Report n.56

Studio di una classe di problemi non lineari: un metodo sequenziale

Riccardo CAMBINI

Pisa, aprile 1992

Studio di una classe di problemi non lineari: un metodo sequenziale

Riccardo Cambini

§1. *Introduzione*

In questo lavoro si considera la classe dei problemi di estremo vincolato P aventi una regione ammissibile lineare ed una funzione obiettivo che è il prodotto tra una funzione affine e la potenza, con esponente α reale, di un'altra funzione affine.

Lo studio che svolgeremo si differenzia da quello proposto in [2, 6], ove si considera il caso di esponenti α interi, sia per la diversa metodologia usata, sia per la maggiore varietà e generalità di risultati ottenuti, e pertanto non ne costituisce una semplice estensione.

L'idea alla base dell'approccio che seguiremo è quella di fondare lo studio del problema sulla caratterizzazione dell'insieme delle soluzioni ottime di livello di P, insieme che si è già rivelato utile nella risoluzione di particolari classi di problemi frazionari e bicriteria [4, 5, 7, 8].

Tale caratterizzazione permetterà di:

- determinare sia condizioni di esistenza di soluzioni ottime sia condizioni che assicurino la superiore limitatezza della funzione obiettivo;
- di individuare sottoclassi di problemi che ammettono sempre soluzioni ottime;
- di studiare gli ottimi locali del problema;
- di fornire condizioni di ottimalità relative ad un vertice della regione.

I risultati teorici conseguiti consentiranno di proporre un metodo sequenziale per la classe dei problemi considerati.

§2. *Definizione del problema e proprietà delle soluzioni ottime di livello*

Si consideri il seguente problema P di massimo vincolato:

$$P: \begin{cases} \max f(x)=(c_0+c^Tx)(d_0+d^Tx)^\alpha \\ x\in R=\{x\in\Re^n:\ x\geq 0,\ Ax=b\} \end{cases}$$

dove A è una matrice reale con m righe ed n colonne, $b\in\Re^m$, $c,d\in\Re^n$, $c_0,d_0\in\Re$, α è un parametro reale e $(d_0+d^Tx)>0\ \forall x\in R$.

Si osservi che per $\alpha=0$, $d=0$ o $c=0$ il problema considerato diviene un problema lineare e pertanto tali casi saranno esclusi in questa trattazione.

Si osservi inoltre che l'ipotesi $(d_0+d^Tx)>0\ \forall x\in R$ è necessaria volendo studiare il problema per un qualsiasi parametro reale α; tale ipotesi può essere rilasciata quando si vogliano considerare particolari valori di α.

In [2, 6] il problema P è stato studiato limitatamente ad esponenti interi e per esso è stato proposto un algoritmo di tipo parametrico basato su condizioni di ottimalità determinate tramite l'applicazione di un teorema di alternativa.

L'approccio che seguiremo in questo lavoro ha invece le sue radici nel concetto di soluzione ottima di livello proposta in [3] per un problema lineare frazionario (caso $\alpha=-1$), concetto che si è rivelato utile nella risoluzione di particolari classi di problemi frazionari e problemi bicriteria [4, 5, 7, 8] e che adesso riprenderemo tramite la seguente definizione:

Definizione 2.1

Un punto $\bar{x}\in R$ è detto soluzione ottima di livello per il problema P se è soluzione ottima del problema lineare $\begin{cases} \max\ (c_0+c^Tx) \\ d_0+d^Tx=d_0+d^T\bar{x} \\ x\in R \end{cases}$.

Nel caso particolare in cui $\bar{x}$ è un vertice della regione ammissibile R diremo che $\bar{x}\in R$ è una soluzione ottima di livello basica per il problema P.

Siano inoltre $\xi_m=\inf_{x\in R}\ (d_0+d^Tx)$ e $\xi_M=\sup_{x\in R}(d_0+d^Tx)$; poiché per ipotesi $(d_0+d^Tx)>0\ \forall x\in R$, ξ_m è finito ed è anche minimo mentre può essere $\xi_M=+\infty$.

Denotato con $L\subseteq R$ l'insieme di tutte le soluzioni ottime di livello per il problema P e con L_ξ, $\xi\in[\xi_m, \xi_M]$ (con la convenzione che sia $\xi\in[\xi_m,+\infty[$ quando $\xi_M=+\infty$), l'insieme delle soluzioni ottime del problema lineare P_ξ : $\begin{cases} \max\ (c_0+c^Tx) \\ d_0+d^Tx=\xi \\ x\in R \end{cases}$, si ha

ovviamente $L= \bigcup_{\xi\in[\xi_m,\ \xi_M]} L_\xi$.

L'insieme L delle soluzioni ottime di livello per il problema P riveste una particolare importanza poiché comprende tutti i punti di ottimo locale di P; vale al riguardo la seguente proprietà:

__Proprietà 2.1__

Se $\overline{x}\in R$ è un punto di ottimo locale per il problema P allora è necessariamente una soluzione ottima di livello per P.

__Dim__ Supponiamo per assurdo che $\overline{x}$ non sia una soluzione ottima di livello e che quindi esista un punto $y\in R$ tale che $d_0+d^Ty=d_0+d^T\overline{x}$ e $c_0+c^Ty>c_0+c^T\overline{x}$.
Per ogni $\lambda\in(0,1)$ risulta $c_0+c^T(\lambda y+(1-\lambda)\overline{x})=\lambda(c_0+c^Ty)+(1-\lambda)(c_0+c^T\overline{x})>(c_0+c^T\overline{x})$, $d_0+d^T(\lambda y+(1-\lambda)\overline{x})=\lambda(d_0+d^Ty)+(1-\lambda)(d_0+d^T\overline{x})=d_0+d^T\overline{x}$ e $\lambda y+(1-\lambda)\overline{x}\in R$ per la convessità di R stesso; di conseguenza abbiamo $f(\lambda y+(1-\lambda)\overline{x})>f(\overline{x})$ con $\lambda y+(1-\lambda)\overline{x}\in R\ \forall\lambda\in(0,1)$ e quindi $\overline{x}$ non è un punto di massimo locale per il problema P, il che è assurdo poiché nega le ipotesi. ♦

Banalmente, dalla proprietà precedente e per le proprietà delle soluzioni ottime di un problema lineare, segue che un punto di ottimo locale per il problema P deve necessariamente essere un vertice della regione ammissibile R oppure appartenere ad un suo spigolo o ad una sua faccia.
Dimostreremo adesso che se per un certo livello ammissibile $\xi\in[\xi_m,\ \xi_M]$ non esiste alcuna soluzione ottima di livello per P, ovvero il problema lineare P_ξ non ammette soluzione ottima finita, allora altrettanto accade per ogni altro livello ammissibile ξ'. Vale al riguardo il seguente teorema:

__Teorema 2.1__

$L\neq\emptyset$ se e solo se $L_\xi\neq\emptyset\ \forall\xi\in[\xi_m,\ \xi_M]$.

__Dim__ La sufficienza è banale essendo $L=\bigcup_\xi L_\xi$. Sia adesso $L\neq\emptyset$ e supponiamo per assurdo che esista un livello $\xi\in[\xi_m,\ \xi_M]$ con $L_\xi=\emptyset$ o, equivalentemente, che il problema lineare P_ξ non ammetta soluzione ottima finita; esiste di conseguenza una semiretta $r=\{x\in\Re^n:\ x=x_0+tu \text{ con } t\geq0,\ x_0\in R \text{ e } u\in\Re^n\}\subseteq\{x\in R:\ d_0+d^Tx=\xi\}$

tale che $\sup_{x\in r}(c_0+c^Tx)=\lim_{t\to+\infty}(c_0+c^Tx_0+tc^Tu)=+\infty$, per cui deve necessariamente essere $c^Tu>0$; inoltre per l'ammissibilità delle semiretta r abbiamo che $d_0+d^Tx_0+td^Tu=\xi$ $\forall t\geq 0$ e quindi deve essere $d^Tu=0$.
Sia adesso $\bar{x}$ un qualsiasi punto di R e sia $\xi'=d_0+d^T\bar{x}$ il livello corrispondente tale che $L_{\xi'}\neq\emptyset$. Essendo u una direzione ammissibile per la regione R, anche la semiretta $r'=\{x\in\Re^n: x=\bar{x}+tu \text{ con } t\geq 0, \bar{x}\in R \text{ e } u\in\Re^n\}$ sarà a sua volta contenuta in R ed inoltre, poiché risulta $d_0+d^T\bar{x}+td^Tu=d_0+d^T\bar{x}=\xi'$, sarà ammissibile anche per il problema $P_{\xi'}$; neanche tale problema però ammette ottimo finito dal momento che risulta $\lim_{t\to+\infty}(c_0+c^T\bar{x}+tc^Tu)=+\infty$, il che è assurdo. ♦

La proprietà espressa dal precedente teorema suggerisce un semplice modo per verificare a priori l'esistenza per ogni livello ammissibile ξ di almeno una soluzione ottima di livello per il problema P:

<u>*passo 1:*</u> determinare la soluzione ottima $\bar{x}_0$ del problema lineare
$\begin{cases}\min\,(d_0+d^Tx)\\ x\in R\end{cases}$; tale soluzione ottima esiste sicuramente essendo per ipotesi $(d_0+d^Tx)>0$ $\forall x\in R$.

