Report n.57

Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate

Riccardo CAMBINI

Pisa, aprile 1992

Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate

Riccardo Cambini

§1. *Introduzione*

In questi ultimi anni, la concavità generalizzata, introdotta da DeFinetti [12], Fenchel [15], Arrow-Enthoven [1], è stata ed è tuttora oggetto di intensi studi; tale interesse è stato stimolato dalle molteplici proprietà godute dalle funzioni concavo-generalizzate che hanno rilevanti applicazioni soprattutto nel campo economico.
Lo studio condotto nella letteratura specialistica si è rivolto verso i problemi di ottimizzazione scalare, aventi funzioni obiettivo e vincolari differenziabili e non, e si è concretizzato sia in rilevanti risultati teorici sia in interessanti aspetti algoritmici.
La generalizzazione e/o estensione della concavità generalizzata a problemi di estremo vettoriale è invece appena agli inizi.
Alcuni autori si sono limitati, in presenza di una funzione multiobiettivo, a richiedere la concavità generalizzata componente per componente; altri hanno invece definito particolari funzioni concavo-generalizzate rispetto ad un cono C [20, 21, 23, 24].
Per raggiungere risultati significativi nel campo dell'ottimizzazione vettoriale sarebbe necessario, ed auspicabile, un quadro di riferimento generale, così come è

stato raggiunto nel caso scalare. In recenti studi [5, 10, 20, 21, 23, 24, 32] si è difatti avvertita la necessità di adattare, al caso vettoriale, la definizione di certe funzioni concavo-generalizzate secondo i fini specifici dei lavori; ne consegue un particolare interesse ad un inquadramento teorico generale che possa costituire la base per future linee di ricerca in vari campi dell'ottimizzazione vettoriale.
Scopo di questa breve nota è quello di contribuire ad un tale inquadramento attraverso l'analisi di tutte le possibili estensioni, al caso multiobiettivo, delle più significative classi di funzioni concavo-generalizzate proposte nel caso scalare.
Partendo dall'osservazione che una disuguaglianza del tipo ">" o "<" nell'insieme dei numeri reali può essere interpretata, in uno spazio a più dimensioni, sia come l'appartenenza all'interno di un cono che come l'appartenenza ad un cono privato dell'origine, si definiscono alcune classi di funzioni concavo-generalizzate a valori vettoriali, includenti quelle proposte in [20, 21, 23, 24], che si dimostrano essere distinte tra loro.
La pur breve analisi effettuata in questa nota evidenzia tuttavia una notevole differenziazione di risultati tra il caso scalare e quello vettoriale. Ad esempio faremo vedere che non è possibile estendere la proprietà per la quale la classe delle funzioni semistrettamente quasi concave e semicontinue superiormente è contenuta in quella delle funzioni quasi concave.

§2. *Funzioni concave vettoriali*

Iniziamo ad individuare le possibili estensioni al caso vettoriale delle definizioni di funzioni concave[1] e strettamente concave[2].
Osserviamo che utilizzeremo definizioni di tipo puntuale, concernenti quindi relazioni tra i punti di un certo insieme ed un punto stabilito a priori; questo approccio, proposto originariamente da Mangasarian [26] e ripreso recentemente da altri autori (ad esempio [6, 22]), permette sia una maggiore generalità che un più immediato utilizzo per la determinazione di condizioni di ottimalità locali.
L'idea base di questo lavoro è quella di estendere al caso vettoriale le precedenti definizioni utilizzando un cono chiuso C di vertice l'origine avente interno non vuoto: in luogo della relazione "≥" sarà utilizzata l'appartenenza al cono C, mentre la relazione ">" sarà sostituita sia con l'appartenenza all'insieme $C\setminus\{0\}$ che con l'appartenenza all'interno di C.

D'ora in avanti denoteremo con $C\subset\Re^m$ un cono chiuso di vertice l'origine ed avente interno non vuoto, con C^0 il sottoinsieme $C\setminus\{0\}$ di C e con C^{00} l'interno di C.

