**Report n.54**

# Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato

**Riccardo CAMBINI**

Pisa, marzo 1992

# Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato

R. Cambini

## §1. *Introduzione*

Uno degli scopi principali di questo lavoro consiste nello stabilire, per un problema di estremo vincolato avente per regione ammissibile un insieme stellato di vertice $x_0$, condizioni necessarie e/o sufficienti di ottimalità per $x_0$ sia in ipotesi di concavità generalizzata che di sottodifferenziabilità e differenziabilità per la funzione obiettivo.
L'approccio seguito consiste nel determinare inizialmente (paragrafo 2) condizioni di ottimalità per un punto $x_0$ di una generica regione ammissibile S per mezzo delle direzioni del cono tangente ad S in $x_0$; in seguito (paragrafo 3) i risultati ottenuti verranno particolarizzati al caso in cui la regione ammissibile S sia un insieme stellato chiuso di vertice $x_0$, ipotesi che permetterà di determinare, a differenza del caso più generale precedentemente analizzato, condizioni di ottimalità del secondo ordine. Nel paragrafo 4 inoltre sarà evidenziato il ruolo della concavità generalizzata, presentata in una forma più generale di quella usualmente riportata nella letteratura, per mezzo della quale saremo in grado di stabilire condizioni di ottimalità per il vertice di un insieme stellato generico.
Poiché un insieme stellato generalizza la situazione in cui $x_0$ è il vertice di una regione poliedrica, i risultati stabiliti possono essere utilmente impiegati in vari modi (paragrafo 5) ed in particolare per affrontare classi di problemi di estremo vincolato che si prestano ad essere risolti tramite procedure di tipo simplex-like che generano una sequenza finita di vertici.

## §2. *Condizioni di ottimalità espresse tramite il cono tangente ad un insieme*

Denotiamo con P(S) il seguente problema di massimo:

$$P(S): \begin{cases} \max f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

dove f è una funzione reale $f: A \rightarrow \Re$, con A aperto di $\Re^n$, ed $S \subseteq A$ è la regione ammissibile del problema[1].

In seguito denoteremo con:

- $C_{x_0}$ un cono di vertice $x_0$, ovvero un insieme di $\Re^n$ tale che $x \in C_{x_0}$ implica $x_0+\lambda(x-x_0) \in C_{x_0}$ $\forall \lambda \geq 0$; in seguito considereremo soltanto coni $C_{x_0}$ non banali[2],
- $\mathcal{D}$ l'insieme delle direzioni di $C_{x_0}$, ovvero l'insieme dei vettori di norma unitaria definito da $\mathcal{D}=\{d \in \Re^n: \|d\|=1, x_0+d \in C_{x_0}\}$,
- $r_d$ il raggio di $C_{x_0}$ generato dalla direzione $d \in \mathcal{D}$, ovvero l'insieme $r_d=\{x \in C_{x_0}: x=x_0+\lambda d, \forall \lambda \geq 0\}$,
- $C_{x_0}(U)$ il cono di vertice $x_0$ generato dall'insieme $U \subseteq \Re^n$, ovvero l'insieme $C_{x_0}(U)=\{x \in \Re^n: x=x_0+\lambda(z-x_0), \forall \lambda \geq 0, \forall z \in U\}$,
- $C_{x_0}(d_\varepsilon)$ il cono di vertice $x_0$ generato dalla sfera di centro d e raggio $\varepsilon>0$, ovvero $C_{x_0}(d_\varepsilon)=\{x \in \Re^n: x=x_0+\lambda(z-x_0), \forall \lambda \geq 0, \forall z: \|z-d\|<\varepsilon\}$.

In questo paragrafo stabiliremo alcune condizioni di ottimalità per il problema P(S), sia in ipotesi di sottodifferenziabilità che di differenziabilità, nelle quali un ruolo fondamentale sarà svolto dal cono tangente ad S nel punto $x_0$ di cui riportiamo, per ragioni di completezza, la definizione data in [3]:

**Definizione 2.1**

Dato un insieme non vuoto $S \subseteq \Re^n$ ed un punto $x_0$ appartenente alla chiusura di S, si dice cono tangente ad S nel punto $x_0$ il cono $T(S,x_0)$ di vertice l'origine definito come:

$$T(S,x_0)=\{x \in \Re^n: \exists \{x_k\} \subset S, x_k \rightarrow x_0, \exists \{\lambda_k\} \subset \Re^{++}, \lambda_k \rightarrow +\infty, x=\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k(x_k-x_0)\}.$$

---

[1]Utilizzeremo la simbologia P(S) poiché, come vedremo, avremo bisogno di riferirci a problemi aventi la stessa funzione obiettivo ma regioni ammissibili diverse.

[2]Un cono è detto non banale se è diverso dall'insieme vuoto e dall'insieme composto dal solo vertice.

**Osservazione 2.1**

Poiché siamo interessati a considerare le direzioni del cono tangente, ovvero i suoi vettori di norma unitaria, si osservi che quest'ultimo può essere equivalentemente espresso nella forma:

$$T(S,x_0)=\{0\}\cup\{x\in\Re^n: x=\lambda d, \forall\lambda\geq 0, \forall d: \exists\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}, x_k\to x_0, d=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\}.$$

Denoteremo inoltre con $\mathcal{D}_T=\{d\in\Re^n: \exists\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}, x_k\to x_0, d=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\}$

l'insieme delle direzioni di $T(S,x_0)$.

Facciamo notare che nel caso in cui la regione ammissibile S sia costituita dal solo punto $x_0$, si ha $T(S,x_0)=\{0\}$ e $\mathcal{D}_T=\emptyset$. In tale situazione $x_0$ è ovviamente punto di massimo del problema; per tale ragione da ora in poi supporremo che $x_0$ sia punto di accumulazione per S o, equivalentemente, che sia $\mathcal{D}_T\neq\emptyset$.

Vale la seguente importante proprietà:

**Proprietà 2.1**

Consideriamo una funzione reale $f:A\to\Re$ con A aperto di $\Re^n$, un insieme $S\subseteq A$ e supponiamo che la funzione f sia direzionalmente derivabile[3] e localmente Lipschitziana[4] nel punto $x_0\in S$.

Per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$, considerata una qualsiasi successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad $x_0$ tale che $d=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$, si ha:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|}=\frac{\partial f}{\partial d}(x_0). \tag{2.1}$$

**Dim** Posto $t_k=\|x_k-x_0\|$ e $d_k=\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$, risulta $x_k=x_0+t_kd_k$ e quindi:

$$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|}=\frac{f(x_0+t_kd_k)-f(x_0+t_kd)}{t_k}+\frac{f(x_0+t_kd)-f(x_0)}{t_k}.$$

---

[3]Ricordiamo che una funzione reale f definita su un insieme aperto $A\subseteq\Re^n$ è detta direzionalmente derivabile in un punto $x_0\in A$ se ammette in $x_0$ derivata direzionale lungo ogni direzione $d\in\Re^n$, ovvero se per ogni direzione $d\in\Re^n$ con $\|d\|=1$ esiste finito il limite $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t}$.