<u>*passo 2:*</u> posto $\xi_m=(d_0+d^T\bar{x}_0)$, determinare, se esiste, la soluzione ottima del problema lineare P_{ξ_m} : $\begin{cases}\max\,(c_0+c^Tx)\\ d_0+d^Tx=\xi_m\\ x\in R\end{cases}$; se tale soluzione ottima esiste allora esiste almeno una soluzione ottima di livello per il problema P per ogni livello ammissibile $\xi\in[\xi_m,\xi_M]$, altrimenti risulta $L=\emptyset$.

Si osservi che $L=\emptyset$ implica necessariamente che il problema P ha estremo superiore non finito; per tale ragione continueremo la nostra analisi nel caso $L\neq\emptyset$.
Allo scopo di proporre un metodo per risolvere il problema P che non sia di natura parametrica ma del tipo simplex-like, metteremo ora in evidenza come sia possibile generare per ogni $\xi\in[\xi_m,\xi_M]$ una soluzione ottima di livello tramite operazioni di cardine.

Iniziamo con la caratterizzazione di una soluzione ottima di livello basica per il problema P; come sappiamo, rispetto ad una qualsiasi soluzione di base $x^*=(x_B,0)\in R$, il problema P è equivalente al seguente:

$$P: \begin{cases} \max f(x)=(c_0+c^Tx)(d_0+d^Tx)^\alpha \\ A_Bx_B+A_Nx_N=b \\ x_B\geq 0 \text{ ed } x_N\geq 0 \end{cases} \equiv \overline{P}: \begin{cases} \max \overline{f}(x_N)=(\overline{c}_0+\overline{c}_N^Tx_N)(\overline{d}_0+\overline{d}_N^Tx_N)^\alpha \\ x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N \\ x_B\geq 0 \text{ ed } x_N\geq 0 \end{cases}$$

dove $\overline{c}_0=c_0+c_B^TA_B^{-1}b$, $\overline{d}_0=d_0+d_B^TA_B^{-1}b$, $\overline{c}_N^T=c_N^T-c_B^TA_B^{-1}A_N$ e $\overline{d}_N^T=d_N^T-d_B^TA_B^{-1}A_N$.
In termini di tabelle del simplesso l'equivalenza è così rappresentabile:

$-c_0$	c_B	c_N
$-d_0$	d_B	d_N
b	A_B	A_N

$\equiv$

$-\overline{c}_0$	0	$\overline{c}_N^T$
$-\overline{d}_0$	0	$\overline{d}_N^T$
$A_B^{-1}b$	I	$A_B^{-1}A_N$

figura 1

In particolare un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ è una soluzione ottima di livello basica per il problema P se solo se è soluzione ottima del problema lineare:

$$\begin{cases} \max (\overline{c}_0+\overline{c}_N^Tx_N) \\ \overline{d}_N^Tx_N=0 \\ x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N \\ x_B\geq 0 \text{ ed } x_N\geq 0 \end{cases}$$

Al fine di determinare un metodo sequenziale per risolvere il problema P, è necessario stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinché un vertice sia soluzione ottima di livello per P.
Con questo scopo, in modo analogo a quanto fatto in [5], definiamo i seguenti insiemi di indici, relativi al vertice $x^*=(x_B,0)\in R$.

Siano $\bar{c}_N$ e $\bar{d}_N$ i vettori "ridotti" di $\Re^{n-m}$ definiti in precedenza; definiti gli insiemi $N^+=\{i\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}: \bar{d}_{N(i)}>0\}$ ed $N^-=\{i\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}: \bar{d}_{N(i)}<0\}$ denotiamo con:

$D^+\subseteq N^+$ l'insieme degli indici k tali che: $$\frac{\bar{c}_{N(k)}}{\bar{d}_{N(k)}} = \max_{i\in N^+} \left\{ \frac{\bar{c}_{N(i)}}{\bar{d}_{N(i)}} \right\} \qquad (2.1)$$

$D^-\subseteq N^-$ l'insieme degli indici h tali che: $$\frac{\bar{c}_{N(h)}}{\bar{d}_{N(h)}} = \min_{i\in N^-} \left\{ \frac{\bar{c}_{N(i)}}{\bar{d}_{N(i)}} \right\} \qquad (2.2)$$

Osserviamo che $D^+\cup D^-\neq\emptyset$; infatti se fosse $\bar{d}_{N(i)}=0$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}$ la funzione lineare d_0+d^Tx risulterebbe costante nella regione ammissibile R ed il problema P si riduce ad un problema di programmazione lineare, caso già escluso a priori.

Proprietà 2.2

Un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ è una soluzione ottima di livello basica per P se e solo se $\frac{\bar{c}_{N(k)}}{\bar{d}_{N(k)}} \leq \frac{\bar{c}_{N(h)}}{\bar{d}_{N(h)}}$ $\forall k\in D^+$ $\forall h\in D^-$ e $\bar{c}_{N(j)}\leq 0$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}$ tale che $\bar{d}_{N(j)}=0$.

Dim Il vertice x* è un ottimo di livello rispetto ad R se e solo se esiste un indice $s\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}$ tale che tramite una operazione perno su $\bar{d}_{N(s)}\neq 0$ si ottengono dei costi ridotti $c^*=(\bar{c}_N - \frac{\bar{c}_{N(s)}}{\bar{d}_{N(s)}}\bar{d}_N)\leq 0$, ovvero se e solo se $\bar{c}_{N(j)}\leq 0$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\text{-}m\}$ tale che $\bar{d}_{N(j)}=0$ ed esiste un indice $s\in D^+\cup D^-$ tale che $\frac{\bar{c}_{N(s)}}{\bar{d}_{N(s)}} \geq \frac{\bar{c}_{N(k)}}{\bar{d}_{N(k)}}$ $\forall k\in D^+$ e $\frac{\bar{c}_{N(s)}}{\bar{d}_{N(s)}} \leq \frac{\bar{c}_{N(h)}}{\bar{d}_{N(h)}}$ $\forall h\in D^-$, da cui segue la tesi. ♦

A partire da un vertice soluzione ottima di livello basica per il problema P è possibile determinare degli spigoli lungo i quali viene mantenuta l'ottimalità di livello per P; le rette contenenti tali spigoli godono di proprietà fondamentali per il successivo studio delle condizioni di ottimalità per il nostro problema P.

Al fine di determinare queste proprietà, definiamo i seguenti insiemi e la seguente estensione della definizione di soluzioni ottime di livello a soprainsiemi della regione ammissibile R.

Definizione 2.2

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice ammissibile corrispondente alla matrice di base A_B.

Per ogni indice $i\in D^+\cup D^-$ denotiamo con $\bar{S}_i$ l'insieme:

$$\bar{S}_i=\{x=(x_B,x_N)\in\Re^n:\ x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N,\ x_{N(j)}\geq 0\ \forall j\neq i \text{ e } x_{N(i)}\in\Re\}\supset R$$

e con S_i l'insieme $S_i=\{x=(x_B,x_N)\in\bar{S}_i:\ x_{N(j)}=0\ \forall j\neq i \text{ e } x_{N(i)}\in\Re\}$.

Diremo che un punto $\bar{x}\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, tale che $(d_0+d^T\bar{x})>0$ è soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$ se è soluzione ottima del problema $\begin{cases}\max\ (\bar{c}_0+\bar{c}_N^Tx_N)\\ \bar{d}_N^Tx_N=\bar{d}_N^T\bar{x}_N\\ x=(x_B,x_N)\in\bar{S}_i\end{cases}$.

Vediamo adesso di caratterizzare una soluzione $\bar{x}\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$:

Proprietà 2.3

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice ammissibile corrispondente alla matrice di base A_B e sia $\bar{x}\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, tale che $(d_0+d^T\bar{x})>0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il punto $\bar{x}$ sia soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$ è che sia $\frac{\bar{c}_{N(k)}}{\bar{d}_{N(k)}}\leq\frac{\bar{c}_{N(h)}}{\bar{d}_{N(h)}}$ $\forall k\in D^+$ $\forall h\in D^-$ e $\bar{c}_{N(j)}\leq 0$ $\forall j\in\{1,\dots,n-m\}$ tale che $\bar{d}_{N(j)}=0$.

