Report n.63

Alcune classi di funzioni concave generalizzate nell'ottimizzazione vettoriale

Laura MARTEIN

Pisa, ottobre 1992

Alcune classi di funzioni concave generalizzate nell'ottimizzazione vettoriale

L. Martein(*)

1. Introduzione

A partire dal pionieristico lavoro di Arrow-Enthoven [1], la concavità generalizzata ha assunto oggi un ruolo di primo piano nella programmazione matematica sia per le sue rilevanti applicazioni economico-finanziarie , sia per il fatto che essa racchiude al suo interno varie sottoclassi di funzioni ciascuna delle quali ha un ruolo specifico nella ottimizzazione [2-8].

Di fronte ai numerosi contributi apparsi in letteratura riguardanti la concavità generalizzata di funzioni scalari, non si é ancora raggiunto però un analogo livello di sviluppo per le funzioni a valori vettoriali. La ragione di ciò sta nel fatto, come già osservato in [9], che la generalizzazione della concavità generalizzata a funzioni vettoriali non é del tutto ovvia e scontata sia per quanto riguarda le possibili introduzioni di sottoclassi di funzioni concavo-generalizzate, sia per quanto riguarda il loro rispettivo ruolo specifico nella ottimizzazione vettoriale.

In questo lavoro, dopo aver introdotto alcune sottoclassi di funzioni concavo-generalizzate a valori vettoriali in parte già apparse in letteratura [10-12], verranno studiate dapprima le relazioni intercedenti tra le varie

---

(*) Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia
Universita' di Pisa, Via Ridolfi 10, 56100 - Pisa
This research is partially supported by the Ministry of Public Education.

classi e successivamente sarà evidenziato il ruolo di ciascuna classe nella determinazione sia di condizioni sufficienti di ottimalità, sia di condizioni atte ad assicurare il mantenimento di proprietà locali a tutto il dominio di definizione.

2. Funzioni concavo-generalizzate

Al fine di fornire risultati in una forma più generale possibile, daremo le definizioni di funzioni concavo- generalizzate rispetto ad un punto, ad un cono e ad un insieme localmente stellato; tali definizioni generalizzano quelle introdotte da Mangasarian [2] nel caso scalare.
Sia Z un aperto di $\mathbf{R}^n$, $F: Z \rightarrow \mathbf{R}^s$ una funzione e U un cono di $\mathbf{R}^s$.
Un insieme $S \subset Z$ é detto <u>localmente stellato in x_0</u> se esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap S$ si ha:

$$[x , x_0] = \{tx+(1-t)x_0 : t \in [0,1]\} \subset S.$$

Prima di introdurre alcune sottoclassi di funzioni concavo-generalizzate ricordiamo dapprima la seguente:

Def. 2.1
La funzione F é detta <u>U-concava</u> in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U \quad \forall\lambda \in (0, 1), \ \forall x \in S$$

Introduciamo ora alcune funzioni concavo-generalizzate ricordando che F e' direzionalmente differenziabile nel punto x_0 rispetto alla direzione v se esiste finito il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t} \triangleq \frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$$

Def. 2.2
La funzione F é detta <u>U-semistrettamente quasiconcava</u> (U-s.s.q.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S , F(x) \in F(x_0) +U^0 \Rightarrow F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0) +U^0 \quad \forall\lambda \in (0, 1)$$

Def. 2.3
La funzione F é detta U-quasiconcava (U-q.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U \ \Rightarrow\ F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0) + U \qquad \forall \lambda \in (0,\ 1)$$

Def 2.4
Sia F direzionalmente differenziabile in x_0 ;
F é detta U-debolmente pseudoconcava (U-w.p.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U^0 \ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in U^0,\ d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$$

Def. 2.5
Sia F direzionalmente differenziabile in x_0 e sia intU $\neq \emptyset$;
F é detta U-pseudoconcava (U-p.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U^0 \ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in \mathrm{int}U,\ d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$$