Consideriamo una funzione vettoriale $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0. Diremo che:

$$f \text{ è C-concava (C.cv) in } x^0 \text{ se } \begin{cases} f(x^0+\lambda(x-x^0))-\lambda(f(x)-f(x^0))\in f(x^0)+C \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{cases};$$

$$f \text{ è } C^0\text{-concava } (C^0.cv) \text{ in } x^0 \text{ se } \begin{cases} f(x^0+\lambda(x-x^0))-\lambda(f(x)-f(x^0))\in f(x^0)+C^0 \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S\ x\neq x^0 \end{cases};$$

$$f \text{ è } C^{00}\text{-concava } (C^{00}.cv) \text{ in } x^0 \text{ se } \begin{cases} f(x^0+\lambda(x-x^0))-\lambda(f(x)-f(x^0))\in f(x^0)+C^{00} \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S\ x\neq x^0 \end{cases};$$

---

[1]Una funzione reale $f:S\to\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0 sarà detta concava (cv) in x^0 se è verificata la condizione $f(x^0+\lambda(x-x^0))-\lambda(f(x)-f(x^0))\geq f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$.

[2]Una funzione reale $f:S\to\Re$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0 sarà detta strettamente concava (s.cv) in x^0 se è verificata la condizione $f(x^0+\lambda(x-x^0))-\lambda(f(x)-f(x^0))>f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$, $x\neq x^0$.

Le relazioni intercorrenti tra queste classi di funzioni sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma[3]:

$$\boxed{\boxed{C.cv}} \supset \boxed{\boxed{C^0.cv} \supset \boxed{C^{00}.cv}}$$

Si osservi che nel caso scalare ($m=1$ e $C=\Re^+=\{x\in\Re: x\geq 0\}$) le classi di funzioni C^0-concave e C^{00}-concave collassano nella classe delle funzioni strettamente concave, mentre la classe delle funzioni C-concave corrisponde a quella delle funzioni concave.

Segue quindi che la classe delle funzioni C-concave è distinta da quella delle funzioni C^0-concave (basta considerare una funzione scalare lineare) che, a sua volta, risulta distinta anche da quella delle funzioni C^{00}-concave, come mostra il seguente esempio 2.1:

Esempio 2.1

Consideriamo la funzione $f:\Re^+\rightarrow\Re^2$, con $\Re^+$ insieme stellato aperto di vertice l'origine, definita come $f(x)=(x,-x^2)$ ed il cono[4] $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geqq 0\}$.

Questa funzione è C^0-concava nell'origine ma non C^{00}-concava dal momento che preso un qualsiasi reale $x>0$ abbiamo per ogni $\lambda\in(0,1)$ che $f(\lambda x)-\lambda(f(x))= =(0,\lambda x^2(1-\lambda))$ appartiene a C^0 ma non a C^{00}.

---

[3]Il simbolo $\boxed{B} \supset \boxed{A}$ indica che la classe A è contenuta nella classe B.

[4]D'ora in avanti utilizzeremo per i vettori $x\in\Re^m$ le seguenti notazioni:

$x\geqq 0$: vettore non-negativo, eventualmente anche nullo ($x_i\geq 0\ \forall i=1,\dots,m$);

$x\geq 0$: vettore semipositivo, cioè non-negativo e non-nullo ($x_i\geq 0\ \forall i=1,\dots,m$ con almeno una componente positiva);

$x>0$: vettore positivo ($x_i>0\ \forall i=1,\dots,m$).

Denoteremo inoltre con $\Re^m_+$ l'insieme dei vettori non-negativi di $\Re^m$, con $\Re^m_+\backslash\{0\}$ l'insieme dei vettori semipositivi di $\Re^m$ e con $\Re^m_{++}$ l'insieme dei vettori positivi di $\Re^m$.

