Report n.65

Considerazioni metodologiche sul concetto di elasticità prefissata

Giovanni BOLETTO

Pisa, dicembre 1992
Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 60%)

1- Possiamo affermare che tutte le volte che due serie di dati misurano fenomeni economici funzionalmente legati fra loro se ne può calcolare l'elasticità. Quindi **la nozione di elasticità ha un significato generale.** Si può misurare l'elasticità della domanda rispetto al prezzo, dei consumi rispetto al reddito, degli impieghi rispetto ai depositi bancari, delle importazioni e delle esportazioni rispetto al reddito nazionale, degli investimenti rispetto alle risorse disponibili sul mercato interno, della produzione rispetto alle prestazioni del capitale e del lavoro (funzioni di produzione di COBB-DOUGLAS e di SOLOW), e via dicendo.
La misura dell'elasticità relativa ad un intervallo finito nell'ipotesi più comune che l'elasticità sia variabile entro l'intervallo, si risolve nel calcolo di un valore medio di elasticità nell'intervallo considerato.
Conoscendo l'equazione della curva di domanda e quindi l'equazione della curva di elasticità, che possiamo indicare con

$$\varepsilon = \varphi(x),$$

l'elasticità media ε_m del tratto di curva compreso tra i valori x_1 e x_2, secondo il Ricci, risulterà uguale a

$$\varepsilon_m = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx$$

cioè è la media aritmetica dell'elasticità nei diversi punti della curva compresi nell'intervallo considerato.
Nella maggior parte dei casi pratici, conosciamo, però, non l'equazione della curva di domanda ma soltanto due punti della curva.
In questi casi, **l'elasticità della domanda,** ad es., rispetto al prezzo, si può definire come il **rapporto** tra la **variazione relativa** (dal tempo 1 al tempo 2) **della quantità domandata** e la **variazione relativa** (nello stesso tempo) **del prezzo.**

$$\frac{d_2 - d_1}{d_1} : \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta d}{d} : -\frac{\Delta p}{p} = \eta$$

Per esprimere i valori di η con segno positivo (invece che negativo, data la relazione inversa che, generalmente, esiste fra domanda e prezzo) il MARSHALL propose di cambiare il segno della variazione relativa del prezzo.

Il rapporto tra le due variazioni relative ci dà una misura approssimativa della elasticità perchè si suppone che fra i due punti di coordinate ($d_1\ p_1$; $d_2\ p_2$) passi una RETTA : l'elasticità risulta diversa partendo dall'uno o dall'altro estremo del tratto di RETTA considerato (Tab. 1 e Graf. 1).

In altre parole, tale approssimazione deriva dal fatto che se

$$p_2 > p_1 \quad e \quad d_2 < d_1$$

$$p_2 < p_1 \quad e \quad d_2 > d_1$$

l'incremento del prezzo (Δ p) è riferito, nel primo caso, ad un prezzo iniziale (p_1) più piccolo di quello finale (p_2), mentre il decremento della domanda (Δ d) è riferito ad una domanda iniziale (d_1) più grande di quella finale (d_2). Quindi mentre non esiste un limite superiore all'aumento del prezzo, esiste un limite inferiore (= 0) alla diminuzione della domanda.

Il contrario avviene nel secondo caso. Perciò, nel **primo caso**, la percentuale di decremento della domanda e di conseguenza la stessa elasticità risultano errati **per difetto** (1° caso, Tab. 1); mentre nel **secondo caso,** la percentuale di decremento del prezzo risulta errata per difetto e quindi l'elasticità risulta **errata per eccesso** (2° caso, Tab. 1).

