso di rendimento i_0.

OSSERVAZIONE II - In base alla relazione ricorrente (11), è facile mostrare ,per ricorrenza appunto, che se $\underline{w} = (w_0,......,w_{n-1})$ è soluzione del sistema

$$
18) \quad \begin{aligned}
& a_0 < 0 \\
& a_0 \cdot u_0 + a_1 \leq 0 \\
& a_0 \cdot u_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \leq 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-2} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-2} + \quad + a_{n-1} \leq 0 \\
& \\
& u_r > 0 \quad \text{per} \quad r = 0,...., n-1
\end{aligned}
$$

allora è ancora soluzione ogni $\underline{z} = (z_0,......., z_{n-1})$ con $z_h \geq w_h$ $h = 0,...., n-1$; inoltre nella regione definita dalle condizioni : $u_{n-1} > 0$ e $u_h \geq w_h$ per $h = 0,.., n-2$, il 'montante' dell'o.f. A :

$$a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-1} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-1} + \quad + a_{n-1} \cdot u_{n-1} + a_n$$

è funzione non crescente di ciascuno dei suoi argomenti.

Questa circostanza che generalizza noti risultati di Teicroew-Robicheck-Montalbano consente di estendere agli i.g. e agli i.g.f. alcune proprietà dimostrate dai citati autori ed altre dimostrate da P.Manca , e consente di affermare che se il sistema (14) ammette soluzioni allora necessariamente, tenuto conto della (1), deve risultare : $a_n > 0$.

In virtù dell' osservazione II, del teorema 1, del fatto che tutte e sole la scomposizioni di una o.f. A in o.f.s. uniperiodali consecutive si ottengono dalle (8),(9),(10), possiamo affermare che:

TEOREMA 2 - Una o.f. A è un i.g. se e solo se ammette soluzioni il sistema:

$$
14) \quad \begin{aligned}
& a_0 < 0 \\
& a_0 \cdot u_0 + a_1 \leq 0 \\
& a_0 \cdot u_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 \leq 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-2} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-2} + \dots + a_{n-1} \leq 0 \\
& a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-1} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-1} + \dots + a_n = 0 \\
& \\
& u_r > 0 \quad r = 0,....., n-1
\end{aligned}
$$

inoltre le soluzioni del sistema forniscono tutte e sole le scomposizioni dell'i.g. in i.s. uniperiodali .

Notiamo per inciso che posto $u_r = 1 + i_r$ per $r = 0,...., n-1$,il sistema (14) si scrive anche:

$$
14') \quad
\begin{aligned}
& a_0 < 0 \\
& a_0 \cdot (1+i_0) + a_1 < 0 \\
& a_0 \cdot (1+i_0)(1+i_1) + a_1 \cdot (1+i_1) + a_2 < 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_0 \cdot (1+i_0) \dots (1+i_{n-2}) + a_1 \cdot (1+i_1) \dots (1+i_{n-2}) + \dots + a_{n-1} < 0 \\
& a_0 \cdot (1+i_0) \dots (1+i_{n-1}) + a_1 \cdot (1+i_1) \dots (1+i_{n-1}) + \dots + a_n = 0 \\
& i_r > -1 \quad r = 0, \dots\dots, n-1
\end{aligned}
$$

TEOREMA 3 - Una o.f. A è un i.g.f. se e solo se ammette soluzioni il sistema

$$
15) \quad
\begin{aligned}
& a_0 < 0 \\
& a_0 \cdot u_0 + a_1 < 0 \\
& a_0 \cdot u_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 < 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-2} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-2} + \dots + a_{n-1} < 0 \\
& a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-1} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-1} + \dots + a_n = 0 \\
& u_r > 1 \quad r = 0, \dots\dots, n-1
\end{aligned}
$$

inoltre le soluzioni del sistema forniscono tutte e sole le scomposizioni dell'i.g.f. in i.s.f. uniperiodali.

TEOREMA 4 - Una o.f. A è un i.S. se e solo se ammette soluzioni il sistema

$$
16) \quad
\begin{aligned}
& a_0 < 0 \\
& a_0 \cdot u + a_1 \leq 0 \\
& a_0 \cdot u^2 + a_1 \cdot u + a_2 \leq 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& a_0 \cdot u^{n-1} + a_1 \cdot u^{n-2} + \dots + a_{n-1} \leq 0 \\
& a_0 \cdot u^n + a_1 \cdot u^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot u + a_n = 0 \\
& u > 0
\end{aligned}
$$

inoltre le soluzioni del sistema forniscono tutte e sole le scomposizioni dell'i.S. in i.s. uniperiodali aventi tutti lo stesso tasso di rendimento.