La seguente proprietà permette di determinare, nel caso paretiano, vari esempi di funzioni vettoriali appartenenti a queste classi:

Proprietà 2.1

Consideriamo una funzione vettoriale $f:S \rightarrow \Re^m$, con $S \subseteq \Re^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0, tale che $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$ con $f_1,\dots,f_m$ funzioni concave ed il cono paretiano $C=\Re^m_+=\{y \in \Re^m: y \geqq 0\}$. Risulta che:

i) la funzione f è C-concava;

ii) se almeno una funzione f_i, $i \in \{1,\dots m\}$, è strettamente concava allora la funzione f è C^0-concava;

iii) se tutte le funzioni $f_1,\dots,f_m$ sono strettamente concave allora la funzione f è C^{00}-concava.

Dim Segue in modo ovvio dalle definizioni e dalla particolare struttura di C. ♦

§3. *Funzioni quasi-concave vettoriali*

Prima di fornire una possibile estensione al caso vettoriale delle definizioni di funzioni quasi-concave[5] considereremo la seguente particolare classe di funzioni scalari quasi-concave:

Definizione 3.1

Consideriamo una funzione reale $f:S\rightarrow\mathfrak{R}$, con $S\subseteq\mathfrak{R}^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0 . La funzione f sarà detta quasi-concava generalizzata (g.qcv) in x^0 se è verificata la condizione $f(x)>f(x^0) \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\geq f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$.

Tale classe non riveste particolare importanza nel caso non puntuale in quanto la sola continuità della funzione ne implica il collassamento con la classe delle funzioni quasi-concave. Ciò non accade invece nel caso puntuale, come mostrano i seguenti esempi 3.1 e 3.2 nei quali consideriamo due funzioni, di cui una continua, che risultano quasi-concave generalizzate ma non quasi-concave.

Esempio 3.1

Sia $f:\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$ una funzione non continua in $\mathfrak{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{per } -1\leq x\leq 1 \\ -2-x & \text{per } -2\leq x\leq -1 \\ -2+x & \text{per } 1\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{per } x<-2 \text{ ed } x>2 \end{cases} ;$$

essa è quasi-concava generalizzata in $x^0=0$ ma non è quasi-concava in $x^0=0$ poiché per per $x<-2$ oppure $x>2$ $f(x)=f(0)$ non implica che $f(\lambda x)\geq f(0)$.

---

[5]Consideriamo una funzione reale $f:S\rightarrow\mathfrak{R}$, con $S\subseteq\mathfrak{R}^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0. Diremo che:

f è quasi-concava (qcv) in x^0 se $f(x)\geq f(x^0) \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\geq f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$;

f è strettamente quasi-concava (s.qcv) in x^0 se $f(x)\geq f(x^0) \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))>f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$, $x\neq x^0$;

f è semistrettamente quasi-concava (ss.qcv) in x^0 se $f(x)>f(x^0) \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))>f(x^0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ $\forall x\in S$.

Esempio 3.2

Sia $f:\Re \to \Re$ una funzione continua in $\Re$ definita nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} -|x| & \text{per } -1\leq x\leq 1 \\ -2-x & \text{per } -2\leq x\leq -1 \\ -2+x & \text{per } 1\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{per } x<-2 \text{ ed } x>2 \end{cases} \quad ;$$

che non è quasi-concava in $x^0=0$ ma è quasi-concava generalizzata in $x^0=0$ dal momento che la condizione $f(x)>f(0)$ non è mai verificata.

Vediamo adesso come, seguendo l'approccio menzionato nel paragrafo 2, sia possibile estendere al caso vettoriale le definizioni di funzione quasi-concava, semistrettamente quasi-concava, strettamente quasi-concava e quasi-concava generalizzata.

Le definizioni di seguito riportate permetteranno di individuare nove classi di funzioni vettoriali concavo-generalizzate, ognuna delle quali, come mostrato nei successivi esempi, risulta distinta dalle altre.