2- Per misurare esattamente l'**elasticità** quando, come abbiamo visto, si ragiona in termini finiti, il Guidotti suppone che fra i due punti presi in considerazione (di coordinate, rispettivamente, $d_1\ p_1$ e $d_2\ p_2$) passi una CURVA AD ELASTICITA' COSTANTE. (Graf. n. 2)

$$d = C\,p^{-\alpha}$$

Quindi si ha

$$d_1 = C\,p_1^{-\alpha} = \frac{C}{p_1^{\alpha}}$$

$$d_2 = C\, p_2^{-\alpha} = \frac{C}{p_2^{\alpha}}$$

dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha}$$

prendendo i logaritmi di ambo i membri, si ha:

$$\alpha = \frac{\log d_1 - \log d_2}{\log p_2 - \log p_1} = \eta$$

Tale formula ci dà una **misura corretta della ELASTICITA' perchè risulta indipendente dall'ampiezza dell'intervallo di osservazione**. Quindi ci dà lo stesso risultato partendo sia dall'uno che dall'altro estremo del tratto di curva considerato. Quando infatti si calcola l'elasticità in un punto, l'intervallo considerato è costituito da un **infinitesimo,** e quindi

domanda iniziale ≅ domanda finale a meno di un infinites
prezzo iniziale ≅ prezzo finale a meno di un infinites.

A questo punto ci sembra opportuno chiarire il significato delle precedenti espressioni con un esempio, dove si suppone, nel primo caso, che all'aumento del prezzo la domanda diminuisca e, nel secondo caso, che una volta aumentato il prezzo diminuisca (e la domanda di riflesso aumenti) per ritornare nella situazione iniziale.

Tab. 1 - Domanda ad elasticità unitaria

Tempo	Prezzo (p)	Domanda (d)	Prezzo (p)	Domanda (d)	Spesa compl. (p) x (d)
1	2,4 (p_1)	10 (d_1)	3 (p_1)	8 (d_1)	24
2	3 (p_2)	8 (d_2)	2,4 (p_2)	10 (d_2)	24
Var.relat.	+ 25%	- 20%	- 20%	+ 25%	

Quindi, passando dal primo al secondo caso, la misura dell'elasticità non dovrebbe variare. Applicando la formula del MARSHALL si ottengono, invece, due valori dell'elasticità:

$$\alpha = \frac{\Delta d}{d} : -\frac{\Delta p}{p} = \begin{cases} = \dfrac{-2}{10} : -\dfrac{0,6}{2,4} = \dfrac{0,20}{0,25} = 0,80 \text{ (elasticità errata per difetto)} \\[2ex] = \dfrac{2}{8} : -\dfrac{-0,6}{3} = \dfrac{0,25}{0,20} = 1,25 \text{ (elasticità errata per eccesso)} \end{cases}$$

Esprimendo sotto forma di **numeri indici** (con base : tempo 1 = 100) i dati della Tab.1, possiamo applicare la formula semplificata dell'elasticità

$$\alpha = -\frac{I_{d_2} - I_{d_1}}{I_{p_2} - I_{p_1}} = \begin{cases} = -\dfrac{80 - 100}{125 - 100} = 0,80 \\[2ex] = -\dfrac{125 - 100}{80 - 100} = 1,25 \end{cases}$$

Cioè la misura dell'elasticità si può ottenere ragguagliando la differenza, dal tempo **2** al tempo **1** , dei numeri indici semplici (con base : tempo 1 = 100) delle quantità (domandate) a quella dei numeri indici semplici dei prezzi (per gli sviluppi cfr. § 6)

Una misura unica dell'elasticità si ottiene ricavandola in base ai logaritmi

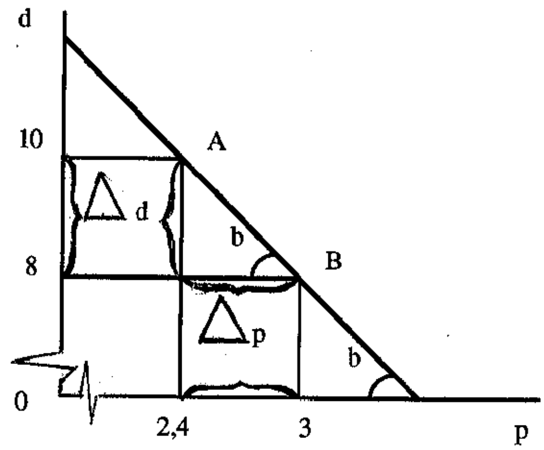
$$\alpha = \frac{\Delta \log d}{\Delta \log p} = \frac{\log d_1 - \log d_2}{\log p_2 - \log p_1} = \begin{cases} = \dfrac{\log 10 - \log 8}{\log 3 - \log 2,4} = \dfrac{0,09691}{0,09691} = 1 \\[2ex] = \dfrac{\log 8 - \log 10}{\log 2,4 - \log 3} = \dfrac{-0,09691}{-0,09691} = 1 \end{cases}$$