Osservazione 2.1
Se s=1 ed U=$\mathbf{R}_+$, le definizioni precedenti coincidono con le classiche definizioni di funzioni concave, semistrettamente quasiconcave, quasiconcave e pseudoconcave nel punto $x_0 \in S$ [2].
A differenza di quanto accade nel caso scalare una funzione semicontinua superiormente e U-s.s.q.cv. non e' U-q.cv.; si consideri al riguardo la funzione $F(x)=(x \text{ sen}\frac{1}{x}\ ,\ -\ x \text{ sen}\frac{1}{x})$ per $x\neq 0$ ed $F(x)=0$ per $x=0$, sull'insieme stellato S=$\mathbf{R}_+$, F e' nel punto $x_0=0$ continua e $\mathbf{R}_+^2$-s.s.q.cv. ma non $\mathbf{R}_+^2$-q.cv.

Osservazione 2.2
Le definizioni date implicano che una funzione lineare F é U-concava e U-w.p.cv. rispetto ad ogni cono U ,ma non é U-p.cv.

Osservazione 2.3
Per meglio sottolineare la generalità delle definizioni date, si osservi che le classi delle funzioni concavo-generalizzate definite rispetto al cono

paretiano $U=\mathbf{R}^{s}_{+}$, sono assai più ampie di quelle che si ottengono richiedendo che ogni componente di F sia una funzione concavo-generalizzata dello stesso tipo (a differenza di quanto accade per le funzioni U-concave). A tale riguardo basta notare che se una componente della F ha in x_0 un punto di massimo locale stretto, allora F verifica le definizioni 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, senza nessuna ulteriore specifica sulle altre componenti.

Un esempio meno ovvio é fornito dal seguente:

Esempio 7.1.1

Si consideri la funzione $F(x_1,x_2)=(x_1- x_2 , x_1^2- x_2 , -x_1^2- x_2)$, il punto $x_0=(0,0)$, l'insieme stellato $S=\{(x_1,x_2): x_1 \geq 0\}$ ed il cono $U=\mathbf{R}^3_+$.

Si verifica facilmente che la funzione $f_2(x_1,x_2)= x_1^2- x_2$ non é s.s.q.cv. né q.cv. né p.cv. nel punto x_0 mentre la funzione F risulta essere sia $\mathbf{R}^3_+$-s.s.q.cv., sia $\mathbf{R}^3_+$-q.cv., sia $\mathbf{R}^3_+$-p.cv. che $\mathbf{R}^3_+$-w.p.cv. nel punto x_0.

Valgono per le funzioni concavo-generalizzate precedentemente definite le relazioni espresse nel seguente Teorema:

Teorema 2.1

Sia S un insieme localmente stellato in x_0 e sia U un cono convesso.

i) Se F é U-concava in x_0 allora F é U-q.cv. in x_0.

ii) Se F é U-concava in x_0 ed U é puntato, allora F é U-s.s.q.cv. in x_0.

dim.

i) Supponiamo che $F(x) \in F(x_0) +U$, cioé $F(x)- F(x_0)\in U$. Poiché F é U-concava in x_0 si ha $F(x_0+\lambda(x-x_0))\in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U \subset F(x_0)+U$ $\forall\lambda\in (0,1)$, cosicché F é U-q.cv in x_0.

ii) Supponiamo che $F(x)\in F(x_0) +U^0$, cioé $F(x)- F(x_0)\in U^0$. Poiché F e' U-concava in x_0 si ha $F(x_0+\lambda(x-x_0))\in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U$. La tesi segue dal fatto che per un cono puntato vale la relazione $U^0 +U= U^0$.

♦

Il seguente esempio dimostra che la ii) del Teorema 2.1 é falsa se U non é puntato.