Consideriamo una funzione vettoriale $f:S\to\Re^m$, con $S\subseteq\Re^n$ insieme stellato aperto di vertice x^0. Diremo che:

f è (C,C) quasi-concava in x^0 ((C,C).qcv) se $\begin{cases} f(x)\in f(x^0)+C \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{cases}$;

f è (C^0,C) quasi-concava in x^0 ((C^0,C).qcv) se $\begin{cases} f(x)\in f(x^0)+C^0 \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{cases}$;

f è (C^{00},C) quasi-concava in x^0 ((C^{00},C).qcv) se $\begin{cases} f(x)\in f(x^0)+C^{00} \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{cases}$;

f è (C,C^0) quasi-concava in x^0 ((C,C^0).qcv) se $\begin{cases} f(x)\in f(x^0)+C \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^0 \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S\ x\neq x^0 \end{cases}$;

f è (C^0,C^0) quasi-concava in x^0 ((C^0,C^0).qcv) se $\begin{cases} f(x)\in f(x^0)+C^0 \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^0 \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{cases}$;

$$f \text{ è } (C^{00},C^{0}) \text{ quasi-concava in } x^0 \; ((C^{00},C^{0}).\text{qcv}) \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{r} f(x)\in f(x^0)+C^{00} \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^0 \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{array} \right. ;$$

$$f \text{ è } (C,C^{00}) \text{ quasi-concava in } x^0 \; ((C,C^{00}).\text{qcv}) \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{r} f(x)\in f(x^0)+C \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^{00} \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S\ x\neq x^0 \end{array} \right. ;$$

$$f \text{ è } (C^{0},C^{00}) \text{ quasi-concava in } x^0 \; ((C^{0},C^{00}).\text{qcv}) \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{r} f(x)\in f(x^0)+C^{0} \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^{00} \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{array} \right. ;$$

$$f \text{ è } (C^{00},C^{00}) \text{ quasi-concava in } x^0 \; ((C^{00},C^{00}).\text{qcv}) \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{r} f(x)\in f(x^0)+C^{00} \Rightarrow f(x^0+\lambda(x-x^0))\in f(x^0)+C^{00} \\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x\in S \end{array} \right. .$$

Le relazioni intercorrenti tra queste classi di funzioni, che seguono direttamente dalle definizioni date, sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{(C^{00},C).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C^{00},C^{0}).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C^{00},C^{00}).\text{qcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(C^{0},C).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C^{0},C^{0}).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C^{0},C^{00}).\text{qcv}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{(C,C).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C,C^{0}).\text{qcv}} & \supset & \boxed{(C,C^{00}).\text{qcv}}
\end{array}$$

Osserviamo che nel caso scalare le classi (C^{00},C^0).qcv, (C^{00},C^{00}).qcv, (C^0,C^0).qcv e (C^0,C^{00}).qcv collassano nella classe delle funzioni semistrettamente quasi-concave, le classi (C,C^0).qcv e (C,C^{00}).qcv collassano in quella delle funzioni strettamente quasi-concave mentre le classi (C^{00},C).qcv e (C^0,C).qcv collassano in quella delle funzioni quasi-concave generalizzate.

Gli esempi successivi mostreranno che le inclusioni tra le varie classi di funzioni quasi-concave sono proprie. Più precisamente:

- l'esempio 3.3 mostra che si ha inclusione propria tra le classi di funzioni: (C^{00},C) quasi-concava e (C^0,C) quasi-concava; (C^{00},C^0) quasi-concava e (C^0,C^0) quasi-concava; (C^{00},C^{00}) quasi-concava e (C^0,C^{00}) quasi-concava;