Dim Il punto $\bar{x}\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, è un ottimo di livello rispetto ad $\bar{S}_i$ se e solo se, tramite una operazione perno su $\bar{d}_{N(i)}\neq 0$, siamo in grado di ottenere dei costi ridotti $c^*=(\bar{c}_N-\frac{\bar{c}_{N(i)}}{\bar{d}_{N(i)}}\bar{d}_N)\leq 0$, ovvero se e solo se $\bar{c}_{N(j)}\leq 0$ $\forall i\in\{1,\dots,n-m\}$ tale che $\bar{d}_{N(j)}=0$ e $\frac{\bar{c}_{N(i)}}{\bar{d}_{N(i)}}\geq\frac{\bar{c}_{N(k)}}{\bar{d}_{N(k)}}$ $\forall k\in D^+$ e $\frac{\bar{c}_{N(i)}}{\bar{d}_{N(i)}}\leq\frac{\bar{c}_{N(h)}}{\bar{d}_{N(h)}}$ $\forall h\in D^-$, da cui segue la tesi. ♦

Osserviamo che le condizioni espresse nella precedente proprietà sono necessarie e sufficienti affinché un punto $\bar{x}\in S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$, sia soluzione ottima di livello per il problema P (la dimostrazione può essere condotta con un procedimento analogo).

Proprietà 2.4

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice ammissibile corrispondente alla matrice di base A_B e sia $\bar{x}\in S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$.

Il punto $\bar{x}$ è una soluzione ottima di livello per il problema P se e solo se è una soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$.

Dalle proprietà precedenti seguono immediatamente i seguenti corollari che svolgono un ruolo essenziale nello studio della struttura dell'insieme L delle soluzioni ottime di livello per il problema P:

Teorema 2.2

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice ammissibile corrispondente alla matrice di base A_B.

Se esiste un punto $\bar{x}\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$ con $(d_0+d^T\bar{x})>0$ allora ogni punto $x\in S_i$ tale che $(d_0+d^T\bar{x})>0$ è soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$; in particolare ogni punto appartenente allo spigolo ammissibile $x\in S_i\cap R$ è soluzione ottima di livello per il problema P.

Dim Segue direttamente dalla proprietà 2.2 e 2.3 . ♦

Teorema 2.3

Se un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ è soluzione ottima di livello basica per P allora ogni punto $x\in S_i$, con $i\in D^+\cup D^-$, tale che $(d_0+d^T\bar{x})>0$ è soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$; in particolare ogni punto appartenente allo spigolo ammissibile $x\in S_i\cap R$ è soluzione ottima di livello per il problema P.

Dim Segue direttamente dalle proprietà 2.1 , 2.2 e 2.3 . ♦

I risultati raggiunti permettono, tramite l'algoritmo che sarà di seguito indicato, di generare un insieme di soluzioni ottime di livello $L^*\subseteq L$ costituito da un cammino unione di spigoli $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ $i=1,\dots,s-1$, con $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_{i+1}$ vertici adiacenti, e da una eventuale semiretta $r_s=\{x\in\Re^n\text{: } x=\bar{x}_s+tu_s \text{ con } t\geq 0 \text{ e } u_s\in\Re^n\}\subseteq L$ (r_s può degenerare nel singolo punto $\bar{x}_s$), ovvero:

$$L^*=\Big(\bigcup_{i\in[1,\dots,s-1]} [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]\Big)\cup r_s. \tag{2.3}$$

passo 1: determinare una soluzione ottima $\bar{x}_0$ del problema lineare
$\begin{cases} \min (d_0+d^T x) \\ x \in R \end{cases}$ e, posto $\xi_m=(d_0+d^T\bar{x}_0)$, determinare, se esiste, un vertice ottimo $\bar{x}_1$ del problema lineare P_{ξ_m} ; se tale soluzione non esiste allora $L=\emptyset$ ed il problema P non ammette ottimo finito, altrimenti porre $i=1$ ed andare al passo 2.

passo 2: determinare l'insieme di indici D^+ relativo alla soluzione ottima di livello basica $\bar{x}_i$; se $D^+=\emptyset$ allora non esistono livelli ammissibili maggiori e quindi $s=i$ ed $r_s=\{\bar{x}_s\}$, altrimenti scelto un qualsiasi indice $k\in D^+$ determinare tramite una operazione perno il vertice $\bar{x}_{i+1}$, se esiste, adiacente ad $\bar{x}_i$ lungo lo spigolo ammissibile $S_k \cap R$ composto da soluzioni ottime di livello per P; se tale vertice esiste allora porre $i=i+1$ e ripetere il passo 2, altrimenti abbiamo trovato la semiretta r_s e possiamo porre $s=i$.

Il precedente algoritmo in pratica, dopo aver verificato se $L\neq\emptyset$, scorre tutti i livelli ammissibili $\xi\in[\xi_m, \xi_M]$, a partire dal minimo ξ_m ed ogni volta incrementandolo (dal momento che si sceglie un indice $k\in D^+$), fino a determinare un sottoinsieme L^* di L composto da una ed una sola soluzione ottima di livello per ogni livello ammissibile ξ:

Proprietà 2.5
Per ogni soluzione ottima di livello $x\in L_\xi$ esiste ed è unica una soluzione ottima di livello $x^*\in L^*$ tale che $x^*\in L_\xi$.

Dim L'esistenza segue dal fatto che l'algoritmo, attraversando iterativamente spigoli ammissibili $S_k\cap R$ con $k\in D^+$ (lungo i quali quindi il livello cresce), scorre con continuità tutti i livelli ammissibili dal minimo ξ_m al massimo ξ_M , visto che esso termina o dopo aver trovato la semiretta r_s (che attraversa tutti i livelli da $d_0+d^T\bar{x}_s$ a $+\infty$) o dopo aver trovato il vertice $\bar{x}_s$ il cui corrispondente insieme di indici D^+ è vuoto (e quindi la regione R non ha punti appartenenti a livelli maggiori di $d_0+d^T\bar{x}_s$); l'unicità segue dall'algoritmo proposto per generare L^* che sceglie una unica soluzione ottima per ogni livello. ♦

La proprietà 2.4 e l'algoritmo che determina L^* ci permettono di effettuare le seguenti considerazioni:

a) la semiretta r_s si riduce al solo vertice $\bar{x}_s$ se e solo se l'iperpiano $d_0+d^T x=d_0+d^T\bar{x}_s=\xi_M$ è di supporto per la regione ammissibile R;
b) l'insieme L coincide con L^* se e solo se il problema P_ξ ha una ed una sola soluzione ottima per ogni livello ammissibile $\xi\in[\xi_m, \xi_M]$.

Dato un punto $x\in L_\xi$ chiameremo il corrispondente punto $x^*\in L^*\cap L_\xi$ "rappresentante" in L^* di $x\in L$ e ci riferiremo quindi ad L^* come all'insieme dei rappresentanti di L.

§3. *Proprietà delle soluzioni ottime del problema P*

In questo paragrafo metteremo in evidenza varie proprietà relative all'insieme S_P delle soluzioni ottime del problema P.
Il problema P, ad esempio, può avere massimi locali distinti dal massimo globale; i seguenti teoremi individueranno ipotesi sotto le quali ciò non accade studiando la concavità generalizzata della funzione obiettivo f per mezzo dei risultati stabiliti in [1, 11].
Al fine di dare a questo lavoro una trattazione autonoma, è riportata in appendice A una dimostrazione formale per esteso del teorema 3.1; ricordiamo inoltre che in [2] è stato svolto tale studio nel caso α intero con tecniche dimostrative diverse.

Teorema 3.1

La funzione obiettivo f del problema P è di classe $C^\infty(R)$ ed inoltre risulta per $\alpha=0,-1$ sia pseudo-concava (pcv) che pseudo-convessa (pcx) su tutto R mentre per $\alpha\neq 0,-1$:

	$\{x\in R: f(x)\leq 0\}$	$\{x\in R: f(x)\geq 0\}$
$-1<\alpha<0$	pcv	pcx
$\alpha<-1$, $\alpha>0$	pcx	pcv

Conseguenza diretta del teorema precedente è il seguente:

Teorema 3.2
Si consideri il problema P e supponiamo che sia $S_P \neq \emptyset$.

i) se $-1<\alpha<0$ ed è $f(x)\leq 0$ $\forall x\in R$ allora ogni punto di ottimo locale è anche di ottimo globale ed inoltre l'insieme S_P degli ottimi globali è convesso;

ii) se $\alpha<-1$ oppure $\alpha>0$ ed è $\{x\in R: f(x)\geq 0\}\neq\emptyset$ allora l'insieme S_P degli ottimi globali è convesso.

Dim La tesi segue direttamente dal teorema 3.1 e dal fatto che la funzione obiettivo essendo pseudo-concava e differenziabile è sia semistrettamente quasi-concava (per cui ogni punto di ottimo locale è anche di ottimo globale) che quasi-concava (per cui l'insieme dei punti di ottimo globale è convesso). ♦

Lo studio effettuato nel paragrafo precedente ci ha permesso di determinare il particolare insieme L^* di soluzioni ottime di livello per il problema P avente, per ogni livello ammissibile $\xi\in[\xi_m, \xi_M]$, esattamente un punto $x^*\in L^*\cap L_\xi$ ed in più facilmente determinabile da un punto di vista algoritmico.
Vediamo adesso come la caratterizzazione di L^* permetta di ottenere risultati relativi alla esistenza di soluzioni ottime per il problema P. Ricordiamo innanzi tutto che se $L=\emptyset$ si ha $\sup_{x\in R} f(x)=+\infty$; studieremo quindi il solo caso $L\neq\emptyset$.