Infatti, se la **spesa complessiva (p x d) resta immutata** al crescere (al decrescere) del prezzo, come nel nostro caso (= 24), vuol dire che l'**aumento (la diminuzione) del prezzo provoca una diminuzione (aumento) proporzionale della domanda**, e quindi si suole dire che l'ELASTICITA' E' UNITARIA.

Si otterrebbe lo stesso risultato applicando la formula :

$$\frac{\log I_{d_1} - \log I_{d_2}}{\log I_{p_2} - \log I_{p_1}} = \frac{\log 100 - \log\ 80}{\log 125 - \log 100} = \frac{\log 100 - \log 125}{\log 80 - \log 100} = 1$$

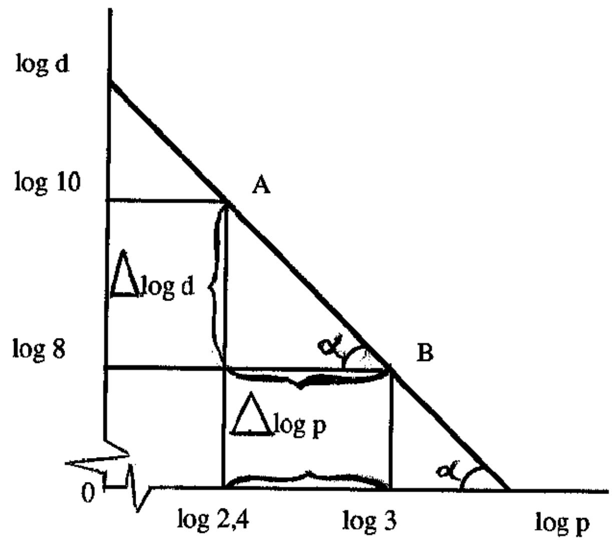
3 - Graficamente, applicando la formula del MARSHALL, si suppone che fra i due punti A e B, di coordinate, rispettivamente, 2,4 ; 10 e 3; 8, passi una RETTA ($d = a - bp$), cioè:



Graf. n. 1

Quindi la misura dell'elasticità $\left(\alpha = -\frac{\Delta d}{\Delta p} \cdot \frac{p}{d} = b\frac{p}{d}\right)$ risulta diversa a seconda che si "parta" da A o da B, perche' la pendenza (**b**) dipende dalla variazione assoluta di **p** e **d** , mentre l'elasticita' dipende dalle variazioni percentuali, come è confermato dai calcoli precedenti.

Se si suppone, invece, che fra i due punti A e B passi un'iperbole ($d = C\,p^{-\alpha}$), rappresentandola su un diagramma a doppia scala logaritmica, che, come e' noto,misura le variazioni percentuali, si ottiene una retta ($\log d = \log C - \alpha \log p$) inclinata da sinistra a destra, cioè:



Graf. n. 2

Perciò la misura dell'elasticità $\left(\alpha = \dfrac{\Delta \log d}{\Delta \log p}\right)$ risulta la stessa partendo sia da A che da B, in questo caso, infatti, la pendenza (α) si identifica con l'elasticità, come è confermato dai calcoli precedenti.

4 - Dopo aver considerato, nel §.2, la misura dell'elasticità (η_1), in un certo intervallo da p_1 a p_2, consideriamo adesso la misura dell'elasticità in un successivo intervallo da p_2 a p_3, cioè

$$\eta_2 = \frac{\log d_2 - \log d_3}{\log p_3 - \log p_2}$$

Consideriamo adesso la misura dell'elasticità nell'intero intervallo da p_1 a p_3 , essa è

$$\eta = \frac{\log d_1 - \log d_3}{\log p_3 - \log p_1}$$

Quest'ultimo risultato non è altro che la media aritmetica ponderata dei valori della elasticità nei due intervalli da p_1 a p_2 e da p_2 a p_3 , dove ogni valore dell'elasticità non è ponderato in base all'ampiezza dell'intervallo fra i prezzi, ma in base all'ampiezza dell'intervallo tra i logaritmi dei prezzi, infatti

