Report n.62

Dell'elasticità in economia e dell'incertezza statistica

Vincenzo BRUNO

Pisa, ottobre 1992

1 - In meccanica si definisce elastico un corpo che, deformandosi sotto l'azione di uno stimolo, ha la proprietà di riprendere la forma primitiva quando lo stimolo cessi o riprenda il valore iniziale.

L'elasticità esprime, quindi, in meccanica, solo quella proprietà dei corpi che permette una relazione biunivoca fra stimolo e forma.

Invece, in economia, essa indicherebbe la maggiore o minore variabilità di un elemento rispetto ad un altro. Già Marshall, portando la sua attenzione sulla variabilità di entità economiche legate fra loro da una relazione biunivoca, definì, a proposito della legge della domanda in funzione del prezzo, il predetto concetto, come il rapporto delle due variazioni percentuali.

Ne deriva che per elasticità s'intende il rapporto fra la variazione percentuale della grandezza cui si riferisce e la variazione, pure percentuale, della grandezza da cui la prima univocamente dipende. Elasticità di una determinata entità economica è, quindi, la frazione fra due variabilità; quella della variabile indipendente e l'altra della variabile dipendente.

Ne deriva che essa è la variabilità della variabilità e quindi si collega alla concentrazione.

Si ha come conseguenza, che l'α del Pareto può misurare, come vedremo meglio in seguito, un particolare aspetto dell'elasticità media dei redditieri rispetto al reddito. Lo stesso può dirsi per δ che può indicare un carattere dell'elasticità dell'ammontare dei redditi rispetto ai redditieri.

Pur ammettendo che elasticità e concentrazione sono misure diverse, ne deriva che esse non sono misure indipendenti.

In economia possiamo misurare tre diversi indici di elasticità:

1) della domanda rispetto al prezzo;

2) della predetta rispetto al reddito;

3) indiretta della domanda, quando essa viene misurata rispetto al prezzo di altri beni.

Se la variazione proporzionale della domanda di un bene risulta superiore alla variazione dell'altra grandezza (variabile indipendente) si ha elasticità; se la variazione proporzionale della domanda di un bene risulta inferiore a quella dell'altra grandezza, si ha anelasticità; se le due variazioni risultano uguali si ha un valore unitario della predetta.

L'elasticità della domanda di un bene, rispetto al prezzo o rispetto al reddito, indica, quindi, la preferenza o l'indifferenza che ha la medesima al variare dell'uno o dell'altro. Essa misura, anche, il grado d'indeterminatezza o di entropia che la domanda di un bene ha alle trasformazioni del primo o del secondo.

2 - Due grandezze, essendo legate da una relazione che determina l'una in funzione dell'altra, saranno rappresentate da una curva discendente, iperbolica, tale che a ogni punto C essa corrisponderà una ad una sola coppia di valori x e y[1].

L'elasticità in C di y rispetto ad x, ($e_{y,x}$), sarà:

$$e_{y,x} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{x}{dx} = y' \cdot \frac{x}{y} \quad ; \tag{1}$$

Essendo y' la tangente dell'angolo α che la tangente geometrica alla curva forma con l'asse delle x si avrà:

$$y' = \frac{y}{\text{tang}\,\alpha} \quad ; \tag{2}$$

da cui, sostituendo nella (1), si avrà:

$$e_{y,x} = \frac{x}{\text{tang}\,\alpha} \quad ; \tag{3}$$

analogamente si avrà:

---

[1]Cfr. ad esempio: L.ROSSI (1932)

$$e_{x,y} = \frac{y}{\text{tang}\,(90° - \alpha)}\,; \qquad (4)$$

ed essendo:

$$\frac{y}{\text{tang}\,(90° - \alpha)} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{x}\,; \qquad (5)$$

sarà:

$$e_{y,x} = \frac{1}{e_{x,y}}\,; \qquad (6)$$

Il concetto di elasticità trova applicazione nelle relazioni di dipendenza, numerose nelle discipline economico-sociali che sono espresse da una convergenza asimmetrica di una funzione verso lo zero o verso l'infinito.

E' necessario introdurre analiticamente tale concetto ogni volta che sia utile rappresentare la funzione in scala logaritmica anzichè in scala ordinaria.

In quest'ultimo caso l'elasticità della funzione è rappresentata dall'inclinazione della curva tracciata in scala logaritmica. Il grafico logaritmico di una funzione iperbolica viene dato da una retta. La tang α di questa retta ne esprime l'elasticità complessiva media. Si deve ammettere però che essa, come nel caso della domanda di un bene rispetto al prezzo, è diversa da punto a punto della curva.