Teorema 3.3
Si consideri il problema di estremo vincolato P. Risulta:

i) $\sup_{x\in R} f(x) = \sup_{x\in L^*} f(x)$;

ii) $\sup_{x\in R} f(x) = \max_{x\in R} f(x)$ se e solo se $\sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)$.

Dim i) Essendo $L^*\subseteq R$, risulta banalmente $\sup_{x\in R} f(x) \geq \sup_{x\in L^*} f(x)$. Si consideri ora una successione $\{x_i\}\subseteq R$ tale che $\sup_i f(x_i)= \sup_{x\in R} f(x)$ e si denoti con $x_i^*\in L^*$ il rappresentante di L^* delle soluzioni ottime di livello relative al livello $d_0+d^T x_i$ (esistente per il teorema 2.1 e la proprietà 2.5); si può determinare così una successione $\{x_i^*\}\subseteq L^*$ tale che per ogni indice $f(x_i^*)\geq f(x_i)$ per cui risulta

$\sup_{x\in L^*} f(x)\geq\sup_i f(x_i^*)\geq\sup_i f(x_i)=\sup_{x\in R} f(x)$, da cui segue la tesi.

ii) Se risulta $\max_{x\in L^*} f(x)=f(x_0)$, con $x_0\in L^*$, allora deve necessariamente essere, per il punto a), $f(x_0)=\sup_{x\in R} f(x)$ e quindi $f(x_0)=\max_{x\in R} f(x)$; se invece abbiamo $\max_{x\in R} f(x)=f(x_0)$, con $x_0\in R$, allora esiste per il teorema 2.1 e la proprietà 2.5 un punto $x_0^*\in L^*$ tale che $d_0+d^T x_0=d_0+d^T x_0^*$ e $f(x_0^*)\geq f(x_0)$; poiché non può essere $f(x_0^*)>f(x_0)$ in quanto $f(x_0)=\max_{x\in R} f(x)$ si ha per la i) $f(x_0)=\sup_{x\in L^*} f(x)=\max_{x\in L^*} f(x)$. ♦

Teorema 3.4

Si consideri il problema di estremo vincolato P.

i) Se $S_P\neq\emptyset$ allora esiste una soluzione ottima del problema appartenente ad uno spigolo della regione ammissibile R.

ii) Se $S_P=\emptyset$ allora si ha $\sup_{x\in R} f(x)=\lim_{t\to+\infty} f(\bar{x}_s+tu_s)$, con $\bar{x}_s$ ed u_s definiti in (2.3).

Dim i) Se esiste il massimo per il problema P allora, per il teorema 3.3, una soluzione ottima di P deve appartenere all'insieme L* che è composto da spigoli della regione ammissibile R.

ii) Essendo $\sup_{x\in R} f(x)=\sup_{x\in L^*} f(x)$, segue che se $S_P=\emptyset$ la semiretta r_s della (2.3) non può coincidere con il vertice $\bar{x}_s$, altrimenti L* risulterebbe un insieme compatto e di conseguenza avremmo $\max_{x\in L^*} f(x)=\max_{x\in R} f(x)$; di conseguenza si ha

$\sup_{x\in L^*} f(x)=\sup_{x\in r_s} f(x)=\lim_{t\to+\infty} f(\bar{x}_s+tu_s)$. ♦

Determiniamo adesso delle condizioni che garantiscano l'esistenza di una soluzione ottima per il problema.

Teorema 3.5

Sia $r_s=\{x\in\Re^n: x=\bar{x}_s+tu_s \text{ con } t\geq 0 \text{ e } u_s\in\Re^n\}\subseteq L^*$ la semiretta definita in (2.3) e sia $[\xi_m, \xi_M]$ l'insieme dei livelli ammissibili di P.

i) Se $\xi_M<+\infty$, allora P ammette soluzioni ottime per ogni α.

ii) Se $\xi_M=+\infty$ ed inoltre si ha $(\alpha+1)c^Tu_s=0$ e $((d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)\leq 0$ oppure $(\alpha+1)c^Tu_s<0$, allora P ammette soluzioni ottime.

Dim i) Segue dal fatto che se $\xi_M<+\infty$ allora $r_s=\{\bar{x}_s\}$ e quindi L^* è un insieme compatto, per cui risulta $\sup_{x\in R} f(x) = \sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)$.

ii) Sia $g(t)=(c_0+c^T\bar{x}_s+tc^Tu_s)(d_0+d^T\bar{x}_s+td^Tu_s)^\alpha$ la restrizione della funzione obiettivo f lungo la semiretta r_s ; la sua derivata risulta:

$$g'(t)=(d_0+d^T\bar{x}_s+td^Tu_s)^{\alpha-1}(((d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)+t(\alpha+1)c^Tu_sd^Tu_s).$$

Si osservi che l'ipotesi $d_0+d^Tx>0\ \forall x\in R$ implica che $d_0+d^T\bar{x}_s>0$, mentre l'ipotesi $\xi_M=+\infty$ implica $d^Tu_s>0$. Ne consegue che le condizioni $(\alpha+1)c^Tu_s<0$ oppure $(\alpha+1)c^Tu_s=0$ e $((d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)\leq 0$ implicano l'esistenza di un punto di massimo della funzione g(t) e quindi, per il punto ii) del teorema 3.4 , si ha $S_P\neq\emptyset$. ♦

Siamo ora in grado di determinare sottoclassi di problemi per i quali esiste il massimo globale. Vale al riguardo il seguente:

Teorema 3.6

Si consideri la classe dei problemi di estremo vincolato P.

i) Ogni problema P con $\alpha>0$ ed $f(x)\leq 0\ \forall x\in R$ ammette sempre soluzione ottima.

ii) Ogni problema P con $\alpha<-1$ ed $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$ ammette sempre soluzione ottima ed inoltre l'insieme S_P delle soluzioni ottime è convesso.

Dim Se l'insieme dei livelli ammisibili è limitato le tesi seguono direttamente dal punto i) del teorema 3.5 , altrimenti sia r_s la semiretta definita in (2.3) e $g(t)=(c_0+c^T\bar{x}_s+tc^Tu_s)(d_0+d^T\bar{x}_s+td^Tu_s)^\alpha$ la restrizione su essa della funzione obiettivo f.

i) Poiché $f(x)\leq 0\ \forall x\in R$ si ha $(c_0+c^T\bar{x}_s)\leq 0$ e $c^Tu_s\leq 0$ e quindi, essendo $\alpha>0$, risulta $(\alpha+1)c^Tu_s\leq 0$; se poi in particolare è $(\alpha+1)c^Tu_s=0$ risulta necessariamente $((d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)=(\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)\leq 0$; ne consegue quindi che, per la ii) del teorema 3.5, il problema P ammette soluzione ottima.

ii) Sia ora $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$; se per assurdo fosse $c^Tu_s<0$ esisterebbe un reale $\bar{t}\geq 0$ tale che per ogni $t\geq\bar{t}$ risulterebbe $g(t)\leq 0$ e quindi, essendo per ipotesi $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$, avremmo $\sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)>0$ contro l'ipotesi $S_P=\emptyset$; analogamente se per assurdo fosse $c^Tu_s=0$ e $(c_0+c^T\bar{x}_s)\leq 0$ avremmo che $f(x)\leq 0$ $\forall x\in r_s$ e quindi l'asserto in quanto $\sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)>0$; essendo quindi $c^Tu_s>0$ oppure $c^Tu_s=0$ e $(c_0+c^T\bar{x}_s)>0$ risulta $\sup_{x\in R} f(x)= \lim_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$ $\forall\alpha>0$ e $\forall\alpha\in(-1,0)$, tenuto conto che per $\alpha\in(-1,0)$ il caso $c^Tu_s=0$ e $(c_0+c^T\bar{x}_s)>0$ non può mai presentarsi, altrimenti $(\alpha+1)c^Tu_s=0$ e $((d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)=$ $=(\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s)<0$ e quindi per il teorema 3.5 avremmo $S_P\neq\emptyset$, per cui deve necessariamente essere $c^Tu_s>0$.

iii) Se infine abbiamo $\alpha=-1$, affinché non esistano soluzioni ottime deve essere $(d_0+d^T\bar{x}_s)c^Tu_s>(c_0+c^T\bar{x}_s)d^Tu_s$, per cui risulta $\sup_{x\in R} f(x)= \lim_{t\to+\infty} g(t)=\frac{c^Tu_s}{d^Tu_s}$. ♦

Per quanto riguarda lo studio degli ottimi locali del problema P vale il seguente:

Teorema 3.8

Se $x^*\in L^*$ è un punto di massimo locale rispetto ad L^* allora x^* è anche un punto di massimo locale per il problema P.

Dim Supponiamo per assurdo che x^* non sia un punto di massimo locale per P e che quindi esista una successione di punti $\{x_i\}\subset R$ convergente ad x^* tale che per ogni indice i risulti $f(x_i)>f(x^*)$; associata alla successione $\{x_i\}$ possiamo determinare un'altra successione di punti $\{x_i^*\}\subset L^*$ convergente ad x^* tale che x_i^* è la soluzione ottima del problema P_{ξ_i} con $\xi_i=d_0+d^Tx_i$.