Segue dall'osservazione I che il sistema (16) ammette al più una soluzione, ed è poi immediato concludere che un i.S. risulta favorevole se e solo se, detta u_0 la soluzione di (16), risulta $u_0 > 1$.

Notiamo per inciso che posto $u = 1 + i$, il sistema (16) si scrive anche:

$$
16') \quad \begin{array}{l}
a_0 < 0 \\
a_0 \cdot (1+i) + a_1 \leq 0 \\
a_0 \cdot (1+i)^2 + a_1 \cdot (1+i) + a_2 \leq 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0 \cdot (1+i)^{n-1} + a_1 \cdot (1+i)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \leq 0 \\
a_0 \cdot (1+i)^n + a_1 \cdot (1+i)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (1+i) + a_n = 0 \\
i > -1
\end{array}
$$

OSSERVAZIONE III - Vale la pena sottolineare che nella scomposizione di un i.g., di un i.g.f., di un i.S., in i.s. uniperiodali - attraverso i sistemi (14) (15) (16) - non necessariamente gli i.s. risultano consecutivi.
Tutte e sole le scomposizione di un i.g. in i.s. **consecutivi** si ottengono dal sistema

$$
14a) \quad \begin{array}{l}
a_0 < 0 \\
a_0 \cdot u_0 + a_1 < 0 \\
a_0 \cdot u_0 \cdot u_1 + a_1 \cdot u_1 + a_2 < 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-2} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-2} + \dots + a_{n-1} < 0 \\
a_0 \cdot u_0 \dots u_{n-1} + a_1 \cdot u_1 \dots u_{n-1} + \dots + a_n = 0
\end{array}
$$

con i vincoli : $u_r > 0 \quad r = 0,\dots\dots, n-1$,

mentre con i vincoli ulteriori: $u_r > 1 \quad r = 0,\dots\dots, n-1$, si ottengono tutte e sole le scomposizioni di una i.g.f. A in i.s.f. uniperiodali **consecutivi.**
Non insistiamo sul fatto che i risultati che presentiamo nella presente nota potrebbero enunciarsi , con ovvie varianti, facendo riferimento a sistemi di vincoli ottenuti dai sistemi (14) (15) (16) sostituendo alle diseguaglianze deboli ($\leq$) diseguaglianze forti ($<$).

§ 4.

Si dimostra facilmente (/5/)che le condizioni (8),(9),(10) risultano soddisfatte se e solo se l'o.f. A ammette almeno due poste di segno contrario:

TEOREMA 5 - L'o.f. A è esprimibile come somma di o.f.s. uniperiodali consecutive se e solo possiede almeno due poste di segno opposto.

Si dimostra inoltre facilmente (/5/) che la classe degli i.g. è caratterizzata dal seguente:

TEOREMA 6 - Una o.f. è un i.g. se e solo se risulta

$$a_0 < 0 \quad e \quad a_n > 0 .$$

Non esistono semplici caratterizzazione degli investimenti di Soper; a questo riguardo vale la pena osservare che la somma di i.S. aventi diverso tir non sempre dà luogo ad un i.S. (cfr./5/) come si può verificare considerando l'o.f. 'somma' dei seguenti investimenti di Soper:

$$C = \begin{matrix} -30 , & 100 , & 0 , & -0{,}3 , & 1 \\ 0 , & 1 , & 2 , & 3 , & 4 \end{matrix}$$

$$D = \begin{matrix} -1 , & 0 , & 1{,}21, & -100 , & 110 \\ 0 , & 1 , & 2 , & 3 , & 4 \end{matrix}$$

Per caratterizzare gli i.g.f. si osservi che se A è un i.g.f. allora necessariamente risulta

$$a_0 < 0 , \ a_n > 0 , \ s_n > 0$$

ma queste condizioni non sono sufficenti a caratterizzare un i.g.f. come dimostra la o.f.:

$$B = \begin{matrix} -1 , & 3 , & -2 , & 1 \\ 0 , & 1 , & 2 , & 3 \end{matrix}$$

in quanto, pur essendo $s_4 = (-1+3-2+1) > 0$, non ha soluzione il sistema

$$\begin{aligned} & -u_0 + 3 \le 0 \\ & (-u_0 + 3) \cdot u_1 - 2 \le 0 \\ & ((-u_0 + 3) \cdot u_1 - 2) \cdot u_2 + 1 = 0 \\ & u_0 > 1 , u_1 > 1 , u_2 > 1 \end{aligned}$$

Vale peraltro il seguente :

TEOREMA 7 - Condizione necessaria e sufficente affinchè una o.f. A sia un i.g.f., è che esista una sequenza non decrescente di numeri reali $g_0,......,g_n$ per la quale risulti:

19) $g_0 = 0$

$g_r \le s_r$ per $r = 0,....., n-1$

$g_n = s_n$

(dove $s_0,......,s_n$ è il flusso cumulato di cassa di A).