- l'esempio 3.4 mostra che si ha inclusione propria tra le classi di funzioni: (C^0,C) quasi-concava e (C,C) quasi-concava; (C^0,C^0) quasi-concava e (C,C^0) quasi-concava; (C^0,C^{00}) quasi-concava e (C,C^{00}) quasi-concava;
- l'esempio 3.5 mostra che si ha inclusione propria tra le classi di funzioni: (C^{00},C) quasi-concava e (C^{00},C^0) quasi-concava; (C^0,C) quasi-concava e (C^0,C^0) quasi-concava; (C,C) quasi-concava e (C,C^0) quasi-concava;
- l'esempio 3.6 mostra che si ha inclusione propria tra le classi di funzioni: (C^{00},C^{00}) quasi-concava e (C^0,C^{00}) quasi-concava; (C^0,C^0) quasi-concava e (C^0,C^{00}) quasi-concava; (C,C^0) quasi-concava e (C,C^{00}) quasi-concava;
- l'esempio 3.7 mostra che si ha inclusione propria tra le classi di funzioni: (C^{00},C^0) quasi-concava e (C^{00},C^{00}) quasi-concava; (C^{00},C^0) quasi-concava e (C^0,C^0) quasi-concava; (C^0,C) quasi-concava e (C^0,C^0) quasi-concava; (C,C) quasi-concava e (C,C^0) quasi-concava.

Esempio 3.3

Sia $f:\Re\to\Re^2$ una funzione definita come $f(x)=(-x(x-1)^2,x)$ e sia inoltre $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geq 0\}$. Nel punto $x^0=0$ la funzione f è (C^{00},C^{00}) quasi-concava, dal momento che non esiste alcun reale x tale che $f(x)\in C^{00}$ ovvero tale che $f(x)>0$ (poiché per $x>0$ risulta $-x(x-1)^2\leq 0$), ma non è (C^0,C) quasi-concava in $x^0=0$, dal momento che per $x=1$ si ha $f(1)=(0,1)\in C^0$ ma per ogni $\lambda\in(0,1)$ risulta $f(\lambda)=(-\lambda(\lambda-1)^2,\lambda)\notin C$. Ne consegue che la funzione f in $x^0=0$ è sia (C^{00},C^0) quasi-concava che (C^{00},C) quasi-concava ma non è né (C^0,C^0) quasi-concava né (C^0,C^{00}) quasi-concava.

Esempio 3.4

Sia $f:\Re\to\Re^2$ una funzione tale che $f(x)=(g(x),-g(x))$, dove $g:\Re\to\Re$ è definita come

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=0 \\ x\,\text{sen}\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0 \end{cases}$$

, e sia inoltre $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geq 0\}$.

Essa è (C^0,C^{00}) quasi-concava in $x^0=0$, dal momento che non esiste alcun reale x tale che $f(x)\in C^0$ (ovvero tale che $f(x)\geq 0$), ma non è (C,C) quasi-concava in $x^0=0$, dal momento che per ogni reale $x\neq 0$ tale che $f(x)\in C$ (ovvero tale che $f(x)=0$) non è verificata la relazione $f(\lambda x)\in C\ \ \forall\lambda\in(0,1)$.

Ne consegue che la funzione f in $x^0=0$ è sia (C^0,C^0) quasi-concava che (C^0,C) quasi-concava ma non è né (C,C^0) quasi-concava né (C,C^{00}) quasi-concava.

Esempio 3.5

Sia $f:\Re\to\Re^2$ una funzione tale che $f(x)=(g(x),g(x))$, dove $g:\Re\to\Re$ è definita come $g(x)=\frac{1}{2}(|x-\delta|+x-\delta)=\begin{cases} x-\delta & \text{per } x>\delta \\ 0 & \text{per } x\leq\delta \end{cases}$ con $\delta>0$, e sia $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geqq 0\}$.

Essa è (C,C) quasi-concava in $x^0=0$, dal momento che per ogni reale x risulta $f(x)\in C$, ma non è (C^{00},C^0) quasi-concava in $x^0=0$, poiché per ogni reale $x>\delta$ risulta $f(x)>0$ (ovvero $f(x)\in C^{00}$) ma per $\lambda\leq\frac{\delta}{x}<1$ si ha $f(\lambda x)=(0,0)\notin C^0$.