[4]Una funzione reale f definita su un insieme aperto $A\subseteq\Re^n$ è detta localmente Lipschitziana in un punto $x_0\in A$ se esiste un intorno $U\subseteq A$ di $x_0$ ed una costante reale $L>0$ tale che $|f(x)-f(y)|\leq L\|x-y\|$ $\forall x,y\in U$.

Per la locale Lipschitzianità in $x_0$ della f abbiamo che esiste una costante reale $L>0$ tale che definitivamente $|f(x_0+t_kd_k)-f(x_0+t_kd)|\leq Lt_k\|d_k-d\|$; ne consegue quindi che $0\leq \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|f(x_0+t_kd_k)-f(x_0+t_kd)|}{t_k} \leq \lim\limits_{k\to+\infty} L\|d_k-d\|=0$ per cui risulta

$\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f(x_0+t_kd_k)-f(x_0+t_kd)}{t_k}=0$. Poiché quindi per la direzionale derivabilità in $x_0$ della f abbiamo $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)= \lim\limits_{t\to0^+} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f(x_0+t_kd)-f(x_0)}{t_k}$ risulta:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(x_0+t_kd_k)-f(x_0+t_kd)}{t_k} + \lim_{k\to+\infty} \frac{f(x_0+t_kd)-f(x_0)}{t_k} = \frac{\partial f}{\partial d}(x_0). \quad \blacklozenge$$

La precedente proprietà permette di stabilire le seguenti condizioni sufficienti di ottimalità:

**Teorema 2.1**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana nel punto $x_0\in S$.

Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale per il problema P(S) è che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0\ \forall d\in \mathcal{D}_T$ ed inoltre che per ogni direzione $d\in\mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale per il problema $P(C_{x_0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** Supponiamo per assurdo che il punto $x_0$ non sia di massimo locale per il problema P(S) e quindi che per ogni intorno $U\subseteq A$ di $x_0$ esista un punto $x\in S\cap U\setminus\{x_0\}$ tale che $f(x)>f(x_0)$. Di conseguenza siamo in grado di determinare una successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad $x_0$ tale che $f(x_k)>f(x_0)\ \forall k>0$; definendo così $d_k=\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$ otteniamo una successione di direzioni appartenenti alla sfera unitaria $\{x\in\Re^n: \|x\|=1\}$ che è un insieme compatto.

Dalla successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ è perciò possibile estrarre una sottosuccessione $\{\overline{x}_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad $x_0$ tale che $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\overline{x}_k-x_0}{\|\overline{x}_k-x_0\|} = \overline{d}\in\mathcal{D}_T$ e, per la (2.1) e poiché per ipotesi $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{d}}(x_0)= \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{f(\overline{x}_k)-f(x_0)}{\|\overline{x}_k-x_0\|}=0$.

Questa successione però $\forall \varepsilon>0$ appartiene definitivamente a $C_{x_0}(\bar{d}_\varepsilon)\cap S\setminus\{x_0\}$ e quindi, essendo $f(\bar{x}_k)>f(x_0)$ $\forall k>0$, il punto $x_0$ non può essere di massimo locale per il problema $P(C_{x_0}(\bar{d}_\varepsilon)\cap S)$ il che è assurdo poiché nega le ipotesi. ♦

**Teorema 2.2**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana nel punto $x_0 \in S$.
Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per il problema P(S) è che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \le 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre che per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale stretto per il problema $P(C_{x_0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** Analoga a quella del teorema 2.1. ♦

Conseguenza diretta del teorema precedente è la seguente pratica condizione sufficiente di ottimalità del punto $x_0 \in S$ per il problema P(S):

**Teorema 2.3**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana nel punto $x_0 \in S$.
Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per il problema P(S) è che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)<0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$.

**Dim** Segue direttamente dal teorema 2.2 . ♦

Facciamo notare che le condizioni sufficienti di ottimalità date nei teoremi 2.1 e 2.2 sono in realtà anche necessarie:

**Teorema 2.4**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana nel punto $x_0 \in S$.
Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) è che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \le 0$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre che per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale [stretto] per il problema $P(C_{x_0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** La sufficienza è data dai teoremi 2.1 e 2.2, la necessarietà segue osservando che banalmente se $x_0$ è un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) lo è anche per $P(C_{x0}(d_\varepsilon)\cap S)$ e che se per una direzione $d\in\mathcal{D}_T$ risultasse $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0$, presa una qualsiasi successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad $x_0$ tale che $d=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$, per la (2.1) avremmo definitivamente $f(x_k)>f(x_0)$ il che nega l'ottimalità di $x_0$ per il problema P(S). ◆

Consideriamo adesso il problema P(S) nell'ipotesi in cui la funzione obiettivo f sia differenziabile in $x_0\in S$[5].

E' noto che se la funzione f è differenziabile <u>con continuità</u> nel punto $x_0$ allora essa è anche localmente Lipschitziana in $x_0$ ed inoltre $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=d^T\nabla f(x_0)$; per tale classe quindi le condizioni di ottimalità espresse nei teoremi precedenti valgono con la sostituzione di $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ con $d^T\nabla f(x_0)$.

Vedremo adesso come quest'ultimo risultato si possa estendere alla classe delle funzioni differenziabili in $x_0$ che, come è noto, non garantiscono la Lipschitzianità locale (basta considerare al riguardo la funzione reale a valori reali $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|^3}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0\\ 0 & \text{per } x=0\end{cases}$, che risulta derivabile nello zero ma non è in esso localmente Lipschitziana). Una tale estensione ha la sua ragione logica nel fatto che le condizioni di ottimalità di cui ai teoremi 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 sono basate sul fatto che il limite $\lim_{k\to+\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{\|x_k-x_0\|}=\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ esiste finito e coinvolge una direzione del cono tangente $T(S,x_0)$; tale proprietà vale anche per una funzione differenziabile in $x_0$ :

[5]Facciamo notare che questa classe di funzioni non è contenuta in quella delle funzioni direzionalmente derivabili e localmente Lipschitziane nel punto $x_0$ ; basta considerare ad esempio la funzione $f(x)=|x|$ che è nello zero direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana ma non differenziabile.

**Proprietà 2.2**

Consideriamo una funzione reale $f: A \rightarrow \Re$ con A aperto di $\Re^n$, un insieme $S \subseteq A$ e supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $x_0 \in S$.

Per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$, considerata una qualsiasi successione $\{x_k\} \subset S \setminus \{x_0\}$ convergente ad $x_0$ tale che $d = \lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|}$, risulta $\lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} = d^T \nabla f(x_0)$.