$$\frac{\frac{\log d_1 - \log d_2}{\log p_2 - \log p_1} \cdot (\log p_2 - \log p_1) + \frac{\log d_2 - \log d_3}{\log p_3 - \log p_2} (\log p_3 - \log p_2)}{(\log p_3 - \log p_1)} =$$

$$= \frac{\log d_1 - \log d_3}{\log p_3 - \log p_1}$$

In questa media ponderata si attribuisce un peso maggiore ai valori dell'elasticità relativa ai più bassi prezzi e un peso minore ai valori dell'elasticità relativi ai più alti prezzi.

Ovviamente, tale procedimento conduce a risultati vicini a quello medio effettivo soltanto se siamo di fronte a tratti di curva con elasticità poco variabile. Ma in tutti i casi in cui non si conosca l'equazione della curva di domanda, il supporre che fra i punti in nostro possesso passi una curva ad elasticità costante resta comunque l'unica ipotesi ammissibile.

5 - Nel caso di **intervalli finiti** esiste un metodo molto semplice per accertare se la domanda è elastica o rigida oppure presenta elasticità unitaria.

Se fra prezzo e spesa complessiva (=pxd=pxq=v), ovvero se fra gli indici elementari (con base: tempo 1 = 100) dei prezzi e quelli di valore del bene considerato, esiste CORRELAZIONE NEGATIVA (Tab.2), POSITIVA (Tab.3) o NULLA (Tab.1), la domanda risulta, rispettivamente, ELASTICA, INELASTICA o presenta ELASTICITA' UNITARIA.

Nel primo caso (Tab. 2) se la **spesa complessiva cresce (diminuisce) al diminuire (aumentare) del prezzo**, vuol dire che la diminuzione (aumento) del prezzo provoca un aumento (diminuzione) **più che proporzionale** della domanda, come risulta dal seguente esempio.

Tab. 2 - Domanda elastica

Tempo	p	d	p x d	p	d	p x d
1	3	8	24	2,4	12	28,8
2	2,4	12	28,8	3	8	24
Var.relat.	-20%	+50%		+25%	-33,33%	
BOULDING	-25%	+50%		+25%	-50%	

$$\eta = \alpha = \frac{\log 8 - \log 12}{\log 2{,}4 - \log 3} = \frac{0{,}90309 - 1{,}07918}{0{,}38021 - 0{,}47712} = 1{,}817$$

Nel secondo caso (Tab. 3), se la **spesa complessiva cresce (diminuisce) all'aumentare (diminuire) del prezzo**, vuol dire che l'aumento (diminuzione) del prezzo provoca una diminuzione (aumento) **meno che proporzionale** della domanda, come risulta dal seguente esempio.

Tab. 3 - Domanda anelastica

Tempo	p	d	p x d	p	d	p x d
1	20	30	600	40	24	960
2	40	24	960	20	30	600
Var.relat.	+100%	-20%		- 50%	+25%	
BOULDING	+100%	-25%		-100%	+25%	

$$\eta = \alpha = \frac{\log 30 - \log 24}{\log 40 - \log 20} = \frac{0{,}09691}{0{,}30103} = 0{,}322$$

In base alle formule del MARSHALL (Δ d/d) : (- Δ p/p) e del BOULDING si otterrebbero, nel **primo caso**, rispettivamente,

$$\left.\begin{array}{l}\eta = 2{,}5 \; (= 50/20) \\[2ex] \eta = 1{,}333 \; (= 33{,}33/25)\end{array}\right\} \quad \text{BOULDING} = 50/25 = 2 = 4/8 : 0{,}6/2{,}4$$

e nel **secondo caso**, rispettivamente

$$\left.\begin{array}{l}\eta = 0{,}2 \; (= 20/100) \\[2ex] \eta = 0{,}5 \; (= 25/50)\end{array}\right\} \quad \text{BOULDING} = 25/100 = 0{,}25 = 6/24 : 20/20$$

Nella formula del Boulding le variazioni assolute sono ragguagliate al valore più basso, fra d_1 e d_2 e fra p_1 e p_2, senza tener conto dell'ordine di successione.