Nel caso dell'elasticità rispetto al prezzo, si ha, infatti:

$$e_{y,x} = -\left(\frac{dy}{y}\right) : \left(\frac{dp}{p}\right) = -\left(\frac{d\log y}{d\log p}\right); \qquad (7)$$

Nella (7), p rappresenta il prezzo del prodotto e y la quantità domandata.

Poichè la curva della domanda ha, generalmente, andamento decrescente, la derivata ha sempre valore negativo.

Nella curva di domanda di un bene rispetto al prezzo, poichè la v.c.y è legata alla v.c.x da una relazione logaritmica, diremo che la v.c.x. ha una distribuzione lognormale.

Nel caso di una curva che assume la forma di un'iperbole equilatera, l'elasticità acquista valore identico per qualsiasi prezzo (y = a/p).

L'elasticità rispetto al reddito viene data dalla seguente formula:

$$e_{y,r} = -\left(\frac{dy}{y}\right) : \left(\frac{dr}{r}\right) = -\left(\frac{d \log y}{d \log r}\right); \tag{8}$$

Il coefficiente di elasticità rispetto al reddito assume valori positivi (poichè la quantità domandata ed il reddito variano nella medesima direzione) e diversi nei vari punti della funzione[2]. Può essere ≤ o ≥ 1.

L'elasticità risulta costante solo se la funzione della domanda ha la forma, y = ar.

3 - Si consideri il modello di elasticità composta di tipo moltiplicativo, dato dalla seguente espressione:

$$_mX_i = a_i \, _mX_T \, . \, \mathrm{esp}\,(E_i); \tag{9}$$

Nella (9) si possono intendere, prendendo in considerazione i valori medi di classe, per $_mX_i$, i consumi del bene i-esimo, oppure i redditi i-esimi della famiglie, o i redditi dei lavoratori dipendenti, o i conflitti di lavoro secondo le ore perdute ecc.; per $_mX_T$ s'indicano i valori dei fenomeni considerati in totale; per E_i si hanno le elasticità medie del fenomeno i-esimo rispetto al totale del fenomeno; a_i è una costante.

Il modello di Pareto di prima approssimazione, riferendoci ai valori limiti di classe, ha la seguente espressione, per un generico fenomeno:

---

[2]Cfr. ad esempio: A.GRAZIANI, (1978); L.LENTI, (1972).

$$N_i = K_e\, X_i \,.\, \mathrm{esp}\,(\alpha_i)\,; \tag{10}$$

Per il totale del fenomeno si avrà la formula che segue:

$$N_T = K_{T\,e}\, X_T \,.\, \mathrm{esp}\,(\alpha_T)\,; \tag{11}$$

N_i si pone uguale a N_T si, proporzionandone i totali.

Linearizzando le funzioni mercè i logaritmi ed operando sulle relative medie, con il metodo dei minimi quadrati, si perviene, dopo conosciute risoluzioni, a:

$$E_i = \alpha_T / \alpha_i \;; \tag{12}$$

Ne deriva che l'elasticità di un fenomeno i-esimo rispetto al fenomeno in totale, risulta uguale al rapporto fra l'indice α_T della distribuzione del fenomeno totale e l'α_i del fenomeno singolo[3].

Note le relazioni fra α, δ, R e σ, si ha:

$$E_i = \frac{(\delta_i - 1)/\delta_i}{(\delta_T - 1)/\delta_T} \;; \tag{13}$$

$$E_i = \frac{R_i/(R_i + 1)}{R_T/(R_T + 1)} \;; \tag{14}$$

$$E_i = \frac{\sigma_i/(\alpha_i - 2)}{\sigma_T/(\alpha_T - 2)} \;; \tag{15}$$

[3]Cfr. ad esempio: G.MANERA (1986).

Come si è visto, il concetto di elasticità si collega a quello di variabilità di un fenomeno rispetto alla variabilità di un altro fenomeno e cioè al concetto di concentrazione.

Ad un basso valore dell'elasticità corrisponde una scarsa concentrazione, mentre un alto dato dell'elasticità equivale ad elevata concentrazione.

4 - Com'è noto l'entropia corrisponde alla variabilità del sistema considerato. Essa si riferisce, quindi, alla distribuzione di una determinata quantità, in un insieme di "alternative" non ordinate[4].

Si è visto che l'indice α è la frazione fra l'entropia dei redditi (cioè delle singole unità del fenomeno) e l'entropia del reddito (cioè delle singole intensità del fenomeno considerato), moltiplicato per il rapporto fra la frazione del reddito (intensità del fenomeno) e quella dei redditieri (singole unità del fenomeno).