**Dim** Per la differenziabilità in $x_0$ della f abbiamo che:

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} = \frac{(x_k - x_0)^T}{\|x_k - x_0\|} \nabla f(x_0) + \sigma(x_k, x_0) \quad \forall k > 0 \quad \text{con} \quad \lim_{x_k \to x_0} \sigma(x_k, x_0) = 0;$$

la tesi segue quindi facendo tendere k a $+\infty$. ♦

Con un ragionamento analogo a quello seguito nei teoremi 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 è pertanto possibile ottenere, sotto ipotesi di differenziabilità in $x_0$ della funzione obiettivo f, condizioni sufficienti e/o necessarie di ottimalità che sfruttano le derivate direzionali della funzione f in $x_0$ limitatamente alle direzioni del cono tangente $T(S, x_0)$:

**Teorema 2.5**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $x_0 \in S$. Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per il problema P(S) è che sia $d^T \nabla f(x_0) < 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_T$.

**Osservazione 2.2**

La condizione sufficiente di ottimalità di cui al precedente teorema è espressa in una forma assai generale; essa implica, tra l'altro, che se il vertice di un poliedro verifica la condizioni di Kuhn-Tucker con moltiplicatori strettamente positivi, allora tale vertice è di ottimo locale per il problema anche in assenza di ipotesi di concavità generalizzata.

**Teorema 2.6**

Consideriamo il problema P(S) e supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $x_0 \in S$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) è che sia $d^T \nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre che per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $d^T \nabla f(x_0) = 0$ esista un $\varepsilon > 0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale [stretto] per il problema $P(C_{x_0}(d_\varepsilon) \cap S)$.

**Osservazione 2.3**

Le condizioni di ottimalità espresse dai precedenti teoremi coinvolgono alcune direzioni particolari del cono tangente $T(S,x_0)$. E' naturale allora domandarsi se vi è una relazione diretta tra l'ottimalità di un punto $x_0$ per il problema P(S) e l'ottimalità di $x_0$ rispetto al problema $P(T(S,x_0)\cap S)$. La risposta è in generale negativa: nel seguente esempio 2.1 vedremo infatti un problema per il quale il punto $x_0=(0,0)$ non è di massimo locale per il problema P(S) ma lo è per $P(T(S,x_0)\cap S)$ mentre nel successivo esempio 2.2 vedremo un caso in cui si verifica esattamente la situazione opposta.

**Esempio 2.1**

Consideriamo il problema $P(S): \begin{cases} \max f(x,y)=-y \\ (x,y)\in S=\{(x,y)\in\Re^2:\ x^3+y\geq 0\} \end{cases}$ .

Come possiamo facilmente verificare il problema P(S) non ammette ottimo finito mentre il punto $x_0=(0,0)$ è invece di massimo locale per il problema $P(T(S,x_0)\cap S)$ dove $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2:\ y\geq 0\}$ è il cono tangente ad S in $x_0$.

Verifichiamo adesso le condizioni del teorema 2.4: risulta $\nabla f(x_0)=(0,-1)$, di conseguenza abbiamo $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ ed in particolare si ha $d^T\nabla f(x_0)=0$ soltanto per le direzioni del cono tangente $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ e $\tilde{d}=(-1,0)\in\mathcal{D}_T$ ; per la direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ è però semplice verificare che $\forall\varepsilon>0$ il punto $x_0$ non è di massimo locale per il problema $P(C_{x_0}(\bar{d}_\varepsilon)\cap S)$.

**Esempio 2.2**

Consideriamo il problema $P(S): \begin{cases} \max f(x,y)=x^2-y \\ (x,y)\in S=\{(x,y)\in\Re^2:\ x^2-y\leq 0\} \end{cases}$ .

Il punto $x_0=(0,0)$ è di massimo locale per il problema P(S) mentre, considerando il cono tangente ad S in $x_0$ $T(S,x_0)=\{(x,y)\in\Re^2:\ y\geq 0\}$, il problema $P(T(S,x_0)\cap S)$ non ammette ottimo finito. Verifichiamo adesso le condizioni del teorema 2.4: risulta $\nabla f(x_0)=(0,-1)$ e $\nabla^2 f(x_0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , di conseguenza abbiamo $d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in\mathcal{D}_T$ ed in particolare si ha $d^T\nabla f(x_0)=0$ soltanto per le direzioni del cono tangente $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ e $\tilde{d}=(-1,0)\in\mathcal{D}_T$ ; per queste direzioni possiamo facilmente verificare che esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ è di massimo locale per i problemi $P(C_{x_0}(\bar{d}_\varepsilon)\cap S)$ e $P(C_{x_0}(\tilde{d}_\varepsilon)\cap S)$.

## §3. *Condizioni di ottimalità relative al vertice di un insieme stellato*

Uno degli obiettivi principali di questo lavoro consiste nello stabilire alcune condizioni di ottimalità per il problema P(S) nel caso in cui la regione ammissibile S sia un insieme stellato non vuoto, ovvero un insieme del tipo $S=C_{x_0}\cap A\neq\emptyset$ con $C_{x_0}$ cono di vertice $x_0$.

In questo paragrafo considereremo il caso in cui $C_{x_0}$ è un cono chiuso; tale caso generalizza la situazione in cui $x_0$ è il vertice di una regione poliedrica e quindi i risultati che troveremo potranno essere impiegati per affrontare classi di problemi di estremo vincolato che si prestano ad essere risolti tramite procedure di tipo simplex-like che generano una sequenza finita di vertici [4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15].

Si osservi che la chiusura di $C_{x_0}$ implica la coincidenza del cono tangente $T(S,x_0)$ con il cono $C_0$ di vertice l'origine generato dalle direzioni $d\in\mathcal{D}$ di $C_{x_0}$; si possono quindi specificare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente per il caso differenziabile con la semplice sostituzione $\mathcal{D}_T=\mathcal{D}$:

**Teorema 3.1**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x_0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x_0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $x_0$.

Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per il problema P(S) è che sia $d^T\nabla f(x_0)<0\ \forall d\in\mathcal{D}$.

Facciamo notare che il teorema precedente ha senso esclusivamente nel caso in cui il cono $C_{x_0}$ sia un cono puntato[6], nel caso contrario infatti la condizione "$d^T\nabla f(x_0)<0\ \forall d\in\mathcal{D}$" non può mai essere garantita.

**Teorema 3.2**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x_0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x_0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f sia differenziabile nel punto $x_0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) è che sia $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in C_0$ ed inoltre che per ogni direzione $d\in C_0$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale [stretto] per il problema $P(C_{x_0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

---

[6] Ricordiamo che un cono $C_{x_0}$ di vertice $x_0$ è detto puntato se $d\in\mathcal{D}$ implica che $-d\notin\mathcal{D}$.