Esempio 2.2

Consideriamo la funzione $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x \geq 0 \\ x & \text{if } x < 0 \end{cases}$ e il cono non puntato $U=\mathbf{R}$. E' facile verificare che F e' U-concava in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ ma F non e' U-s.s.qv. in $x_0=1$, poiché per $x^*=-1$ si ha :

$$F(-1) \in F(1)+\mathbf{R}\setminus\{0\} \text{ e } F(x_0+\frac{1}{2}(x^*-x_0)) = F(0)=0 \notin F(x_0)+\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

3. Proprietà di un problema multiobiettivo concavo-generalizzato

Consideriamo il seguente problema di estremo vettoriale :

$$P: \quad U\text{-max } F(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_s(x)), \ x \in S \subset Z$$

dove $f_i : Z \to \mathbf{R}$, $i= 1, \ldots\ldots,s$ sono funzioni definite su un insieme aperto Z di $\mathbf{R}^n$. Si ponga $U^0=U\setminus\{0\}$.

Un punto ammissibile $x_0 \in S$ é detto:

- punto efficiente per il problema P rispetto al cono U se

$$F(x) \notin F(x_0) +U^0 \quad \forall x \in S \tag{3.1a}$$

- punto efficiente locale per il problema P rispetto al cono U se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$F(x) \notin F(x_0) +U^0, \quad \forall x \in I \cap S \tag{3.1b}$$

- punto efficiente locale stretto per il problema P rispetto al cono U se non esistono nella (7.1a) punti $x \neq x_0$ per i quali $F(x)=F(x_0)$, ovvero se

$$F(x) \notin F(x_0) +U, \quad \forall x \in I \cap S, x \neq x_0 \tag{3.1c}$$

Osserviamo che nel caso scalare ($s=1$, $U=\mathbf{R}_+$) le precedenti definizioni coincidono rispettivamente con quelle ben note di punto di massimo globale, di punto di massimo locale e di punto di massimo locale stretto. Se la (3.1c) e' verificata $\forall x \in S$, diremo che x_0 e' punto efficiente stretto.

Quando il cono U coincide con l'ortante U= $\mathbf{R}^s_+$, le precedente definizioni coincidono rispettivamente con quelle di ottimo secondo Pareto, di ottimo locale secondo Pareto e di ottimo locale stretto secondo Pareto.
Le classi delle funzioni concavo-generalizzate introdotte nel paragrafo precedente, permettono di studiare le relazioni intercedenti tra un ottimo locale ed un ottimo globale e tra l'ottimalità rispetto ad ogni direzione ammissibile e l'ottimalità locale rispetto ad un intorno.
Come gia' accade nel caso scalare, la semistretta quasiconcavita' oppure la pseudoconcavita' della funzione obiettivo implica il fatto che i massimi locali sono anche globali mentre tale proprieta' non e' estendibile alle funzioni quasiconcave se non richiedendo che i massimi locali siano stretti. Si ha infatti il seguente :

Teorema 3.1
Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0.
i) Se x_0 e' un punto efficiente locale ed F é una funzione U-s.s.q.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente .
ii) Se x_0 e' un punto efficiente locale stretto ed F é una funzione U-q.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente stretto .
iii) Se x_0 e' un punto efficiente locale, $\text{int}U \neq \emptyset$ ed F é una funzione U-p.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente.
<u>dim</u>.
i) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U^0$, $\forall\ \lambda \in (0,1)$; per $\lambda \in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0) \in I \cap S$ e cio' implica, contrariamente all'ipotesi, che x_0 non e' un punto efficiente locale.
ii) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U$, $\forall\ \lambda \in (0,1)$; per $\lambda \in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0) \in I \cap S$ e cio' implica, contrariamente all'ipotesi, che x_0 non e' un punto efficiente locale stretto.
iii) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in \text{int}U$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$ ovvero $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0+td)-F(x_0)}{t} \in \text{int}U$, e cio' implica per un opportuno $\varepsilon>0$, che $F(x_0+td)-F(x_0) \in \text{int}U$ per ogni $t \in (0,\varepsilon)$. Posto $t= \lambda\|x^*-x_0\|$, si ha $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+\text{int}U$

per ogni $\lambda \in (0, \frac{\varepsilon}{\|x^*-x_0\|})$ e cio' contraddice l'efficienza locale di x_0.