Le formule di α che ne derivano sono le seguenti:

$$\alpha_i = \frac{H_{ni}}{H_{mi}} \cdot Q_i \quad \text{ed} \quad \alpha_T = \frac{H_{nT}}{H_{mT}} \cdot Q_T \; ; \tag{16}$$

Applicando la (16) nella (12) si ha:

$$E_i = \frac{H_{mT}\ H_{ni}\ Q_i}{H_{mi}\ H_{nT}\ Q_T} \; ; \tag{17}$$

L'elasticità è, dunque, il rapporto fra le entropie delle classi del fenomeno, per il rapporto delle entropie delle unità del fenomeno, il tutto moltiplicato per la frazione dei Q. E' direttamente proporzionale, quindi, al rapporto fra le entropie delle unità del fenomeno (redditieri nel caso della distribuzione dei redditi).

---

[4]Cfr. ad esempiop: J.ASTALA-I.VIRTANEN (1982); F.BRAMBILLA (1959); V.RBUNO (1970), (1972), (1975), (1979), (1986); V.CAPECCHI (1964); S.KULLBACK (1968); N.LAURO (1973); G.LETI (1965); L.MUTTARINI (1970); C.E.SHANNON-W.WEAVER (1964); H.THEIL (1973).

Le formule di δ che si evincono sono:

$$\delta_i = \frac{H_{ni}}{H_{ci}} \cdot Z_i \quad e \quad \delta_T = \frac{H_{nT}}{H_{cT}} \cdot Z_T \ ; \tag{18}$$

Infatti l'indice δ è il rapporto fra l'entropia del numero dei redditieri (singole unità del fenomeno) e l'entropia dell'ammontare del reddito (ammontare del fenomeno), corretto dalla frazione fra il reddito pro capite (fenomeno medio per abitante) ed il reddito pro capite generale (fenomeno totale medio per abitante).

Applicando la (18) nella (13) si ottiene:

$$E_i = \frac{H_{nT}\, Z_T\, (H_{ni}\, Z_i - H_{ci})}{H_{ni}\ \ Z_i\ \ (H_{nT}\, Z_T - H_{cT})} \ ; \tag{19}$$

Sostituendo nella (15) i valori entropici di α, dati dalla (16), avremo:

$$E_i = \frac{H_{mT}\, \sigma_i\, (H_{ni}\, Q_i - 2)}{H_{mi}\ \ \sigma_T\ \ (H_{nT}\, Q_T - 2)} \ ; \tag{20}$$

Il fenomeno in cui si possono applicare i predetti concetti di α, potrebbero essere la distribuzione dei prodotti consumati, per numero di consumatori, di una provincia rispetto alla regione od alla nazione.

Il fenomeno in cui si possono adottare le predette nozioni di δ, potrebbero riguardare la distribuzione dei consumi (prodotti consumati) per numero di consumatori e per ammontare di consumi effettuati, della provincia rispetto alla regione od alla nazione.

5 - Si considerimo delle distribuzioni teoriche con classi di reddito (o di consumi) proporzionali a 10 mila unità e con un numero dei redditieri (o dei consumatori)

proporzionali a 1 milione di unità[5]. Da esse di sono ricavate, a suo tempo, le entropie delle unità del fenomeno per i cinque valori teorici di α pari ad 1; 1,5; 2; 3; 4 [6].

Si rapportino le entropie medie dei redditieri (o del numero dei consumatori ecc.) per i cinque valori di α_T dei modelli teorici, all'entropia media di $\alpha_i = 1$, in una prima serie; a quella di $\alpha_i = 1,5$, in una seconda serie; a quella di $\alpha_i = 2$ in una terza serie e così via, ottenendo dei dati sull'elasticità media composta. Quest'ultima, come si è visto proporzionale alle entropie del numero dei redditieri, viene data dai seguenti puri numeri:

Per α_i = 1,0 si avranno i seguenti dati:

1,000; 1,055; 1,093; 1,109; 1,122.

Per α_i = 1,5 :

0,947; 1,000; 1,036; 1,052; 1,062.

Per α_i = 2,0:

0,914; 0,964; 1,000; 1,015; 1,024.

Per a_i = 3,0 :

0,901; 0,951; 0,985; 1,000; 1,009.

Per a_i = 4,0 :

0,893; 0,941; 0,976; 0,991; 1,000.

Al crescere di α_i (cioè l'α del fenomeno elementare) l'elasticità media composta tende ad avere un minore grado d'indeterminatezza. Infatti al crescere di α diminuisce l'entropia.

6 - Avviandoci alla conclusione diremo che il concetto di elasticità in economia risulta collegato a quello di concentrazione.