Per la definizione di soluzione ottima di livello per P abbiamo che necessariamente per ogni indice i risulta $f(x_i^*)\geq f(x_i)>f(x)=f(x^*)$ e quindi x^* non può essere di massimo locale rispetto ad L^*, il che è assurdo poiché nega le ipotesi. ♦

Nel caso in cui la funzione obiettivo non sia pseudo-concava nella regione ammissibile R si possono avere più massimi locali; nel seguente esempio considereremo un problema a due variabili avente nella regione ammissibile quattro diversi massimi locali ai quali corrispondono valori diversi della funzione obiettivo.

Esempio 3.1

ii) Consideriamo adesso un problema P con $\alpha<-1$ ed $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$; se $c^T u_s<0$ esiste un reale $\bar{t}\geq 0$ tale che per ogni $t\geq\bar{t}$ si ha $g(t)\leq 0$ e quindi, essendo per ipotesi $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$, deve essere $\sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)>0$; se $c^T u_s=0$ e $(c_0+c^T\bar{x}_s)\leq 0$ abbiamo che $f(x)\leq 0$ $\forall x\in r_s$ e quindi ancora $\sup_{x\in L^*} f(x) = \max_{x\in L^*} f(x)>0$; se infine $c^T u_s>0$ oppure $c^T u_s=0$ e $(c_0+c^T\bar{x}_s)>0$ abbiamo necessariamente $(\alpha+1)c^T u_s<0$ oppure $((d_0+d^T\bar{x}_s)c^T u_s+\alpha(c_0+c^T\bar{x}_s)d^T u_s)<0$ e quindi il problema P ha, per la ii) del teorema 3.5, soluzione ottima; sotto queste ipotesi inoltre, per il teorema 3.2, l'insieme delle soluzioni ottime è convesso. ♦

Vediamo ora, quando P non ammette soluzioni ottime, in quali casi l'estremo superiore è finito.

Teorema 3.7

Consideriamo il problema P e supponiamo che sia $S_P=\emptyset$ ed $L\neq\emptyset$.

i) Se $f(x)\leq 0$ $\forall x\in R$ allora $\sup_{x\in R} f(x)=0$ $\forall\alpha<-1$ e $\forall\alpha\in(-1,0)$.

ii) Se $\{x\in R: f(x)>0\}\neq\emptyset$ allora $\sup_{x\in R} f(x)=+\infty$ $\forall\alpha>0$ e $\forall\alpha\in(-1,0)$.

iii) Se $\alpha=-1$ allora $\sup_{x\in R} f(x)=\dfrac{c^T u_s}{d^T u_s}$, con u_s definita in (2.3).

Dim Per il teorema 3.4 se $S_P=\emptyset$ allora si ha $\sup_{x\in R} f(x)=\lim_{t\to+\infty} f(\bar{x}_s+tu_s)$, dove r_s è la semiretta di L^* definita in (2.3); la restrizione della funzione obiettivo f lungo essa è $g(t)=(c_0+c^T\bar{x}_s+tc^T u_s)(d_0+d^T\bar{x}_s+td^T u_s)^\alpha$.

i) Se $f(x)\leq 0$ $\forall x\in R$ deve risultare necessariamente $(c_0+c^T\bar{x}_s)\leq 0$ e $c^T u_s\leq 0$ con $(c_0+c^T\bar{x}_s)$ e $c^T u_s$ non simultaneamente nulli (altrimenti il problema ha soluzione ottima per il teorema 3.5), per cui si ha $\sup_{x\in R} f(x)=\lim_{t\to+\infty} g(t)=0$ $\forall\alpha<-1$ e $\forall\alpha\in(-1,0)$, tenuto conto che per $\alpha\in(-1,0)$ non può essere $(\alpha+1)c^T u_s<0$, altrimenti il problema avrebbe soluzione ottima per il teorema 3.5, per cui deve necessariamente essere $c^T u_s=0$ e quindi $(c_0+c^T\bar{x}_s)<0$.

I quattro vertici risultano quindi ottimi locali rispetto ad L* e, come abbiamo già detto, sono punti di ottimo locale per il problema P; risultando inoltre $f(\bar{x}_1)=-\frac{3}{4}$, $f(\bar{x}_2)=-\frac{832}{729}$, $f(\bar{x}_3)=-\frac{847}{729}$, $f(\bar{x}_4)=0$, abbiamo che il punto di massimo globale rispetto ad L*, e quindi per il teorema 3.1 il punto di massimo globale del problema P, è $\bar{x}_4$ con $f(\bar{x}_4)=0$.

§4. *Condizioni di ottimalità*

Vediamo adesso come gli insiemi S_i ed $\bar{S}_i$, introdotti in §2, ci permettono di ottenere risultati fondamentali per la determinazione di condizioni di ottimalità per il problema P.

Teorema 4.1

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice soluzione ottima di livello per il problema P, si consideri un elemento $\bar{x}\in S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$, e si ponga $\xi=d_0+d^T\bar{x}$.

Condizione sufficiente affinché $\bar{x}$ sia un punto di massimo locale/globale rispetto alla regione $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$ è che $\bar{x}$ sia un punto di massimo locale/globale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$.

Dim Poiché x* è una soluzione ottima di livello per il problema P allora ogni punto $\bar{x}\in S_i$ tale che $d_0+d^T\bar{x}>0$ è una soluzione ottima di livello rispetto ad $\bar{S}_i$, ne consegue quindi che, essendo $\bar{x}$ punto di massimo locale/globale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$, $\bar{x}$ è punto di massimo locale/globale rispetto alla regione $\{y\in\bar{S}_i: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}\supseteq\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$. ♦

In modo analogo possiamo dimostrare che una condizione sufficiente affinché $\bar{x}$ sia un massimo locale/globale per la regione $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi]\}$ è che $\bar{x}$ sia un massimo locale/globale per l'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi]\}$.

Teorema 4.2

Un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ è un punto di ottimo locale per il problema P se e solo se è una soluzione ottima di livello per P ed è un punto di ottimo locale rispetto agli spigoli ammissibili $S_i\cap R$ con $i\in D^+\cup D^-$.

Dim La necessarietà è banale; la sufficienza segue dal precedente teorema 4.1 osservando che, posto $\xi=d_0+d^Tx^*$, per le ipotesi x^* è di ottimo locale per le regioni $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi]\}$ e $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$. ♦

Teorema 4.3

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice soluzione ottima di livello per il problema P e si consideri un elemento $\overline{x}\in S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$, tale che $\xi=d_0+d^T\overline{x}\in(\xi_m, \xi_M)$.
Condizione sufficiente affinché $\overline{x}$ sia un punto di massimo globale per il problema P è che sia un punto di massimo locale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in(\xi_m, \xi_M)\}$.

Dim Sia $g(x_{N(i)})=(\overline{c}_0+\overline{c}_{N(i)}x_{N(i)})(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})^\alpha$ la restrizione rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi_M]\}$ della funzione $\overline{f}$, relativa a $\overline{P}$ e consideriamo la sua derivata:

$$g'(x_{N(i)})=(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha-1}((\overline{d}_0\overline{c}_{N(i)}+\alpha\overline{c}_0\overline{d}_{N(i)})+((\alpha+1)\overline{c}_{N(i)}\overline{d}_{N(i)})x_{N(i)}). \quad (4.1)$$

Poiché per ipotesi $(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})>0$ per ogni $x\in\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in(\xi_m, \xi_M)\}$ abbiamo, vista la struttura della $g'(x_{N(i)})$, che se $\overline{x}$ è un punto di massimo locale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in(\xi_m, \xi_M)\}$ è anche necessariamente un punto di massimo globale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi_M]\}$ e quindi, per il teorema 4.1, è un punto di massimo globale per P. ♦

Osservazione 4.1

Il teorema precedente fornisce una interessante proprietà del problema P: nel caso in cui un punto $\overline{x}$ interno ad uno spigolo ammissibile di soluzioni ottime di livello $S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$, sia di massimo locale rispetto ad $S_i\cap R$ allora esso è anche un punto di massimo globale e di conseguenza ogni altro punto di massimo locale, avente valore della funzione obiettivo inferiore, deve necessariamente essere un vertice della regione ammissibile R.

Con riferimento al problema $\overline{P}$ ed alla (4.1) consideriamo i seguenti vettori: $\gamma=(\overline{d}_0\overline{c}_N+\alpha\overline{c}_0\overline{d}_N)\in\Re^{n-m}$ e $\delta\in\Re^{n-m}$ tale che $\delta_i=(\alpha+1)\overline{c}_{N(i)}\overline{d}_{N(i)}$ $\forall i\in\{1,\dots,n-m\}$.
Una tale simbologia si rivelerà particolarmente utile nel determinare alcune condizioni di ottimalità che saranno utilizzate nel §5 per stabilire un algoritmo simplex-like.