6 - Se l'ampiezza dell'intervallo non è troppo grande, una misura dell'elasticità che si avvicina a quella esatta (ottenuta mediante i **logaritmi**) si ricava ragguagliando la variazione assoluta sia della domanda che del prezzo alla media aritmetica, rispettivamente, di d_1 e d_2 e di p_1 e p_2 (tale formula verrà denominata, nel seguito, per brevità, ELASTICITA' MEDIA), oppure alla loro media geometrica.
Cioè

$$\eta = - \frac{\dfrac{\Delta d}{(d_1 + d_2)/2}}{\dfrac{\Delta p}{(p_1 + p_2)/2}} \quad ; \quad \eta = - \frac{\dfrac{\Delta d}{\sqrt{d_1 \cdot d_2}}}{\dfrac{\Delta p}{\sqrt{p_1 \cdot p_2}}}$$

Nel primo caso, si otterrebbe:

$$\eta = \frac{\dfrac{4}{(12 + 8)/2}}{\dfrac{0{,}6}{(3 + 2{,}4)/2}} = 1{,}800 \quad ; \quad \eta = \frac{\dfrac{4}{\sqrt{12 \cdot 8}}}{\dfrac{0{,}6}{\sqrt{3 \cdot 2{,}4}}} = 1{,}821$$

nel secondo, si avrebbe :

$$\eta = \frac{\dfrac{6}{(30+24)/2}}{\dfrac{20}{(20+40)/2}} = 0,333 \quad ; \qquad \eta = \frac{\dfrac{6}{\sqrt{30 \cdot 24}}}{\dfrac{20}{\sqrt{20 \cdot 40}}} = 0,317$$

Si otterrebbero gli stessi risultati (1,800 e 0,333) applicando la formula che utilizza i numeri indici semplici delle quantità (domandate) e dei prezzi (con base: tempo 1 = 100) del bene considerato, cioè :

$$-\frac{\dfrac{I_{d\,2}-I_{d\,1}}{I_{d\,2}+I_{d\,1}}}{\dfrac{I_{p\,2}-I_{p\,1}}{I_{p\,2}+I_{p\,1}}} = -\frac{I_{d\,2}-I_{d\,1}}{I_{p\,2}-I_{p\,1}}\,\frac{I_{p\,2}+I_{p\,1}}{I_{d\,2}+I_{d\,1}}$$

Infatti, nel primo caso (Tab.2) si ha :

$$2,5\,\frac{80+100}{150+100} = 1,333\,\frac{125+100}{66,67+100} = 1,800$$

Questa formula è preferibile a quella vista precedentemente, perchè ci permette di usare i risultati ottenuti applicando la formula del MARSHALL, moltiplicandoli per un fattore di correzione (f.c.) che risulterà $\gtrless 1$ secondo che "l'elasticità marshalliana" risulti errata per difetto o per eccesso (nell'esempio dianzi riportato : f.c. = 180/250 = 0,72 ; 225/166,67 = 1,35).

Anche la formula del BOULDING si può esprimere mediante i numeri indici semplici (dei prezzi e delle quantità del bene considerato) e in funzione della formula del MARSHALL, ma rispetto alla formula vista precedentemente, che misura l'elasticità media, risultano, ovviamente, diversi i fattori di correzione.

Infatti, in base ai dati della Tab.2, si ha :

$$-\frac{I_{d\,2}-I_{d\,1}}{I_{p\,2}-I_{p\,1}} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{I_{p2}}{I_{d\,1}} = 2,5\,\dfrac{80}{100} = 2 \\[2ex] \searrow \dfrac{I_{p\,1}}{I_{d2}} = 1,333\,\dfrac{100}{66,67} = 2 \end{array}$$

La formula che misura l'elasticità mediante i logaritmi e quella della elasticità media ci danno lo stesso risultato se α =1, cioè se l'elasticità è unitaria. Se, infatti, fra i due punti in nostro possesso passa un'IPERBOLE EQUILATERA (α =1), si ha (cfr.§ 2 e Tab.1) :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_2}{p_1} \; ; \; d_1 p_1 = d_2 p_2 \; ; \; 10 \times 2{,}4 = 8 \times 3$$