♦

Osservazione 3.1

La proprieta' iii) del Teorema precedente non e' estendibile alle funzioni U-w.p.cv. anche quando x_0 e' un punto efficiente locale stretto; si consideri infatti il problema P dove $U= \mathbf{R}^2_+$, $F(x)=(x^2, x^2-2x)$ e $S=\{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$. Si verifica facilmente che $x_0=0$ e' un punto efficiente locale stretto per P ma non e' efficiente rispetto ad S; inoltre la funzione F e' $\mathbf{R}^2_+$-w.p.cv. ma non e' $\mathbf{R}^2_+$-p.cv. in x_0.

Corollario 3.1

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono puntato ed F é una funzione U-concava in x_0.
Se x_0 e' un punto efficiente locale , allora x_0 e' anche punto efficiente.
dim.
Conseguenza diretta dei Teoremi 2.1 e 3.1.

♦

Corollario 3.2

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0 ed F é lineare.
Se x_0 e' un punto efficiente locale , allora x_0 e' anche punto efficiente.
dim.
Conseguenza immediata del Corollario 3.1 e dell'Osservazione 2.2.

♦

Come é noto la proprietà per la quale un ottimo locale rispetto ad ogni direzione ammissibile di un insieme localmente stellato é anche un ottimo locale, non vale in generale; al riguardo basta considerare la funzione $F(x,y)=(y-x^4)(x^2-y)$, l'insieme $S= \mathbf{R}^2_+$ ed il punto $x_0=(0,0)$ (vedi anche [13].

Faremo vedere che per la classe delle funzioni U-s.s.q.c. si ha equivalenza tra il concetto di efficienza locale ed il concetto di efficienza rispetto ad una direzione, cosi'definito:

Def. 3.1 Diremo che x_0 e' punto efficiente locale (punto efficiente locale stretto) rispetto alla direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$ e rispetto al cono U se esiste $t^*>0$ tale che

$$F(x) \notin F(x_0) + U^0, \ \forall\, x = x_0+td \ , \ t\in (0, t^*).$$
$$(F(x) \notin F(x_0) + U, \ \forall\, x = x_0+td \ , \ t\in (0, t^*)).$$

Vale il seguente Teorema che generalizza al caso vettoriale i risultati riportati in [13]:

Teorema 3.2
Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0.

i) Se x_0 e' punto efficiente locale per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$ ed F e' una funzione U-s.s.q.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale.

ii) Se x_0 e' punto efficiente locale stretto per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x\in S$ ed F é una funzione U-q.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale stretto.

iii) Se x_0 e' punto efficiente locale per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$, $\mathrm{int}U \neq \emptyset$ ed F é una funzione U-p.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale.

<u>dim</u>.

i) Supponiamo per assurdo che esista $x^*\in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U^0$, $\forall\ \lambda\in (0,1)$; per $\lambda\in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0)\in I \cap S$ e cio' implica che x_0 non e' un punto efficiente locale rispetto alla direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$.

ii) Supponiamo per assurdo che esista $x^*\in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U$, $\forall\ \lambda\in (0,1)$; per $\lambda\in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0)\in I \cap S$ e cio' implica che x_0 non e' un punto efficiente locale stretto rispetto alla direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$.

iii) Supponiamo per assurdo che esista $x^*\in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in \mathrm{int}U$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$ ovvero $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0+td)-F(x_0)}{t} \in$

intU, e cio' implica per un opportuno $\varepsilon>0$, che $F(x_0+td)-F(x_0)\in$ intU per ogni $t\in(0,\varepsilon)$. Posto $t=\lambda\|x^*-x_0\|$, si ha $F(x_0+\lambda(x^*-x_0))\in F(x_0)+\text{int}U$ per ogni $\lambda\in(0,\frac{\varepsilon}{\|x^*-x_0\|})$ e cio' contraddice l'efficienza locale di x_0 rispetto alla direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$.