Dimostriamo la necessità.

Se A è un i.g.f., e per $r = 0,\dots\dots, n\text{-}1$, gli i.s.f.

$$A_r = \begin{matrix} x_r\, , y_r \\ \\ r\quad , r+1 \end{matrix}$$

costituiscono una scomposizione di A in i.s.f. uniperiodali consecutivi, se poniamo

$$20)\qquad d_r = y_r + x_r$$

dalle (7a) (7b) otteniamo facilmente

$$21)\qquad x_r = s_r - g_r \qquad \text{per } r = 0,\dots\dots, n\text{-}1$$

ove $\quad s_r = a_0 + \dots\dots + a_r \qquad$ per $r = 0,\dots\dots, n$

e ove $g_0 = 0$

$$g_r = d_0 + \dots\dots + d_{r\text{-}1} \qquad \text{per } r = 1,\dots\dots, n$$

Per ipotesi è $d_r \geq 0$ per $r = 0,\dots\dots, n\text{-}1$ e dunque la sequenza $g_0,\dots\dots,g_n$ risulta non decrescente, inoltre essendo $x_r \leq 0$ per $r = 0,\dots, n\text{-}1$, risulta altresi' per la (20) $s_r \leq g_r$ per $r = 0,\dots\dots, n\text{-}1$, e cioè anche per la (1) $a_0 < 0$ ed $s_r \leq g_r$ per $r = 1,\dots\dots, n\text{-}1$.

Poichè ancora dalle (7a) e (7b) si ottiene

$$22)\qquad \sum_r a_r = \sum_r (y_r + x_r)$$

risulta $g_n = s_n$

Dimostriamo la sufficenza.

Sussistendo le (19), per quanto appena visto, risulta intanto $s_0 \leq g_0$ cioè $a_0 < 0$, in quanto per la (1) è $a_0 \neq 0$, inoltre essendo $a_n = g_n - s_{n\text{-}1}$ è anche $a_n = g_n - s_{n\text{-}1} \geq g_{n\text{-}1} - s_{n\text{-}1} \geq 0$.

Cioè $a_n > 0$ in quanto per la (1) è $a_n \neq 0$

Poichè la sequenza $g_0, \ldots, g_n$ è non decrescente, poniamo

$$d_r = g_{r+1} - g_r \geq 0 \qquad \text{per } r = 0, \ldots, n-1$$

$$x_r = s_r - g_r \qquad \text{per } r = 0, \ldots, n-1$$

$$y_r = d_r - (s_r - g_r) \qquad \text{per } r = 0, \ldots, n-1$$

La successione

$$A_r = \begin{matrix} x_r, & y_r \\ r, & r+1 \end{matrix}$$

definisce allora una scomposizione di A in i.s.f. uniperiodali.

§. 5

Come abbiamo visto se A è una o.f. e possiede almeno due poste di segno opposto, è sempre possibile esprimere A come somma di o.f.s. uniperiodali consecutive:

$$5) \quad A = \sum_{0}^{n-1} A_r$$

$$\text{con} \qquad A_r = \begin{matrix} x_r, & y_r \\ r, & r+1 \end{matrix}$$

Se allora vale la (5) chiamiamo **risultato complessivo** di A la somma algebrica delle rate di A , e **risultato periodale** di A relativo al periodo (r, r+1) la somma algebrica delle rate di A_r.

Posto allora

$$20) \quad d_r = y_r + x_r$$

e posto

22) $g_0 = 0$

$$g_r = d_0 + \dots + d_{r-1} \qquad r = 1,\dots, n-1$$

risulta

$$x_r = s_r - g_r \qquad \text{per } r = 0,\dots, n-1$$

ed anche

$$s_n = g_n$$

Poichè dalle (8) segue :

24) $y_r + x_r = -i_r \cdot x_r \qquad r = 0,\dots, n-1$

risulta ancora per le o.f.s. A_r che non sono l'o.f. nulla:

25) $u_r = (g_{r+1} - s_r) / (g_r - s_r) \qquad r = 0,\dots, n-1$

ovvero

26) $i_r = d_r / (g_r - s_r) \qquad r = 0,\dots, n-1$

26') $i_r = (g_{r+1} - g_r) / (g_r - s_r) \qquad r = 0,\dots, n-1$

La scomposizione di una o.f. A in o.f.s. uniperiodali consecutive secondo la (5), ovvero la ripartizione del risultato complessivo di A in risultati parziali di periodo secondo le (20) e (23) consentono di valutare una o.f. attraverso la successione delle o.f.s. uniperiodali che la compongono.