Cioe' la spesa sostenuta al tempo 1 risulta uguale alla spesa sostenuta al tempo 2. In questo caso di spesa costante, si dimostra facilmente che la formula dell'elasticita' media ci da' lo stesso risultato (ed, ovviamente, anche quella del BOULDING). Infatti :

$$-\frac{d_2 - d_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_2 + p_1}{d_2 + d_1} = \frac{-d_2p_2 - d_2p_1 + d_1p_2 + d_1p_1}{d_2p_2 - d_2p_1 + d_1p_2 - d_1p_1} = 1$$

7 - Se fra i fenomeni considerati invece di una relazione inversa (ad.es., elasticità della domanda rispetto al prezzo), esiste una relazione diretta (ad es., elasticità dell'offerta rispetto al prezzo), la misura dell'elasticità si ottiene, come è noto, in prima approssimazione, dividendo la variazione percentuale della quantità offerta per la variazione percentuale del prezzo.

Ipotizzando, invece, che fra i due punti dell'intervallo considerato non passi una RETTA ma una PARABOLA, che, come è noto, rappresentata su un diagramma a doppia scala logaritmica dà luogo ad una RETTA crescente da sinistra a destra, il coefficiente angolare di questa retta ci dà la misura esatta dell'elasticità, sempre che si sia di fronte a tratti di curva con elasticità poco variabile, oppure in tutti i casi in cui non si conosca l'equazione della curva di offerta, come si è visto precedentemente nel § 4.

Se nella Tab.2 consideriamo al posto della colona **d** (domanda) la colonna **o** (offerta) con i valori invertiti (oppure se combiniamo i dati della colonna 2 con quelli della colonna 6 e quelli della colonna 3 con quelli della colonna 5), cioè nel tempo 1 al prezzo 3 vengono offerte 12 unità del bene considerato e nel tempo 2 al prezzo 2,4 ne vengono offerte 8, e viceversa (tempo 1 : **p** = 2,4 ; **o** = 8 ; tempo 2 : **p** = 3 ; **0** = 12), l'elasticità dell'offerta rispetto al prezzo risulterà, in base alla formula del Marshall uguale a 1,65 ($= \frac{33{,}33\ \%}{20\ \%}$) nel primo caso, 2 ($= \frac{50\ \%}{25\ \%}$)

nel secondo, mentre in base alla formula logaritmica e a quella dell'elasticità media si ottengono, rispettivamente, 1,817 e 1,800.

Se nella Tab.3 procediamo analogamente, si otterranno in base alla formula del Marshall i seguenti valori : 0,250 $\left(=\frac{25\ \%}{100\ \%}\right)$ e 0,400 $\left(=\frac{20\ \%}{50\ \%}\right)$, mentre in base alla formula logaritmica l'elasticità risulterà uguale a 0,322 e 0,333 in base a quella dell'elasticità media.

8 - Nel caso di relazione diretta fra alcune variabili economiche dipendenti e indipendenti, talvolta accade che ci venga fornita la misura dell'elasticità, mentre bisogna determinare il "secondo" valore della variabile dipendente, il cosiddetto valore finale.

Ad es., la legge 392/78 ha fissato l'elasticità dell'affitto (per gli immobili urbani soggetti ad "equo canone") rispetto al livello dei prezzi al consumo per le famiglie di operai ed impiegati (che denomineremo nel seguito brevemente come indice ISTAT) nella misura del 75%, cioè ad una variazione dell' 1% del livello dei prezzi deve corrispondere una variazione dello 0,75% dell'affitto. Quindi si tratta di una elasticità (sui generis) fra due prezzi : quello dell'affitto e quello medio di tutti i beni e servizi presi in considerazione per costruire l'indice generale dei prezzi.

Inoltre, bisogna tener presente che il prezzo dell'affitto influenza, anche se in minima parte, il livello generale dei prezzi. Ad es.nei numeri indici dei prezzi al consumo per le famiglie di operai ed impiegati con base: 1989 = 100, il peso del capitolo abitazione (in cui è compreso, ovviamente, l'affitto) è del 5,32%.