Relativamente all'esempio 2.2 è facile verificare che in corrispondenza della direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ si ha $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$ e $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}=2>0$; considerando invece il problema P(S): $\begin{cases} \max f(x,y)=-x^2+y \\ (x,y)\in S=\{(x,y)\in\Re^2: -x^2+y\leq 0\} \end{cases}$ abbiamo che $x_0=(0,0)$ è ancora punto di massimo locale ed in corrispondenza della direzione $\bar{d}=(1,0)\in\mathcal{D}_T$ si ha $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$ e $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}=-2<0$. In corrispondenza di una direzione $d\in\mathcal{D}_T$ del cono tangente in cui la derivata direzionale è nulla, niente si può quindi dire in generale sul segno di $d^T\nabla^2 f(x_0)d$; tale situazione può essere però rimossa nel caso in cui la regione ammissibile S sia un insieme stellato non vuoto $S=C_{x0}\cap A$ con $C_{x0}$ cono chiuso:

**Teorema 3.3**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f ammetta in $x_0$ derivate seconde continue. Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale per il problema P(S) è che sia $d^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall d\in C_0$, $d^T\nabla^2 f(x_0)d\leq 0$ $\forall d\in C_0$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ ed inoltre che per ogni direzione $d\in C_0$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2 f(x_0)d=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale per il problema $P(C_{x0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** Supponiamo per assurdo che il punto $x_0$ non sia di massimo locale per il problema P(S); per il teorema 3.2 e per le ipotesi, deve allora esistere una direzione $\bar{d}\in\mathcal{D}$ tale che $\bar{d}^T\nabla f(x_0)=0$, $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}<0$ e $\forall\varepsilon>0$ il punto $x_0$ non è di massimo locale per il problema $P(C_{x0}(\bar{d}_\varepsilon)\cap S)$. Siamo quindi in grado di determinare una successione di punti $\{\bar{x}_k\}\subset C_{x0}\cap A\setminus\{x_0\}$, $\bar{x}_k\to x_0$, tale che $\lim_{k\to+\infty}\frac{\bar{x}_k-x_0}{\|\bar{x}_k-x_0\|}=\bar{d}$ e $f(\bar{x}_k)>f(x_0)$ $\forall k>0$; posto quindi $\lambda_k=\|\bar{x}_k-x_0\|$ e $d_k=\frac{\bar{x}_k-x_0}{\|\bar{x}_k-x_0\|}$, abbiamo per il polinomio di Taylor con resto di Peano arrestato al secondo ordine:

$$f(\bar{x}_k)=f(x_0)+\lambda_k d_k^T\nabla f(x_0)+\frac{1}{2}\lambda_k^2 d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k+\lambda_k^2\sigma(\lambda_k,0) \quad \text{con} \quad \lim_{k\to+\infty}\sigma(\lambda_k,0)=0$$

da cui, essendo $f(\bar{x}_k)>f(x_0)$, $\lambda_k>0$ e $d_k^T\nabla f(x_0)\leq 0$ $\forall k>0$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\lambda_k^2 d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k+\lambda_k^2\sigma(\lambda_k,0)>0 \quad \text{ovvero} \quad d_k^T\nabla^2 f(x_0)d_k>-2\sigma(\lambda_k,0).$$

Passando al limite per $k\to+\infty$ abbiamo quindi $\bar{d}^T\nabla^2 f(x_0)\bar{d}\geq 0$ il che è assurdo. ♦

**Teorema 3.4**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f ammetta in $x_0$ derivate seconde continue. Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per il problema P(S) è che sia $d^T\nabla F(x_0)\leq 0\ \forall d\in C_0$, $d^T\nabla^2F(x_0)d\leq 0\ \forall d\in C_0$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ ed inoltre che per ogni direzione $d\in C_0$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2F(x_0)d=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale stretto per il problema $P(C_{x0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** Analoga a quella del teorema 3.3 . ◆

**Teorema 3.5**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f ammetta in $x_0$ derivate seconde continue.

Condizione sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale stretto per P(S) è che sia $d^T\nabla f(x_0)\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}$ e $d^T\nabla^2f(x_0)d<0\ \forall d\in\mathcal{D}$ tale che $d^T\nabla f(x_0)=0$.

**Dim** Segue direttamente dal teorema 3.4 . ◆

Come nel paragrafo precedente, le condizioni sufficienti per l'ottimalità del punto $x_0$ rispetto al problema P(S) sono in realtà anche necessarie:

**Teorema 3.6**

Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x0}\cap A$ insieme stellato non vuoto e $C_{x0}$ cono chiuso, e supponiamo che la funzione f ammetta in $x_0$ derivate seconde continue. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) è che sia $d^T\nabla F(x_0)\leq 0\ \forall d\in C_0$, $d^T\nabla^2F(x_0)d\leq 0\ \forall d\in C_0$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ ed inoltre che per ogni direzione $d\in C_0$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2F(x_0)d=0$ esista un $\varepsilon>0$ tale che il punto $x_0$ sia di massimo locale [stretto] per il problema $P(C_{x0}(d_\varepsilon)\cap S)$.

**Dim** La sufficienza è stata dimostrata nei teoremi 3.3 e 3.4 ; la necessarietà segue osservando che se $x_0$ è un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) lo è anche banalmente per $P(C_{x0}(d_\varepsilon)\cap S)$, che per il teorema 3.2 deve necessariamente essere $d^T\nabla F(x_0)\leq 0\ \forall d\in C_0$ e che se esistesse una direzione $d\in\mathcal{D}$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2F(x_0)d>0$ il punto $x_0$ non sarebbe di massimo locale per il problema P(S). ◆

## §4. *Condizioni di ottimalità relative al vertice di un insieme stellato in ipotesi di concavità generalizzata*

In questo paragrafo considereremo il problema P(S) nel caso in cui la regione ammissibile sia un insieme stellato non vuoto $S=C_{x0}\cap A$ con $C_{x0}$ cono generico non necessariamente chiuso, né convesso, né poliedrico; non potendo quindi, data la genericità del cono $C_{x0}$, utilizzare i risultati dei precedenti paragrafi cercheremo di determinare condizioni di ottimalità sotto ipotesi di locale concavità generalizzata nel punto $x_0$ della funzione obiettivo.

Facciamo notare che, non essendo la nostra regione ammissibile un intorno di $x_0$, è sovrabbondante richiedere la concavità generalizzata della funzione obiettivo per un intorno di $x_0$, ci limiteremo quindi a richiederne la locale concavità generalizzata in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$ (riportiamo in appendice A le relative definizioni e principali proprietà).

Come ovvia conseguenza una funzione localmente concavo-generalizzata in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$ non è necessariamente concavo-generalizzata in $x_0$ in un intorno di $x_0$; ad esempio la funzione reale a valori reali $f(x)=-x^3$ è localmente pseudo-concava in $x_0=0$ rispetto al cono $C=\{x\in\Re: x\geq 0\}$ ma non lo è rispetto a tutto l'insieme dei reali dal momento che, essendo $f'(0)=0$, per ogni $x<0$ risulta $f(x)>f(0)=0$ e $(x-0)f'(0)\not>0$.