Un piccolo valore dell'elasticità assume il senso di una scarsa concentrazione mentre un alto dato della elasticità equivale a quello di un'alta concentrazione.

[5]Cfr. ad esempio: M. De Vergottini (1943)

[6]Cfr. ad esempio: V.BRUNO (1975) pp. 679

L'elasticità media misura la diversità del comportamento del fenomeno dipendente rispetto a quello indipendente. Essa può ricondursi in certi casi a curve lognormali facilmente sintetizzabili con parametri simili ai noti indici di concentrazione (quali α e δ).

Essa misura il grado di ripartizione di una quantità fra le varie unità statistiche e, quindi, l'indeterminatezza insita nelle scelte che ne conseguono.

L'elasticità palesa, infatti, la preferenza per un determinato "status" del fenomeno analizzato. Nella sua espressione elementare mostra l'attrazione che una quantità domandata ha verso il prezzo di un determinato bene e, quindi, il grado d'incertezza che ne deriva.

Nella sua concezione più composita essa esprime l'indeterminatezza che i fenomeni multipli hanno rispetto ai fenomeni più elementari. Così, ad esempio, l'elasticità chiarisce l'incertezza statistica che la necessità del consumo di un bene i-esimo viene ad avere rispetto a quella dei consumi in totale.

L'analisi delle entropie, introdotta in alcuni concetti economici, ne può caratterizzare meglio i contenuti dando loro una diversa vigoria.

Riferimenti bibliografici

ASTALA J.- VIRTANEN I. (1982), *Entropy correlation coefficient: a measure of statistical dependence for categorized data*, University of Vaasa (paper presented at the "15th European Meeting of Statisticians" in Palermo, September 13-17, 1982)

BRAMBILLA F. (1959), La variabilità, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, n. 9-10 settembre-ottobre, pp. 491-512

BRUNO V. (1970), *Entropia e variabilità*, Università di Pisa, Istituto di Statistica, "Studi di Statistica metodologica" Quaderno n. 6

BRUNO V. (1972), *Particolari aspetti dell'incertezza statistica*, Università di Pisa, Istituto di Statistica, "Studi di Statistica metodologica", Quaderno n. 8

BRUNO V. (1975), La variabilità e l'incertezza statistica con particolare riferimento alle distribuzioni paretiane dei redditi, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, n. 9-10, settembre-ottobre, pp. 669-710

BRUNO V. (1979), *L'incertezza statistica ed alcuni suoi aspetti*, in Società Italiana di Statistica, Atti della XXIX Riunione scientifica, Bologna, 20-22 marzo 1978, vol. II, t. I, Bologna, Clueb

BRUNO V. (1986), *Entropia e distribuzioni paretiane dei redditi*, Scritti in onore di Francesco Brambilla, vol.I - Università Commerciale "L.Bocconi", Istituto di Metodi Quantitativi

CAPECCHI V. (1964), Une méthode de classification fondée sur l'entropie, *Revue française de sociologie*, n. 3, pp. 290-306

DE VERGOTTINI M. (1943), *Statistica economica. La distribuzione dei redditi e dei patrimoni*, Catania, Cisafulli

GRAZIANI A. (1978), *Teoria economica. Prezzi e distribuzione*. Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, seconda edizione ampliata

KULLBOCK S. (1968), *Information theory and statistics,* New York, Dover Publs

LAURO N. (1973), *Aspetti statistici della teoria della informazione alla luce di una applicazione.* Università di Napoli, Istituto di Statistica e Demografia, "Studi di Statistica", Quaderno, n. 8, Napoli, Guida

LETI G. (1965), Sull'entropia, su un indice del Gini e su altre misure dell'eterogeneità di un collettivo, *Metron*, vol. XXIV, n. 1-4, pp. 332-378

LENTI L. (1972), *Statistica economica. Trattato italiano di economia*, vol. X, UTET, Torino

MANERA G. (1986), *Legge di Engel e legge di Pareto.* Studi in onore di Slvio Vianelli, Vol. II, Istituto di Statistica, Facoltà di Economia e Commercio, Università degli Studi di Palermo.

MUTTARINI L. (1970), Modelli di esposizione del pubblico ai mezzi di comunicazione. *Rivista di Statistica Applicata,* vol. 3, n. 4, dicembre, pp. 129-157

ROSSI L. (1932), Del concetto di elasticità in economia. *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, Gennaio 1932, Città di Castello

SHANNON C.E.- WEAVER W. (1964), The mathematical theory of communication, *Urbana,* University of Illinois Press

THEIL H. (1973), *Economics and Information Theory.* Amsterdam, North Holland