Il seguente risultato generalizza quello presentato in [3, 5, 9] relativo ad un problema di programmazione lineare frazionaria, problema che coincide con il problema P nel caso in cui sia $\alpha=-1$.

Teorema 4.4

Un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ è un punto di ottimo locale per il problema P se e solo se è una soluzione ottima di livello per P che verifica la seguente condizione:

$$\gamma_i\leq 0 \ \forall i\in D^+\cup D^- \text{ e } \delta_i\leq 0 \text{ per ogni indice } i\in D^+\cup D^- \text{ tale che } \gamma_i=0.$$

Dim Per il teorema 4.2 è sufficiente dimostrare che x^* è un punto di ottimo locale rispetto agli spigoli ammissibili $S_i\cap R$ con $i\in D^+\cup D^-$ se e solo se $\gamma_i\leq 0$ $\forall i\in D^+\cup D^-$ e $\delta_i\leq 0$ per ogni indice $i\in D^+\cup D^-$ tale che $\gamma_i=0$.

Sia $g(x_{N(i)})=(\bar{c}_0+\bar{c}_{N(i)}x_{N(i)})(\bar{d}_0+\bar{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha}$ la restrizione rispetto ad uno spigolo ammissibile $S_i\cap R$ della funzione $\bar{f}$, relativa a $\bar{P}$; essendo per ipotesi $(\bar{d}_0+\bar{d}_{N(i)}x_{N(i)})>0$ $\forall x_{N(i)}\in S_i\cap R$, la funzione g è banalmente di classe $C^\infty(S_i\cap R)$ ed in particolare risulta $g'(x_{N(i)})=(\bar{d}_0+\bar{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha-1}(\gamma_i+\delta_i x_{N(i)})$; di conseguenza x^* è di ottimo locale rispetto ad $S_i\cap R$ se e solo se $\gamma_i\leq 0$ (ovvero $g'(0)\leq 0$) e $\delta_i\leq 0$ nel caso in cui sia $\gamma_i=0$. ◆

Teorema 4.5

Condizione sufficiente affinché un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$ sia un punto di ottimo globale per il problema P è che sia una soluzione ottima di livello basica per P e valga la condizione $\gamma_i=0$ e $\delta_i\leq 0$ per almeno un indice $i\in D^+\cup D^-$.

Dim Sia $g(x_{N(i)})=(\bar{c}_0+\bar{c}_{N(i)}x_{N(i)})(\bar{d}_0+\bar{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha}$ la restrizione rispetto all'insieme $\{y\in S_i:\ d_0+d^Ty\in[\xi_m,\xi_M]\}$ della funzione $\bar{f}$, relativa a $\bar{P}$ e consideriamo la sua derivata $g'(x_{N(i)})=(\bar{d}_0+\bar{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha-1}(\gamma_i+\delta_i x_{N(i)})$.

Poiché le ipotesi, vista la struttura della $g'(x_{N(i)})$, implicano che x^* è un punto di massimo globale rispetto all'insieme $\{y\in S_i:\ d_0+d^Ty\in[\xi_m,\xi_M]\}$ segue, per il teorema 4.1, che x^* è un punto di massimo globale per P. ◆

Teorema 4.6

Sia $x^*=(x_B,0)\in R$ un vertice soluzione ottima di livello rispetto ad R e consideriamo uno spigolo ammissibile $S_i\cap R$, con $i\in D^+\cup D^-$.

i) Se risulta $\gamma_i=\delta_i=0$ allora ogni punto $\bar{x}\in S_i\cap R$ è una soluzione ottima per P.

ii) Se risulta $\gamma_i>0$, $\delta_i<0$ ed il punto $\bar{x}\in S_i$ tale che $\bar{x}_{N(i)}=\frac{-\gamma_i}{\delta_i}$ è ammissibile per P allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima per P.

Dim Sia $g(x_{N(i)})=(\overline{c}_0+\overline{c}_{N(i)}x_{N(i)})(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha}$ la restrizione rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi_M]\}$ della funzione $\overline{f}$, relativa a $\overline{P}$ e consideriamo la sua derivata $g'(x_{N(i)})=(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha-1}(\gamma_i+\delta_i x_{N(i)})$.
Se $\gamma_i=\delta_i=0$ la funzione obiettivo è costante sullo spigolo ammissibile $S_i\cap R$ che risulta così essere composto da ottimi globali per il problema grazie al teorema 4.5; se invece $\gamma_i>0$, $\delta_i<0$ ed $\overline{x}_{N(i)}=\frac{-\gamma_i}{\delta_i}$ allora il punto $\overline{x}$ è di massimo locale rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in(\xi_m, \xi_M)\}$ e quindi, per il teorema 4.3, è una soluzione ottima per P. ♦

Teorema 4.7
Condizione sufficiente affinché un vertice $x^*=(x_B,0)\in R$, appartenente al livello $\xi=d_0+d^Tx^*$, sia di ottimo globale rispetto alla regione $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$ è che sia una soluzione ottima di livello basica per P e valga la condizione:

$$\gamma_i\leq 0 \text{ e } \delta_i\leq 0 \text{ oppure } \gamma_i<0 \text{ e } \delta_i>0 \text{ con } \lim_{x_{N(i)}\to+\infty}(\overline{c}_0+\overline{c}_{N(i)}x_{N(i)})(\overline{d}_0+\overline{d}_{N(i)}x_{N(i)})^{\alpha}<\overline{c}_0\overline{d}_0^{\alpha}$$

per almeno un indice $i\in D^+$.
Dim Analogamente al teorema precedente abbiamo che le ipotesi garantiscono l'ottimalità globale di x^* rispetto all'insieme $\{y\in S_i: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$ e quindi per il teorema 4.1 la sua ottimalità globale rispetto a $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi, \xi_M]\}$. ♦

E' ovviamente possibile provare un teorema analogo al precedente nel quale si fornisca una condizione sufficiente per l'ottimalità globale di un vertice $x^*\in R$ rispetto alla regione $\{y\in R: d_0+d^Ty\in[\xi_m, \xi]\}$ tramite l'analisi di un indice $i\in D^-$.

§5. Algoritmo risolutivo

Siamo adesso in grado di stabilire, tenuto conto delle condizioni di ottimalità determinate nel precedente paragrafo, un metodo sequenziale per la risoluzione del problema P; in tale algoritmo verrà inoltre utilizzata l'eventuale pseudo-concavità della funzione obiettivo nell'insieme $\{x \in R;\ f(x) \geq 0\}$.

passo 1: determinare una soluzione ottima $\bar{x}_0$ del problema lineare $\begin{cases} \min\ (d_0+d^T x) \\ x \in R \end{cases}$

e, posto $\xi_m := (d_0 + d^T \bar{x}_0)$, determinare, se esiste, un vertice ottimo $\bar{x}_1$ del problema lineare P_{ξ_m}; se tale soluzione non esiste allora $L=\emptyset$ e

$\sup_{x \in R} f(x) = +\infty$ *stop*, altrimenti porre $j:=1$ ed $\bar{x}_g := \bar{x}_1$; se $\alpha<-1$ oppure $\alpha>0$ e risulta $f(\bar{x}_g) \geq 0$ allora, per la pseudo-concavità della funzione obiettivo, $\bar{x}_g$ è una soluzione ottima globale *stop*, altrimenti andare al passo 2.

passo 2: determinare l'insieme di indici D^+ relativo alla soluzione ottima di livello basica $\bar{x}_j$; se $D^+=\emptyset$ allora non esistono livelli ammissibili maggiori e quindi un ottimo globale per P è $\bar{x}_g$ *stop*, altrimenti scelto un qualsiasi indice $k \in D^+$ determinare γ_k e δ_k.

Se $\gamma_k=0$ e $\delta_k \leq 0$ allora $\bar{x}_j$ è una soluzione ottima globale per P e quindi porre $\bar{x}_g := \bar{x}_j$ *stop*.

Se $\gamma_k<0$ e $\delta_k>0$ allora $\bar{x}_j$ è un ottimo locale per P; se $\alpha<-1$ oppure $\alpha>0$ e risulta $f(\bar{x}_j) \geq 0$ allora, per la pseudo-concavità della funzione obiettivo, $\bar{x}_j$ è una soluzione ottima globale per P e quindi porre $\bar{x}_g := \bar{x}_j$ *stop*, altrimenti andare al passo 4.

Se $\gamma_k=0$ e $\delta_k>0$ oppure $\gamma_k>0$ e $\delta_k \geq 0$ andare al passo 3.

Se $\gamma_k>0$ e $\delta_k<0$ calcolare il punto $\bar{x} \in S_k$ tale che $\bar{x}_{N(k)} = \frac{-\gamma_k}{\delta_k}$; se $\bar{x}$ è ammissibile per P allora è una soluzione ottima globale per P e quindi porre $\bar{x}_g := \bar{x}$ *stop*, altrimenti andare al passo 3.