Veniamo adesso al problema P(S), con $S=C_{x0}\cap A$ insieme stellato non vuoto; è ovvio che se $x_0$ è un punto di massimo per il problema $P(C_{x0}\cap A)$ lo è anche per la restrizione della funzione obiettivo su ogni semiretta di origine $x_0$ e direzione $d\in\mathcal{D}$, ovvero per ogni problema $P(r_d\cap A)$ con $d\in\mathcal{D}$; non vale invece la proprietà inversa, come evidenziato nel seguente esempio 4.1 :

**Esempio 4.1**

Sia $A=\{(x,y)\in\Re^2:x^2+y^2<1\}$ e consideriamo la funzione $f:A\to\Re$, definita come $f(x,y)=(y-x^4)(x^2-y)$, rispetto al cono $C=\{(x,y)\in\Re^2:x\geq 0 \text{ ed } y\geq 0\}$ di vertice l'origine. Come possiamo facilmente verificare risulta $f(x,y)=0$ per $y=x^2$ ed $y=x^4$, $f(x,y)<0$ per $y>x^2$ ed $y<x^4$, $f(x,y)>0$ per $x^4<y<x^2$.

Restringendo la funzione f lungo la retta $x=0$ abbiamo $f(0,y)=-y^2$ e quindi, essendo $f(0,0)=0$, abbiamo che l'origine è di massimo locale stretto su essa; analogo è il risultato relativo alla retta $y=0$ lungo la quale $f(x,0)=-x^6$. Il risultato non cambia neanche applicando la restrizione lungo la retta $y=mx$, con $m>0$, poiché per $x\in(0,m)$, e quindi $y\in(0,m^2)$, la funzione assume valori negativi.

Riassumendo l'origine è punto di <u>massimo locale stretto</u> lungo ogni raggio generato da una direzione del cono C, ciò nonostante <u>non è punto di massimo</u>

locale per la funzione f su $C \cap A$ poiché in ogni suo intorno esistono punti con $x^4<y<x^2$ tali che $f(x,y)>0$.

Vedremo adesso come l'introduzione della classe delle funzioni localmente concavo-generalizzate in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$ permettono di stabilire alcune relazioni intercorrenti tra la proposizione "$x_0$ è punto di massimo per il problema $P(C_{x0} \cap A)$" e la proposizione "$x_0$ è punto di massimo per il problema $P(r_d \cap A)$ $\forall d \in \mathcal{D}$". Premettiamo a tal fine la seguente proprietà:

**Proprietà 4.1**
Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x0} \cap A$ insieme stellato non vuoto, e la seguente condizione:

(1) per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ il punto $x_0$ è di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente semistrettamente quasi-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$.

Se la funzione obiettivo f è direzionalmente derivabile in $x_0$ allora la precedente condizione è equivalente alle seguenti:

(2) per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ risulta $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$, per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ il punto $x_0$ è di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente semistrettamente quasi-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$.

(3) per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ risulta $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente pseudo-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$.

Se inoltre la funzione obiettivo f ammette in $x_0$ derivate seconde continue allora le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

(4) per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ risulta $d^T \nabla F(x_0) \leq 0$, per ogni direzione $d \in \mathcal{D}$ tale che $d^T \nabla F(x_0)=0$ risulta $d^T \nabla^2 F(x_0) d \leq 0$, per ogni $d \in \mathcal{D}$ tale che $d^T \nabla F(x_0)=0$ e $d^T \nabla^2 F(x_0) d=0$ il punto $x_0$ è di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente semistrettamente quasi-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x0}$.

**Dim (1)$\Rightarrow$(3)** E' noto che se $x_0$ è di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ $\forall d \in \mathcal{D}$ deve necessariamente essere $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}$, se poi per assurdo la funzione f non fosse localmente pseudo-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ per ogni intorno convesso $U \subseteq A$ di $x_0$ esisterebbe un punto $y \in C_{x_0} \cap U \setminus \{x_0\}$ tale che $f(y) > f(x_0)$ e $\forall \xi(y) > 0$ $\exists \lambda \in (0,1)$ tale che $f(x_0 + \lambda(y - x_0)) < f(x_0) + \lambda(1-\lambda)\xi(y)$, ciò però è assurdo dal momento che per la locale semistretta quasi-concavità in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ della funzione obiettivo f la condizione "$f(y) > f(x_0)$" implica che $x_0$ non può essere di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ con $d = \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \in \mathcal{D}$.

**(3)$\Rightarrow$(2)** Una funzione localmente pseudo-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ è anche banalmente localmente semistrettamente quasi-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$, la tesi segue quindi osservando che se per assurdo per una direzione $d \in \mathcal{D}$ il punto $x_0$ non fosse di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ avremmo per la locale pseudo-concavità in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ della funzione obiettivo f che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) > 0$.

**(2)$\Rightarrow$(1)** Segue banalmente dal fatto che se per una direzione $d \in \mathcal{D}$ è $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) < 0$ necessariamente il punto $x_0$ è di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$.

**(2)$\Rightarrow$(4)** Se per assurdo per una direzione $d \in \mathcal{D}$ tale che $d^T \nabla F(x_0) = 0$ fosse $d^T \nabla^2 F(x_0) d > 0$ il punto $x_0$ non potrebbe essere di massimo locale per $P(r_d \cap A)$.

**(4)$\Rightarrow$(2)** Basta osservare che se per una direzione $d \in \mathcal{D}$ è $d^T \nabla F(x_0) = 0$ e $d^T \nabla^2 F(x_0) d < 0$ necessariamente il punto $x_0$ è di massimo locale per $P(r_d \cap A)$. ♦

**Teorema 4.1**

Consideriamo il problema P(S), con $S = C_{x_0} \cap A$ insieme stellato non vuoto.

Se vale almeno una delle precedenti condizioni (1), (2), (3) e (4) allora il punto $x_0$ è di massimo locale per il problema P(S).

**Dim** Essendo le condizioni (1), (2), (3) e (4) equivalenti, basta verificare che la (2) implica l'ottimalità di $x_0$ per P(S): se per assurdo per ogni intorno $U \subseteq A$ di $x_0$ esistesse un vettore $y \in C_{x_0} \cap U \setminus \{x_0\}$ tale che $f(y) > f(x_0)$ allora, essendo la funzione f localmente semistrettamente quasi-concava in $x_0$ rispetto a $C_{x_0}$, per un certo intorno $\overline{U} \subseteq A$ di $x_0$ e per un certo $\overline{y} \in C_{x_0} \cap \overline{U} \setminus \{x_0\}$ la condizione "$f(\overline{y}) > f(x_0)$" implicherebbe che il punto $x_0$ non può essere di massimo locale per il problema $P(r_d \cap A)$ con $d = \frac{\overline{y} - x_0}{\|\overline{y} - x_0\|} \in \mathcal{D}$. ♦

Un teorema analogo al 4.1 è ottenibile relativamente a punti di massimo locale stretto per il problema P(S), a tal fine premettiamo la seguente proprietà:

**Proprietà 4.2**
Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x_0}\cap A$ insieme stellato non vuoto, e la seguente condizione:

(5) per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ il punto $x_0$ è di massimo locale [stretto] per il problema $P(r_d\cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente strettamente quasi-concava [quasi-concava] in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$.