Ne consegue che la funzione f in $x^0=0$ è sia (C^0,C) quasi-concava che (C^{00},C) quasi-concava ma non è né (C^0,C^0) quasi-concava né (C,C^0) quasi-concava.

Esempio 3.6

Sia $f:\Re^2\to\Re^2$ definita come $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$ e sia $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geqq 0\}$.

Nel punto $x^0=(0,0)$ la funzione f è sia (C^{00},C^{00}) quasi-concava, dal momento che per ogni (x_1,x_2) tale che $f(x_1,x_2)>0$ si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)>0$, che (C,C^0) quasi-concava (e quindi (C^0,C^0) quasi-concava), dal momento che per ogni $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ tale che $f(x_1,x_2)\geqq 0$ si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)\geq 0$, ma non è (C^0,C^{00}) quasi-concava (e quindi non è (C,C^{00}) quasi-concava), poiché risulta $f(0,1)=(0,1)\in C^0$ ma $f(0,\lambda)=(0,\lambda)\notin C^{00}$.

Esempio 3.7

Sia $f:\Re^2\to\Re^2$ una funzione definita come $f(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}(|x_1-\delta|+x_1-\delta),x_2)$, con $\delta>0$, e sia $C=\Re^2_+=\{y\in\Re^2: y\geqq 0\}$. Nel punto $x^0=(0,0)$ la funzione f è sia (C^{00},C^0) quasi-concava, dal momento che per ogni (x_1,x_2) tale che $f(x_1,x_2)>0$ si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)\geq 0$, che (C,C) quasi-concava (e quindi (C^0,C) quasi-concava), dal momento che per ogni (x_1,x_2) tale che $f(x_1,x_2)\geqq 0$ (ovvero tale che $x_2\geq 0$) si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)\geq 0$, ma non è né (C^{00},C^{00}) quasi-concava, poiché per ogni $x_2>0$ e $x_1>\delta$ risulta $f(x_1,x_2)>0$ (ovvero $f(x_1,x_2)\in C^{00}$) ma per $\lambda\leq\frac{\delta}{x_1}<1$ si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)=(0,\lambda x_2)\notin C^{00}$, né (C^0,C^0) quasi-concava, poiché per ogni $x_2=0$ e $x_1>\delta$ risulta $f(x_1,x_2)\in C^0$ ma per $\lambda\leq\frac{\delta}{x_1}<1$ si ha $f(\lambda x_1,\lambda x_2)=(0,0)\notin C^0$.

Bibliografia

[1] Arrow, K.J. and A.C. Enthoven : *Quasi-concave Programming*, Econometrica, vol. 29, pp. 779-800, 1961.

[2] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and I. Zang : *Generalized Concavity*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, vol. 36, Plenum Press, 1988.

[3] Beckenbach, E.F. : *Generalized convex functions*, Bullettin of American Mathematical Society, vol. 43, pp. 363-371, 1937.

[4] Bitran, G.R. and T.L. Magnanti : *The structure of admissable point with respect to cone dominance*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 29, pp. 573-614, 1979.

[5] Cambini, A. and L. Martein : *Optimality conditions in Vector and Scalar optimization: a unified approach*, Report n.50, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 1992.

[6] Cambini, R. : *Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato*, Report n.54, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, 1992.

[7] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni : *Generalized Convexity for functions and multifunctions and optimality conditions*, Technical Report n. 134, Dipartimento di Ricerca Operativa, Università di Pisa, 1986.

[8] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni : *Scalar and Vector Generalized Convexity*, in "Nonsmooth Optimization and Related Topics", edited by Clarke, F.H., Dem'yanov, V.F. and F. Giannessi, Plenum Press, New York, 1989.