♦

4 Condizioni sufficienti di ottimalità

In questo paragrafo metteremo in evidenza il ruolo delle funzioni vettoriali concavo-generalizzate definite nel §2 nello stabilire condizioni sufficienti di ottimalità. A tal fine denotiamo con D l'insieme delle direzioni ammissibili di norma unitaria dell'insieme stellato S nel punto x_0 e ricordiamo che se F e' differenziabile nel punto x_0 allora F e' anche direzionalmente differenziabile rispetto ad ogni direzione v e risulta $J_{F_{x_0}}(v)=\frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$ avendo denotato con $J_{F_{x_0}}$ la matrice jacobiana di F nel punto x_0.

Come diretta conseguenza delle definizioni 3.4 e 3.5 si hanno le condizioni sufficienti di ottimalità espresse dai seguenti teoremi:

Teorema 4.1

Si consideri il problema P dove F e' direzionalmente differenziabile in x_0.

i) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, intU $\neq\emptyset$ ed F é U-p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0)\notin \text{int}U\,,\quad \forall\, v\in D$$

ii) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono chiuso ed F é U-w.p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0)\notin U^0\,,\quad \forall\, v\in D$$

Teorema 4.2

Si consideri il problema P dove F e' differenziabile in x_0 .

i) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, $intU \neq \emptyset$ ed F é U-p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin intU , \quad \forall\, v \in D$$

ii) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono chiuso ed F é U-w.p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin U^0 , \quad \forall\, v \in D$$

Consideriamo adesso il problema P nel caso in cui S é un insieme aperto (problema non vincolato). In ipotesi di differenziabilità, é noto che nel caso scalare (s=1) la condizione per cui un punto di massimo locale interno alla regione ammissibile é anche un punto critico della funzione, si generalizza al caso vettoriale non attraverso l'annullamento dei gradienti di tutte le componenti della funzione obiettivo ma richiedendo l'esistenza di un vettore non nullo α appartenente al polare positivo $U^*=\{\alpha \in \mathbf{R}^s: \alpha^t u \geq 0 \;\; \forall u \in U\}$ tale che $\alpha^t J_{F_{x_0}} =0$. Riguardo a tale condizione di ottimalità il seguente teorema evidenzia i diversi ruoli assunti dalla debole pseudoconcavità e dalla pseudoconcavità :

Teorema 4.3

Si consideri il problema non vincolato P dove S e' un insieme localmente stellato in x_0 ed F e' differenziabile in x_0 .

i) Se $intU \neq \emptyset$, F é U-p.cv. in x_0, ed $\exists\; \alpha \in U^* \setminus \{0\}$ tale che $\alpha^t J_{F_{x_0}}=0$ allora x_0 é un punto efficiente per P .

ii) Se F é U-w.p.cv. in x_0, ed $\exists\; \alpha \in intU^*$ tale che $\alpha^t J_{F_{x_0}}=0$ allora x_0 é un punto efficiente per P .

<u>dim</u>.

i) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-p.cv. in x_0, si ha $J_{F_{x_0}}(d) \in intU$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$, cosicche' $\alpha^t(J_{F_{x_0}}(d)) >0$ e cio' contraddice la condizione $\alpha^t J_{F_{x_0}}=0$.

ii) Supponiamo per assurdo che esista $x^*\in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-w.p.cv. in x_0, si ha $J_{F_{x_0}}(d) \in U^0$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$, cosicche' $\alpha^t(J_{F_{x_0}}(d)) >0$ e cio' contraddice la condizione $\alpha^t J_{F_{x_0}}=0$.

♦

Consideriamo ora il problema di estremo vettoriale P nella seguente formulazione:

$$P: \text{ U-max } F(x)\,,\ x \in S= \{x \in Z: G(x) \in V\}$$

dove $Z \subset \mathbf{R}^n$ é un insieme aperto, $F: Z \to \mathbf{R}^s$ e $G: Z \to \mathbf{R}^m$ sono funzioni differenziabili, $s \geq 1$, $m \geq 1$, e $U\subset \mathbf{R}^s$,$V\subset \mathbf{R}^m$ sono coni convessi chiusi puntati di vertice l'origine con $\mathrm{int}U\neq\emptyset$, $\mathrm{int}V\neq\emptyset$.