Se $\gamma_k<0$ e $\delta_k \leq 0$ allora $\bar{x}_j$ è di ottimo globale per tutti i punti ammissibili appartenenti a livelli maggiori ed inoltre è un ottimo locale per P; se risulta $f(\bar{x}_j) > f(\bar{x}_g)$ porre $\bar{x}_g := \bar{x}_j$; una soluzione ottima globale è $\bar{x}_g$ *stop*.

passo 3: Determinare tramite una operazione perno il vertice $\overline{x}_{j+1}$, se esiste, adiacente ad $\overline{x}_j$ lungo lo spigolo ammissibile $S_k \cap R$ composto da soluzioni ottime di livello per P.

Se tale vertice esiste allora porre $j:=j+1$ e ripetere il passo 2, altrimenti abbiamo trovato la semiretta r_s e quindi, calcolato il valore $s=\sup_{x\in r_s} f(x)$, se $s>f(\overline{x}_g)$ allora il problema non ammette soluzione ottima ed il suo estremo superiore è s *stop*, altrimenti una soluzione ottima è $\overline{x}_g$ *stop*.

passo 4 (*salto*): Se risulta $f(\overline{x}_j)>f(\overline{x}_g)$ porre $\overline{x}_g:=\overline{x}_j$;

Sia $r_j=\{x\in\Re^n: x=\overline{x}_j+tu_j \text{ con } t\geq 0 \text{ e } u_j\in\Re^n\}$ la semiretta contenente lo spigolo ammissibile $S_k\cap R$ e sia $g(t)=(c_0+c^T\overline{x}_j+tc^Tu_j)(d_0+d^T\overline{x}_j+td^Tu_j)^\alpha$ la restrizione della funzione obiettivo f lungo essa.

Se $r_j=S_k\cap R$ abbiamo trovato la semiretta r_s e quindi, calcolato il valore $s=\sup_{x\in r_s} f(x)=\lim_{t\to+\infty} g(t)$, se $s>f(\overline{x}_g)$ il problema non ammette soluzioni ottime globali ed il suo estremo superiore è s *stop*, altrimenti una soluzione ottima è $\overline{x}_g$ *stop*.

Se $r_j\neq S_k\cap R$ determinare, se esiste, l'unico valore reale $\overline{t}>0$ tale che $g(\overline{t})=f(\overline{x}_g)$; se tale valore non esiste allora una soluzione ottima globale è $\overline{x}_g$ *stop*, altrimenti se $\overline{x}_j+\overline{t}u_j\in S_k\cap R$ determinare tramite una operazione perno il vertice $\overline{x}_{j+1}$ adiacente ad $\overline{x}_j$ lungo lo spigolo $S_k\cap R$, porre $j:=j+1$ e ripetere il passo 2, se invece $\overline{x}_j+\overline{t}u_j\notin S_k\cap R$ porre $\xi:=d_0+d^T\overline{x}_j+\overline{t}d^Tu_j$ e determinare, se esiste, un vertice ottimo $\overline{x}_{j+1}$ del problema lineare P_ξ; se tale soluzione non esiste allora una soluzione ottima globale è $\overline{x}_g$ *stop*, altrimenti aggiungere al problema il vincolo $d_0+d^Tx\geq\xi$, porre $j:=j+1$ ed andare al passo 2.

Convergenza dell'algoritmo

Il metodo sequenziale proposto genera vertici distinti di L* oppure punti appartenenti a spigoli di L* (ogni qual volta viene eseguita una procedura di salto) in numero complessivo non superiore al numero dei vertici di L*.

La convergenza del metodo segue quindi dal fatto che il numero dei vertici è finito.

Appendice A. ***Concavità generalizzata della funzione obiettivo***

Per ragioni di completezza forniamo in questa appendice una dimostrazione formale della concavità generalizzata della funzione obiettivo f.

A tal fine utilizzeremo un procedimento analogo a quello proposto in [1, 11], sfrutteremo cioè un teorema di composizione che permette di limitare lo studio della concavità generalizzata ad una funzione più semplice di quella di partenza. Data la particolare struttura della funzione obiettivo, dimostriamo direttamente anche il teorema di composizione:

Teorema A.1

Consideriamo la funzione a valori reali $g(y_1,\ldots,y_m):D\rightarrow\Re$, con $D\subseteq\Re^m$ insieme convesso e siano poi $\phi_i:C\rightarrow\Re$ $i=1,\ldots,m$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, funzioni lineari tali che, indicando con $\Phi=(\phi_1,\ldots,\phi_m)$, $\Phi(C)\subseteq D$. Se la funzione g è pseudo-concava[1] allora la funzione $f(x)=g(\Phi(x))$, $f:C\rightarrow\Re$, è pseudo-concava.

Dim Siano $x,y\in C$ e sia $\lambda\in(0,1)$ un valore reale; per la linearità delle funzioni $\phi_i:C\rightarrow\Re$ $i=1,\ldots,m$, abbiamo che $\phi_i(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda\phi_i(x)+(1-\lambda)\phi_i(y)$ e quindi che:

$$g(\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y))=g(\lambda\Phi(x)+(1-\lambda)\Phi(y)) \quad \forall x,y\in C,\ \forall\lambda\in(0,1) \qquad (*).$$

Essendo la funzione g pseudo-concava, la condizione $g(\Phi(y))>g(\Phi(x))$ implica $g(\lambda\Phi(x)+(1-\lambda)\Phi(y))\geq g(\Phi(x))+\lambda(1-\lambda)k(\Phi(x),\Phi(y))$ $\forall\Phi(x),\Phi(y)\in D$, $\forall\lambda\in(0,1)$, dove $k:DxD\rightarrow\Re$ è una funzione positiva dipendente solo da $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$.

La funzione $k':CxC\rightarrow\Re$, definita come $k'(x,y)=k(\Phi(x),\Phi(y))$, è quindi a sua volta positiva e dipendente solo da x ed y; grazie alla (*) otteniamo perciò che $g(\Phi(y))>g(\Phi(x))$ implica $g(\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y))\geq g(\Phi(x))+\lambda(1-\lambda)k'(x,y)$ $\forall x,y\in C$, $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi che la funzione f è pseudo concava. ♦

Nel caso in cui è $\alpha=-1$ è possibile determinare per la funzione obiettivo particolari proprietà, studiamo quindi questo caso a parte:

---

[1] Una funzione reale $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, è detta pseudo-concava (pcv) se per ogni $x,y\in C$ la condizione $f(y)>f(x)$ implica che $f(\lambda y+(1-\lambda)x)\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, dove $\xi(x,y)>0$ è una funzione positiva non dipendente da λ ma soltanto da x ed y, è invece detta strettamente pseudo-concava (s.pcv) se per ogni $x,y\in C$, con $x\neq y$, la condizione $f(y)\geq f(x)$ implica che $f(\lambda y+(1-\lambda)x)\geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, sempre con $\xi(x,y)$ funzione positiva.

Banalmente una funzione strettamente pseudo-concava è anche pseudo-concava, infine ricordiamo che una funzione f è detta pseudo-convessa (pcx) o strettamente pseudo-convessa (s.pcx) se la funzione -f è rispettivamente pseudo-concava o strettamente pseudo-concava.

__**Proprietà A.1**__

La funzione $g(y_1,y_2)=\frac{y_1}{y_2}$, definita sull'insieme convesso $D=\{(y_1,y_2)\in\Re^2:\ y_2>0\}$, è sia pseudo-concava che pseudo-convessa su D.

__**Dim**__ La funzione $g(y_1,y_2)=\frac{y_1}{y_2}$ è di classe $C^\infty(D)$ ed in particolare risulta $\nabla g(y_1,y_2)=\frac{1}{y_2^2}\begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}$ ed inoltre $\nabla^2 g(y_1,y_2)=\frac{1}{y_2^3}\begin{bmatrix} 0 & -y_2 \\ -y_2 & 2y_1 \end{bmatrix}$.

Posto $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ otteniamo $v^T\nabla^2 g(y_1,y_2)v=\frac{1}{y_2^3}(-2y_2v_1v_2+2y_1v_2^2)=\frac{2v_2}{y_2^3}(y_1v_2-y_2v_1)$; poiché la matrice $\nabla^2 g(y_1,y_2)$ non risulta definita in segno la funzione $g(y_1,y_2)$ non è né concava né convessa, studiamone quindi la pseudo-concavità[2] ponendo $\begin{cases} v^Tv=1 \\ v^T\nabla g(y_1,y_2)=0 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} v_1^2+v_2^2=1 \\ \frac{1}{y_2^2}(y_2v_1-y_1v_2)=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} v_1^2+v_2^2=1 \\ y_2v_1=y_1v_2 \end{cases}$;

ne consegue quindi che $v^T\nabla^2 g(y_1,y_2)v=0$ per cui, per verificare una eventuale pseudo-concavità, dobbiamo studiare la funzione $h(t)=\frac{y_1+tv_1}{y_2+tv_2}$ in t=0.