[9] Castagnoli, E. and P. Mazzoleni : *Verso un unico tipo di concavità*, Rivista AMASES, anno 9, fascicolo 1, pp. 15-31, 1986.

[10] Craven, B.D. : *Vector-valued Optimization*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, 1981.

[11] Crouzeix, J.P. and J.A. Ferland : *Criteria for quasi-convexity and pseudo-convexity and their relationships*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, 1981.

[12] De Finetti, B. : *Sulle stratificazioni convesse*, Ann. Math. Pura Appl., vol. 30, pp. 173-183, 1949.

[13] Diewert, W.E. : *Alternative characterizations of six kinds of quasi-concavity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth programming*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, 1981.

[14] Diewert, W.E., Avriel, M. and I. Zang : *Nine kinds of quasiconcavity and concavity*, Journal of Economic Theory, vol. 25, pp. 397-420, 1981.

[15] Fenchel, W. : *Convex cones, sets and functions*, Mimeographed lecture notes, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1951.

[16] Ferland, J.D. : *Quasi-convexity and pseudo-convexity of functions on the nonnegative orthant*, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York, 1981.

[17] Gerencsér, L. : *On a close relation between quasi-convex and convex functions and related investigations*, Math. Operationsforth. Statist., vol. 4, pp. 201-211, 1973.

[18] Ginsberg, W. : *Concavity and Quasi-concavity in Economics*, Journal of Economic Theory, vol. 6, pp. 596-605, 1973.

[19] Greenberg, H.J. and W.P. Pierskalla : *A rewiew of quasi-convex functions*, Operation Research, vol. 19, pp. 1553-1570, 1971.

[20] Jahn, J. : *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces*, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, vol. 31, Verlag Peter Lang, 1986.

[21] Jahn, J. and E. Sachs : *Generalized Quasiconvex Mappings and Vector Optimization*, SIAM Journal Control and Optimization, vol. 24, pp. 306-322, 1986.

[22] Komlosi, S. : *Quasi-convex first order approximations and Kuhn-Tucker type optimality conditions*, Studia Oeconomica Auctoritate, University of Pecs, Hungary, 1986.

[23] Luc, D.T. : *Connectedness of the Efficient Point Sets in Quasiconcave Vector Maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 122, pp. 346-354, 1987.

[24] Luc, D.T. : *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 319, Springer-Verlag, 1988.

[25] Madden, P. : *Concavity and Optimization in Microeconomics*, Basil Blackwall, 1986.

[26] Mangasarian, O.L. : *Nonlinear Programming*, McGraw Hill, New York, 1969.

[27] Otani, K. : *A characterization of quasi-concave functions*, Journal of Economic Theory, vol. 31, pp. 194-196, 1983.

[28] Passy, U. and E.Z. Prisman : *A convex-like duality scheme for quasi-convex programs*, Mathematical Programming, vol. 32, pp. 278-300, 1985.

[29] Ponstein, J. : *Seven kinds of convexity*, SIAM Rev., vol. 9, pp. 115-119, 1967.

[30] Rockafellar, R.T. : *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton N.Y., 1970.

[31] Sawaragi, Y., Nakayama, H. and T. Tanino : *Theory of Multiobjective Optimization*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 176, Academic Press, 1985.

[32] Schaible, S. : *Bicriteria Quasi-concave Programs*, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle, vol. 25, pp. 93-101, 1983.

[33] Schaible, S. : *Quasi-concave, strictly quasi-concave and pseudo-concave functions*, Methods of Operations Research, vol. XVII, pp. 308-316, 1972.

[34] Schaible, S. and W.T. Ziemba (Eds.) : *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, 1981.

[35] Thompson, W.A. and D.W. Parke : *Some properties of generalized concave functions*, Operation Research, vol. 21, pp. 305-313, 1973.

[36] Yu, P.L. : *Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 14, pp. 319-377, 1974.