Se la funzione obiettivo f è direzionalmente derivabile in $x_0$ allora la precedente condizione è equivalente alle seguenti:

(6) per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ risulta $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0$, per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=0$ il punto $x_0$ è di massimo locale [stretto] per il problema $P(r_d\cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente strettamente quasi-concava [quasi-concava] in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$.

(7) per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ risulta $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\leq 0$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente strettamente pseudo-concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$.

Se inoltre la funzione obiettivo f ammette in $x_0$ derivate seconde continue allora le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

(8) per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ risulta $d^T\nabla F(x_0)\leq 0$, per ogni direzione $d\in\mathcal{D}$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ risulta $d^T\nabla^2F(x_0)d\leq 0$, per ogni $d\in\mathcal{D}$ tale che $d^T\nabla F(x_0)=0$ e $d^T\nabla^2F(x_0)d=0$ il punto $x_0$ è di massimo locale [stretto] per il problema $P(r_d\cap A)$ ed inoltre la funzione obiettivo f è localmente strettamente quasi-concava [quasi-concava] in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$.

**Dim** Analoga a quella della proprietà 4.1 . ♦

**Teorema 4.2**
Consideriamo il problema P(S), con $S=C_{x_0}\cap A$ insieme stellato non vuoto.

Se vale almeno una delle precedenti condizioni (5), (6), (7) e (8) allora il punto $x_0$ è di massimo locale stretto per il problema P(S).

**Dim** Analoga a quella del teorema 4.1 . ♦

**Osservazione 4.1**

E' interessante notare che le precedenti condizioni sufficienti di ottimalità (1)-(8) sono anche necessarie; se infatti $x_0$ è un punto di massimo locale [stretto] per il problema P(S) allora la funzione obiettivo f è in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ banalmente localmente [strettamente] pseudo-concava poiché per un certo intorno $\overline{U} \subseteq A$ di $x_0$ risulta $f(y) \leq f(x_0)$ $[f(y)<f(x_0)]$ $\forall y \in C_{x_0} \cap \overline{U} \setminus \{x_0\}$, inoltre l'ottimalità di $x_0$ per il problema P(S) ne implica l'ottimalità anche per ogni problema $P(r_d \cap A)$ con $d \in \mathcal{D}$ e di conseguenza, come è noto, se la funzione obiettivo è direzionalmente derivabile in $x_0$ deve necessariamente essere $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}$ e se la funzione f ammette in $x_0$ derivate seconde continue allora risulta $d^T \nabla^2 F(x_0) d \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}$ tale che $d^T \nabla F(x_0) = 0$.

I teoremi 4.1 e 4.2 permettono di ottenere la seguente condizione necessaria e sufficiente di ottimalità globale:

**Teorema 4.3**

Supponiamo che la funzione $f: A \rightarrow \Re$ sia [strettamente] pseudo-concava in A e direzionalmente derivabile nel punto $x_0 \in A$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $x_0$ sia un punto di massimo globale [stretto] per il problema $P(C_{x_0} \cap A)$, con $C_{x_0} \subseteq \Re^n$ cono non necessariamente chiuso, è che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \leq 0$ $\forall d \in \mathcal{D}$.

**Dim** Segue direttamente dai teoremi 4.1 e 4.2 ricordando che, essendo la funzione f [strettamente] pseudo-concava nel dominio di definizione, ogni suo punto di massimo locale è anche un punto di massimo globale. ♦

## §5. *Applicazioni*

Scopo di questo paragrafo è di evidenziare alcune applicazioni e possibili sviluppi dei risultati conseguiti in questo lavoro.

Si osservi prima di tutto che, dato un generico problema di estremo vincolato $\max f(x)$ , $x \in S=\{x \in \Re^n: g_i(x) \geq 0 \ i=1,\dots,m\}$ è spesso utile, nell'indagare l'ottimalità di un punto $x_0 \in S$, sostituire alla regione ammissibile S un insieme più "regolare" come ad esempio il cono delle direzioni ammissibili in $x_0$ di S, il cono linearizzante in $x_0$ di S o il cono tangente in $x_0$ di S. Sotto condizioni che assicurano l'invarianza della ottimalità di $x_0$ rispetto ai nuovi insiemi (ad esempio condizioni di qualifica dei vincoli) si possono applicare ad essi tutte le condizioni di ottimalità stabilite nei precedenti paragrafi.

Si consideri ora il caso in cui $C_{x_0}$ sia un cono poliedrico o, equivalentemente, un cono finitamente generato[7].

Considerando $C_{x_0}$ come cono poliedrico, la condizione "$d^T\nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall d \in C_0$" è equivalente alla "$(x-x_0)^T\nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall x \in \Re^n$: $A(x-x_0) \geq 0$". Tale condizione di ottimalità può essere equivalentemente espressa, per il lemma di Farkas[8], nella forma "$\exists \lambda \geq 0$: $\nabla f(x_0)+A^T\lambda=0$" che si riduce alle classiche condizioni di Kuhn-Tucker nel caso in cui $C_{x_0}$ sia il cono linearizzante di S in $x_0$ .

Considerando invece $C_{x_0}$ come cono finitamente generato dalle direzioni linearmente indipendenti $u_i$, $i=1,\dots,m$, la condizione "$d^T\nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall d \in C_0$", in virtù della relazione $d=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i \Rightarrow d^T\nabla f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i^T\nabla f(x_0)$, è equivalente alla "$u_i^T\nabla f(x_0) \leq 0 \ \forall i=1,\dots,m$" che a sua volta permette il controllo della ottimalità di $x_0$ sulle sole direzioni $u_i$ che generano il cono.

Per comprendere l'applicazione operativa di ciò, si consideri il seguente problema di programmazione lineare frazionaria:

---

[7]Ricordiamo che $C_{x_0} \subseteq \Re^n$ è un cono di vertice $x_0$ finitamente generato dai vettori non nulli $u_i \in \Re^n$, $i=1,\dots,m$, se $C_{x_0}=\{x \in \Re^n: x=x_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i \ , \lambda_i \geq 0 \ \forall i=1,\dots,m\}$; $C_{x_0} \subseteq \Re^n$ è invece un cono poliedrico di vertice $x_0$ se $C_{x_0}=\{x \in \Re^n: A(x-x_0) \geq 0\}$ con $A \in \Re^{m \times n}$. Si osservi che gli insiemi cono poliedrico e cono finitamente generato sono insiemi chiusi e convessi.

Si può dimostrare che un cono non vuoto è poliedrico se e solo se è finitamente generato.