Poiché risulta $\frac{dh}{dt}(t)=\frac{v_1(y_2+tv_2)-v_2(y_1+tv_1)}{(y_2+tv_2)^2}=\frac{v_1y_2+tv_1v_2-v_2y_1-tv_1v_2}{(y_2+tv_2)^2}=0$, in t=0 la funzione h(t) ha sia un massimo che un minimo locale e di conseguenza la funzione $g(y_1,y_2)$ è sia pseudo-concava che pseudo-convessa. ♦

__**Proprietà A.2**__

La funzione $g(y_1,y_2)=y_1y_2^\alpha$, con α reale $\alpha\neq 0,-1$, definita sull'insieme convesso $D=\{(y_1,y_2)\in\Re^2:\ y_1\geq 0 \text{ e } y_2>0\}$ risulta pseudo-concava se $\alpha<-1$ od $\alpha>0$ e pseudo-convessa se $-1<\alpha<0$.

__**Dim**__ La funzione $g(y_1,y_2)=y_1y_2^\alpha$ è di classe $C^\infty(D)$ ed in particolare risulta $\nabla g(y_1,y_2)=y_2^{\alpha-1}\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}$ ed inoltre $\nabla^2 g(y_1,y_2)=\alpha y_2^{\alpha-2}\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & (\alpha-1)y_1 \end{bmatrix}$.

[2] Per dimostrare la pseudo-concavità di una funzione è utile usare il seguente teorema [Schaible]:
Sia g una funzione differenziabile due volte con continuità sull'insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$; la funzione g è [strettamente] pseudo-concava se e solo se $\forall x\in C$ e $\forall v\in\Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla g(x)=0$ abbiamo $v^T\nabla^2 g(x)v<0$ oppure $v^T\nabla^2 g(x)v=0$ e la funzione $h(t)=g(x+tv)$ ha un massimo locale [stretto] in t=0.

Posto $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ otteniamo $v^T\nabla^2 g(y_1,y_2)v=\alpha y_2^{\alpha-2}(2y_2v_1v_2+(\alpha-1)y_1v_2^2)$; poiché la matrice $\nabla^2 g(y_1,y_2)$ non risulta definita in segno la funzione $g(y_1,y_2)$ non è né concava né convessa, studiamone quindi la pseudo-concavità, inizialmente nell'insieme convesso $\{(y_1,y_2)\in D: y_1>0\}$, ponendo $\begin{cases} v^Tv=1 \\ v^T\nabla g(y_1,y_2)=0 \end{cases}$.

Poiché risulta $\begin{cases} v_2^2=\dfrac{y_2^2}{\alpha^2y_1^2+y_2^2} \\ v_1^2=\dfrac{\alpha^2y_1^2}{\alpha^2y_1^2+y_2^2} \end{cases}$ abbiamo che:

$v^T\nabla^2 g(y_1,y_2)v=\alpha y_2^{\alpha-2}(2y_2v_1v_2+(\alpha-1)y_1v_2^2)=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)g(y_1,y_2)}{\alpha^2y_1^2+y_2^2}$; la funzione $g(y_1,y_2)$ risulta così in $\{(y_1,y_2)\in D: y_1>0\}$ strettamente pseudo-convessa (anzi, fortemente pseudo-convessa[3]) per $-1<\alpha<0$ e strettamente pseudo-concava per $\alpha<-1$ ed $\alpha>0$. Grazie a questi risultati, per dimostrare le proprietà della $g(y_1,y_2)$ nell'insieme D ci basta osservare che[4]:

a) per $\alpha<-1$, $\alpha>0$ prendendo due elementi $z,y\geq 0$ appartenenti a D, tali che $y_1=0$ e $z_1>0$, $g(z_1,z_2)>g(0,y_2)$ implica $(z-y)^T\nabla g(y_1,y_2)=[z_1,z_2-y_2]\begin{bmatrix} y_2^{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}>0$ e quindi la funzione è pseudo-concava.

b) per $-1<\alpha<0$ prendendo due elementi $z,y\geq 0$ appartenenti a D, tali che $y_1=0$ e $z_1>0$, $g(z_1,z_2)>g(0,y_2)$ implica $(z-y)^T\nabla g(z_1,z_2)>0$ e quindi la funzione è pseudo-convessa;

difatti $(z-y)^T\nabla g(z_1,z_2)=[z_1,z_2-y_2]\, z_2^{\alpha-1}\begin{bmatrix} z_2 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix}=z_1z_2^{\alpha-1}(z_2+\alpha(z_2-y_2))$ e per ipotesi $z_1>0$, $z_2>0$ ed inoltre, essendo $-1<\alpha<0$, anche $z_2+\alpha(z_2-y_2)>0$:

- per $z_2\leq y_2$: $\alpha(z_2-y_2)\geq 0$ e quindi $z_2+\alpha(z_2-y_2)>0$;
- per $z_2>y_2$: $(\alpha+1)z_2>(\alpha+1)y_2$ e quindi $z_2+\alpha(z_2-y_2)=(\alpha+1)z_2-\alpha y_2>y_2>0$. ♦

[3]Sia g una funzione differenziabile due volte con continuità sull'insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$; la funzione g è fortemente pseudo-concava se e solo se $\forall x\in C$ e $\forall v\in\Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla g(x)=0$ abbiamo $v^T\nabla^2 g(x)v<0$, è invece detta fortemente pseudo-convessa se $-g$ è fortemente pseudo-concava.

[4]Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme aperto convesso. La funzione differenziabile $f:C\rightarrow\Re$ risulta pseudo-concava se e solo se per ogni $x,y\in C$ la condizione $f(y)>f(x)$ implica che $(y-x)^T\nabla f(x)>0$.

Osserviamo che in $D=\{(y_1,y_2)\in\Re^2: y_1\geq 0 \text{ e } y_2>0\}$ la funzione $g(y_1,y_2)=y_1 y_2^{\alpha}$ non è né strettamente quasi-concava[5] né strettamente quasi-convessa, ad esempio $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ e $g(0,2)=g(0,1)$ ma $g(\lambda\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=0=g(0,1)=g(0,2)$.

Teorema A.2

La funzione obiettivo f del problema P è di classe $C^{\infty}(R)$ ed inoltre risulta per $\alpha=0,-1$ sia pseudo-concava (pcv) che pseudo-convessa (pcx) su tutto R mentre per $\alpha\neq 0,-1$:

	$\{x\in R: f(x)\leq 0\}$	$\{x\in R: f(x)\geq 0\}$
$-1<\alpha<0$	pcv	pcx
$\alpha<-1$, $\alpha>0$	pcx	pcv

Dim Essendo $(d_0+d^T x)>0$ $\forall x\in R$ la funzione obiettivo f è banalmente di classe $C^{\infty}(R)$; il teorema segue quindi dal teorema di composizione A.1 e dalle proprietà A.1 per il caso $\alpha=-1$ e A.2 per il caso $\alpha\neq 0,-1$ ($\{x\in R: f(x)\leq 0\}=\{x\in R: -f(x)\geq 0\}$), ricordando che per $\alpha=0$ la funzione f è lineare. ♦

[5]Una funzione reale $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, è detta strettamente quasi-concava (s.qcv) se per ogni $x,y\in C$, con $x\neq y$, la condizione $f(y)\geq f(x)$ implica che $f(\lambda y+(1-\lambda)x)>f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, è invece detta strettamente quasi-convessa (s.qcx) se la funzione -f è strettamente quasi-concava. Ricordiamo che non esiste alcuna relazione diretta tra le funzioni pseudo-concave e quelle strettamente quasi-concave.

Bibliografia

[1] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and I. Zang : *Generalized Concavity*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, vol. 36, Plenum Press, 1988.

[2] Cambini, A. : *An algorithm for a special class of generalized convex programs*, Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, 1981.

[3] Cambini, A. and L. Martein : *A modified version of Martos's Algorithm*, Methods of Operation Research, vol. 53, pp. 33-44, 1986.

[4] Cambini, A. and L. Martein : *Linear Fractional and Bicriteria Linear Fractional Problem*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 345, A. Cambini et al. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[5] Cambini, A. and L. Martein : *Equivalence in Linear Fractional Programming*, Optimization, vol. 23, pp. 41-51, 1992.

[6] Cambini, A., Martein, L. and L. Pellegrini : *Decomposition methods and algorithms for a class of non-linear programming problems*, First Meeting AFCET-SMF, Palaiseau, Ecole Polytechnique Palaiseau, Paris, vol. 2, pp. 179-189, 1978.

[7] Cambini, A., Martein, L. and S. Schaible : *On maximizing a sum of ratios*, Journal of Information & Optimization Sciences 1, 1989.

[8] Martein, L. : *Massimo della somma tra una funzione lineare ed una funzione lineare fratta*, Rivista A.M.A.S.E.S., 13-20, 1985.

[9] Martos, B. : *Hyperbolic Programming*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 11, pp. 135-155, 1964.

[10] Martos, B. : *Nonlinear Programming, Theory and Methods*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[11] Schaible, S. : *Maximization of Quasiconcave Quotients and Products of Finitely Many Functionals*, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle 16, pp. 45-53, 1974.

[12] Schaible, S. and W.T. Ziemba (Eds.) : *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, 1981.