In particolare se si adotta quale parametro di valutazione il risultato economico attualizzato (r.e.a.):

$$V_A(i) = \sum_{0}^{n} a_r \,.\, (1+i)^{-r}$$

per la linearità del r.e.a. dalla (22) abbiamo

$$V_A(i) = \sum_{0}^{n-1} V_{A_r}(i)$$

ed essendo

$$V_{A_r}(i) = (1+i)^{-r} \cdot (x_r + y_r \cdot (1+i)^{-1})$$

per le (8) e (9) risulta anche (cfr./6/)

$$V_A(i) = \Sigma\ (1+i)^{-r-1} \cdot (i - i_r) \cdot P_r$$

La possibilità di esprimere il valore attuale di una o.f. come somma di altrettante **quote finanziarie periodali di competenza** consente di valutare in termini coerenti, anche sotto un profilo "più aderente ad un'ottica aziendale" , sia ogni singola o.f. che portafogli complessi formati da diversificate tipologie di o.f..
Infatti, essendo possibile esprimere ogni o.f. costituente come somma di o.f.s. (uniperiodali consecutive, ciascuna valutata secondo uno specifico tasso di valutazione funzione del rischio e della fonte di provenienza dei capitali), è possibile valutare, periodo per periodo, l'evoluzione del portafoglio, l'influenza su esso di nuove acquisizioni e/o cessioni , le politiche di indebitamento
Di questi temi si è occupato ripetutamente ed esaurientemente L.Peccati, e li ha esposti organicamente in /6/e /7/.

Se invece si adotta quale parametro di valutazione il risultato complessivo,come di fatto si verifica in ambito contabile, le formule (20),(23) e seguenti, precisano, in termini di risultato di esercizio, le circostanze che consentono di ripartire il risultato complessivo nei vari esercizi, i conseguenti valori dei tassi attivi o passivi di periodo che ogni possibile ripartizione necessariamente comporta (anche ove non vengano esplicitamente considerati).
In particolare si deve notare come un risultato complessivo positivo non sempre possa essere ripartito in risultati di esercizio tutti positivi (ciò accade se e solo se l'o.f. considerata è un i.g.f.): questa circostanze ha notevoli implicazioni nelle problematiche che concernono la determinazione degli utili di esercizio in fase di redazione di bilancio nonchè di valutazione di azienda.

BIBLIOGRAFIA

/1/ Gronchi S. "On investment criteria based on the internal rate of return" Oxford Economic Papers, 1986.

/2/ Gronchi S. "Tasso interno di rendimento e valutazione dei progetti : un'analisi teorica" Collana Istituto di Economia ,Siena ,1984.

/3/ Manca P. "Operazioni finanziarie di soper e operazioni di puro investimento secondo T-R-M-" Atti XII Convegno Amases ,Palermo, 1988.

/4/ Manca P. "On the splitting up of a project into uniperiodic simple projects" Euro Working Group on Financial - Catania 1989. Rivista Amases, anno 12, fascicolo 1, 1990.

/5/ Manca P. "Ancora qualche osservazione sulla valutazione delle operazioni finanziarie" Atti XIV Convegno Amases , Pescara, 1990.

/6/ Peccati L. "DCF e risultati di periodo" Atti XI Convegno Amases - Aosta - 1987.

/7/ Peccati L. "Valutazione analitica e sintetica di attività finanziarie" Torino-Milano , 1990.

/8/ Peccati L. "Multiperiod analysis of a levered portfolio" Rivista AMASES , 1990.

/9/ Pitchford J.D. Hagger A.J. "A note on the marginal efficiency of capital" The Economic Journal, 1959.

/10/ Soper C.S. "The marginal efficency of capital : a further note" The Economic Journal, 1959.

/11/ Teichroew D. Robicheck A. Montalbano M. "Mathematical analysis of rates of return under certainty" Management Science, 1965.

/12/ Teichroew D. Robicheck A. Montalbano M. "An analysis of criteria for investment and financial decision under certainty" Management Science, 1965.