Il seguente teorema evidenzia il ruolo della concavita' generalizzata nello stabilire condizioni sotto le quali le condizioni necessarie di ottimalità di F.John e di Kuhn-Tucker divengono sufficienti :

Teorema 4.4

Si consideri il problema multiobiettivo P dove S e' un insieme localmente stellato in x_0 e le funzioni F e G sono differenziabili in x_0.

i) Se F e' U-w.p.cv. in x_0, G e' V-q.cv. in x_0 ed inoltre

$$\exists\ 0\neq(\alpha_F,\alpha_G)\,,\ \alpha_F\in \mathrm{int}U^*,\ \alpha_G\in V^*:\ \alpha_F^t J_{F_{x_0}}+ \alpha_G^t J_{G_{x_0}}=0\,,$$

allora x_0 e' un punto efficiente per P.

ii) Se F e' U-p.cv. in x_0, G e' V-q.cv. in x_0 ed inoltre

$$\exists\ 0\neq(\alpha_F,\alpha_G)\,,\ \alpha_F\in U^*\backslash\{0\},\ \alpha_G\in V^*:\ \alpha_F^t J_{F_{x_0}}+ \alpha_G^t J_{G_{x_0}}=0\,,$$

allora x_0 e' un punto efficiente per P.

<u>dim.</u>

i) Supponiamo che esista $x^*\in S$ tale che $F(x^*)\in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-w.p.cv. in x_0 e G e' V-q.cv. in x_0 si ha , rispettivamente, $J_{F_{x_0}}(x^*-x_0)\in U^0$ e $J_{G_{x_0}}(x^*-x_0)\in V$ e quindi $\alpha_F^t J_{F_{x_0}}(x^*-x_0)>0$, $\alpha_G^t J_{G_{x_0}}(x^*-x_0)\geq 0$ in quanto $\alpha_F\in \mathrm{int}U^*$ e $\alpha_G \in V^*$. Conseguentemente

$\alpha_F^t J_{F_{x_0}}(x^*-x_0)+\alpha_G^t J_{G_{x_0}}(x^*-x_0)>0$ e cio' contraddice la condizione $\alpha_F^t J_{F_{x_0}}+\alpha_G^t J_{G_{x_0}}=0$.

ii) Dimostrazione simile alla i).

♦

References

[1] **Arrow K.J, Enthoven A.C**: "Quasi-concave programming" Econometrica, vol.29, 1961, pp. 779-800.

[2] **Mangasarian O. L.** : "Nonlinear Programming", McGraw-Hill,New York,1969.

[3] **Martos B.** : "Nonlinear Programming, theory and methods", North-Holland,Amsterdam,1975.

[4] **Avriel M.** "Nonlinear Programming. Analysis and methods" Prentice Hall, 1976.

[5] **Avriel M., Diewert W. E., Schaible S., Zang I.** "Generalized concavity" Plenum Press, 1988.

[6] **Schaible S., Ziemba W.T.** "Generalized concavity in optimization and economics" Academic Press, 1981.

[7] **Singh C., Dass B.K.** "Continuous-time, Fractional and multiobjective programming" Analytic Publishing Co., 1989.

[8] **Cambini A., Castagnoli E., Martein L.,Mazzoleni P., Schaible S.** "Generalized convexity and fractional programming with economic applications" Springer Verlag, 1990.

[9] **Cambini R.**: "Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate", report 57, Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1992.

[10 **Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.** : "Theory of Multiobjective Optimization", Academic Press, 1985.
[11] **Jahn J.** : "Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces", Verlag 1986.
[12] **Luc D.T**: " Theory of Vector Optimization " Springer Verlag 1988.
[13] **Cambini R.**: "Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato", report 54, Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1992.