[8]Abbiamo considerato il lemma di Farkas espresso nella seguente forma: dati $A \in \Re^{m \times n}$, $b \in \Re^n$ ed $y \in \Re^n$ risulta $b^Ty \leq 0 \ \forall y$: $Ay \geq 0$ se e solo se $\exists \lambda \geq 0$: $b+A^T\lambda=0$.

$$P(S): \begin{cases} \max f(x)=\dfrac{c_0+c^T x}{d_0+d^T x} \\ x\in S=\{x\in\Re^m:\ x\geq 0 \text{ ed } Ax=b\} \end{cases}$$

con $A\in\Re^{n\times m}$, $c_0,d_0\in\Re$, $c,d,x\in\Re^m$, $b\in\Re^n$ e con l'ipotesi che sia $d_0+d^Tx>0\ \forall x\in S$.
In questo caso il problema P(S) può essere riscritto, rispetto ad una soluzione di base ammissibile $x=(x_B,x_N)$, nella forma:

$$\begin{cases} \max \dfrac{c_0+c_B^T x_B+c_N^T x_N}{d_0+d_B^T x_B+d_N^T x_N} \\ A_B x_B+A_N x_N=b \\ x_B\geq 0 \text{ ed } x_N\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \max \bar{f}(x_N)=\dfrac{\bar{c}_0+\bar{c}_N^T x_N}{\bar{d}_0+\bar{d}_N^T x_N} \\ x_N\in\bar{S}=\{x\in\Re^{m-n}:\ x\geq 0 \text{ ed } A_B^{-1}b\geq A_B^{-1}A_N x\} \end{cases}$$

dove $\bar{c}_0=c_0+c_B^TA_B^{-1}b$, $\bar{d}_0=d_0+d_B^TA_B^{-1}b$, $\bar{c}_N^T=c_N^T-c_B^TA_B^{-1}A_N$ e $\bar{d}_N^T=d_N^T-d_B^TA_B^{-1}A_N$.
Il cono tangente ad $\bar{S}$ nell'origine, $T(\bar{S},0)=\{x\in\Re^{m-n}:\ x\geq 0\}$, è finitamente generato dalle direzioni che compongono la base canonica di $\Re^{m-n}$, di conseguenza risulta "$d^T\nabla\bar{f}(0)\leq 0\ \forall d\in\mathcal{D}_T$" se e solo se $\nabla\bar{f}(0)\leq 0$.
Per il teorema 4.3 quindi, essendo la funzione obiettivo sia pseudo-concava che pseudo-convessa nel dominio di definizione, abbiamo che il vertice $x_N=0$ è di massimo globale se e solo se $\nabla\bar{f}(0)=\dfrac{\bar{d}_0\bar{c}-\bar{c}_0\bar{d}}{\bar{d}_0^2}\leq 0$ e cioè, essendo per ipotesi $\bar{d}_0>0$, se e solo se $\gamma=\bar{d}_0\bar{c}-\bar{c}_0\bar{d}\leq 0$; abbiamo così ritrovato la condizione necessaria e sufficiente, utilizzata da Martos ed altri [5, 15], affinché una soluzione di base ammissibile sia di ottimo per un problema di massimo di programmazione lineare frazionaria.

**Appendice A.** ***Funzioni localmente concavo-generalizzate in $x_0$***

Riassumiamo in questa appendice le definizioni e le principali proprietà delle funzioni localmente concavo-generalizzate in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$, che sono state esplicitamente o implicitamente usate in questo lavoro.

**Definizione A.1**

Consideriamo un cono $C \subseteq \Re^n$, il suo traslato $C_{x_0}$ rispetto al vettore $x_0 \in \Re^n$ ed una funzione reale $f: A \to \Re$ tale che $x_0$ è un punto interno al suo dominio $A \subseteq \Re^n$. La funzione f sarà detta localmente *concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ se esiste un intorno convesso $U \subseteq A$ di $x_0$ per cui è verificata la condizione *condizione $\forall y \in C_{x_0} \cap U$ in accordo alla seguente tabella:

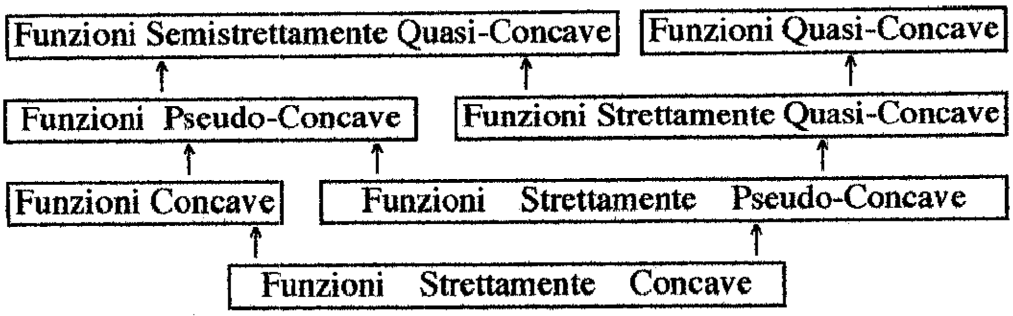
| *concava | *condizione |
|---|---|
| concava | $f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0)+\lambda(f(y)-f(x_0)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$ |
| strettamente concava | per $y \neq x_0$: $f(x_0+\lambda(y-x_0)) > f(x_0)+\lambda(f(y)-f(x_0)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$ |
| quasi-concava | $f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0) \quad \forall \lambda \in (0,1)$ |
| strettamente quasi-concava | per $y \neq x_0$: $f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0)) > f(x_0) \quad \forall \lambda \in (0,1)$ |
| semistrettamente quasi-concava | $f(y) > f(x_0) \Rightarrow f(x_0+\lambda(y-x_0)) > f(x_0) \quad \forall \lambda \in (0,1)$ |
| pseudo-concava | $f(y) > f(x_0) \Rightarrow \exists \xi(y) > 0$ t.c. $\forall \lambda \in (0,1)$ $f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0)+\lambda(1-\lambda)\xi(y)$ |
| strettamente pseudo-concava | per $y \neq x_0$: $f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow \exists \xi(y) > 0$ t.c. $\forall \lambda \in (0,1)$ $f(x_0+\lambda(y-x_0)) \geq f(x_0)+\lambda(1-\lambda)\xi(y)$ |

dove $\xi(y)$ non dipende da $\lambda$ ma soltanto da y.

**Osservazione**

Facciamo notare che $C_{x_0} \cap A$ non è necessariamente un insieme convesso e, di conseguenza, la definizione data di locale concavità generalizzata è più generale di quella usualmente riportata nella letteratura ove si assume la concavità generalizzata di f in un intorno convesso di $x_0$; la classica definizione di locale concavità generalizzata è un caso particolare della precedente ottenibile assumendo $C_{x_0} = \Re^n$.

Le relazioni intercorrenti tra le varie classi di funzioni localmente concavo-generalizzate in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ sono le stesse intercorrenti tra le ben note classi di funzioni concavo-generalizzate e possono essere graficamente rappresentate nel seguente modo:




(il simbolo $\boxed{A}\to\boxed{B}$ indica che la classe A è contenuta nella classe B)

**<u>Proprietà A.1</u>**

Consideriamo un cono $C\subseteq\mathfrak{R}^n$, il suo traslato $C_{x_0}$ rispetto al punto $x_0$ interno all'insieme $A\subseteq\mathfrak{R}^n$ ed una funzione reale $f:A\to\mathfrak{R}$ direzionalmente derivabile in $x_0$. Se la funzione f risulta localmente *concava in $x_0$ rispetto al cono $C_{x_0}$ allora esiste un intorno convesso $U\subseteq A$ di $x_0$ per cui è verificata la condizione *condizione $\forall y\in C_{x_0}\cap U\setminus\{x_0\}$ con $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$ in accordo alla seguente tabella:

| *concava | *condizione |
|---|---|
| concava | $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\geq\frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}$ |
| strettamente concava | $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>\frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}$ |
| quasi-concava | $f(y)\geq f(x_0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\geq 0$ |
| semistrettamente quasi-concava | $f(y)>f(x_0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\geq 0$ |
| pseudo-concava | $f(y)>f(x_0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0$ |
| strettamente pseudo-concava | $f(y)\geq f(x_0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)>0$ |

**<u>Dim</u>** Vediamo intanto la necessarietà di tutti i casi; per ipotesi esiste un intorno convesso $U\subseteq A$ di $x_0$ tale che per ogni $y\in C_{x_0}\cap U\setminus\{x_0\}$ e $\forall\lambda\in(0,1)$ risulta:

$$\frac{f(x_0+\lambda(y-x_0))-f(x_0)}{\lambda\|y-x_0\|}\begin{cases}\geq \dfrac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|} & \text{se f è concava}\\ \geq 0 & \text{se f è quasi-concava e } f(y)\geq f(x_0)\\ >0 & \text{se f è semistrettamente quasi-concava e } f(y)>f(x_0)\\ \geq \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|} & \text{se f è pseudo-concava e } f(y)>f(x_0)\\ \geq \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|} & \text{se f è strettamente pseudo-concava e } f(y)\geq f(x_0).\end{cases}$$

Essendo poi la funzione f direzionalmente derivabile in $x_0$ risulta $f(x_0+td)=f(x_0)+t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)+t\sigma(t,0)$ con $\lim\limits_{t\to 0}\sigma(t,0)=0\ \forall d\in\Re^n$;

da questa relazione, ponendo $t=\lambda\|y-x_0\|$ e sostituendo $d=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$, otteniamo $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=\frac{f(x_0+\lambda(y-x_0))-f(x_0)}{\lambda\|y-x_0\|}-\sigma'(\lambda,0)$ con $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma'(\lambda,0)=0$ e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\begin{cases}\geq \dfrac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}-\sigma'(\lambda,0) & \text{se f è concava}\\ \geq -\sigma'(\lambda,0) & \text{se f è quasi-concava e } f(y)\geq f(x_0)\\ >-\sigma'(\lambda,0) & \text{se f è semistrettamente quasi-concava e } f(y)>f(x_0)\\ \geq \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|}-\sigma'(\lambda,0) & \text{se f è pseudo-concava e } f(y)>f(x_0)\\ \geq \dfrac{(1-\lambda)\xi(y)}{\|y-x_0\|}-\sigma'(\lambda,0) & \text{se f è strettamente pseudo-concava e } f(y)\geq f(x_0)\end{cases}$$

da cui otteniamo le tesi facendo tendere $\lambda$ a 0 e ricordando che $\xi(y)>0$.

Nel caso invece in cui la funzione f sia strettamente concava essa sarà anche banalmente concava e quindi, per quanto sopra dimostrato, deve essere $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\geq\frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}$. Supponiamo ora per assurdo che sia $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)=\frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}$; poiché per ogni $\lambda\in(0,1)$ risulta $v=\frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}=\frac{\lambda(y-x_0)}{\lambda\|y-x_0\|}=\frac{(x_0+\lambda(y-x_0))-x_0}{\|(x_0+\lambda(y-x_0))-x_0\|}$ per la concavità della funzione f abbiamo, analogamente al caso precedente, che

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x_0\|}=\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)\geq\frac{f(x_0+\lambda(y-x_0))-f(x_0)}{\lambda\|y-x_0\|}$$

da cui otteniamo $f(x_0+\lambda(y-x_0))\leq f(x_0)+\lambda(f(y)-f(x_0))$ il che è assurdo per la stretta concavità della funzione f. ♦

## Bibliografia


[1] Avriel, M. : *Nonlinear Programming, Analysis and Methods*, Prentice Hall, 1976.

[2] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and I. Zang : *Generalized Concavity*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, vol. 36, Plenum Press, 1988.

[3] Bazaraa, M.S. and C.M. Shetty : *Foundations of Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 122, Springer-Verlag, 1976.

[4] Cambini, A. : *An algorithm for a special class of generalized convex programs*, Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, 1981.

[5] Cambini, A. and L. Martein : *A modified version of Martos's Algorithm*, Methods of Operation Research, vol. 53, pp. 33-44, 1986.

[6] Cambini, A. and L. Martein : *Linear Fractional and Bicriteria Linear Fractional Problem*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 345, A. Cambini et al. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[7] Cambini, A., Martein, L. and S. Schaible : *On maximizing a sum of ratios*, Journal of Information & Optimization Sciences 1, 1989.

[8] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni : *About derivatives of some generalized concave functions*, Journal of Information & Optimization Sciences 1, 1989.

[9] Demyanov, V.F., Polyakova, L.N. and A.M. Rubinov : *Nonsmoothness and Quasidifferentiability*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1984.

[10] Komlosi, S. : *Quasi-convex first order approximations and Kuhn-Tucker type optimality conditions*, Studia Oeconomica Auctoritate, University of Pecs, Hungary, 1986.

[11] Mangasarian, O.L. : *Nonlinear Programming*, McGraw Hill, New York, 1969.

[12] Martein, L. : *Massimo della somma tra una funzione lineare ed una funzione lineare fratta*, Rivista A.M.A.S.E.S., 13-20, 1985.

[13] Martein, L. and L. Pellegrini : *Su una estensione di una particolare classe di problemi di programmazione frazionaria*, Atti del I Convegno A.M.A.S.E.S., 1977.

[14] Martein, L. and L. Pellegrini : *Un algoritmo per la determinazione del massimo di una particolare funzione fratta soggetta a vincoli lineari*, Atti Giornate A.I.R.O., 1977.

[15] Martos, B. : *Hyperbolic Programming*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 11, pp. 135-155, 1964.

[16] Martos, B. : *Nonlinear Programming, Theory and Methods*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[17] Schaible, S. and W.T. Ziemba (Eds.) : *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, 1981.