In questo caso, il problema non è determinare il valore dell'elasticità (0,75), che ci viene fornito a priori, ma quello del canone che in presenza di un determinato aumento dell'indice ISTAT deve verificare tale misura dell'elasticità.

In generale, l'elasticità dell'affitto rispetto al livello generale dei prezzi può risultare $\gtreqless 1$.

Maggiore di 1 per effetto, generalmente, delle cosiddette rendite di posizione e minore di 1, talvolta, per interventi, come abbiamo visto poco fa, del legislatore.

Cioè :

$$\frac{\dfrac{A_i - A_0}{A_0}}{\dfrac{I_{p_i} - I_{p_0}}{I_{p_0}}} = \frac{\dfrac{A_i - A_0}{A_0}}{\dfrac{A'_i - A_0}{A_0}} = \frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} \gtreqless 1 \qquad [1]$$

dove :

A_i = canone mensile effettivo relativo al periodo **i**

A_0 = canone mensile effettivo relativo al periodo **0**

A'_i = canone mensile indicizzato al 100% relativo al periodo **i**

I_{p_i} = indice prezzi al consumo relativo al periodo **i**

Come risulta evidente, invece di ragguagliare la variazione relativa dell'affitto alla analoga variazione dell'indice dei prezzi, si può ragguagliare la prima alla variazione relativa del canone indicizzato al 100%. Ciò semplifica notevolmente la formula dell'elasticità : basta infatti dividere la differenza fra il canone al tempo **i** e quello al tempo **0** (iniziale) per l'analoga differenza fra i due canoni di cui il primo indicizzato al 100%.

Pertanto, se il canone risulta indicizzato al 75%, si ha :

$$\frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} = 0,75$$

Quindi:

$$A_i = A_0 + 0,75\,(A'_i - A_0) = A_0 + 0,75\,A'_i - 0,75\,A_0$$

$$A_i = 0,25\,A_0 + 0,75\,A'_i$$

Cioè il canone indicizzato al 75% si ricava sommando al 25% del canone base il 75% del canone indicizzato al 100%. In altre parole, il 25% del canone base non beneficia di alcuna indicizzazione, mentre il 75% del canone base beneficia di una indicizzazione al 100%. Quindi A_i si può considerare come una MEDIA ARITMETICA PONDERATA del canone iniziale (A_0) e del canone "finale" (A'_i), con pesi, rispettivamente, 0,25 e 0,75.

9 - Nella [1] si ipotizza che tra i punti di coordinate $A_0\, I_{p_0}$ (ovvero A_0, A_0) e $A_i\, I_{p_i}$ (ovvero A_i, A'_i) passi una retta (y = a +bx) con elasticità pari a b (x/y), cioè uguale, nel nostro caso, a 0,75 ($A_{0'}/A_0$). Pertanto, quando le coordinate relative al primo punto dell'intervallo considerato assumono uguale valore, l'elasticità risulta costante in tutti i subintervalli compresi nell'intervallo considerato.

In altre parole, se l'elasticità del'affitto rispetto all'indice generale dei prezzi risulta uguale a 0,75 nell'intervallo **0 - i** , essa risulterà uguale a 0,75 anche nei subintervalli in cui si può suddividere l'intervallo **0 - i**[1] , (per i, intero, maggiore di 1) cioè

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}} = 0{,}75 \qquad \text{(per i = 2,3,......, n)}$$

Infatti se

$$A_i = A_0 + 0{,}75\,(A'_i - A_0)$$

Si può scrivere

$$A_i = A_0 + A_0\,0{,}75\,\frac{A'_i - A_0}{A_0}$$

$$A_i = A_0 + A_0\,0{,}75\,\frac{I_{pi} - I_{p0}}{I_{p0}}$$

$$A_i = A_0 + A_0\,0{,}75\,\frac{I_{pi} - I_{pi-1} + I_{pi-1} - I_{p0}}{I_{p0}}$$

$$A_i = A_{i-1} + A_0\,0{,}75\,\frac{I_{pi} - I_{pi-1}}{I_{p0}}$$

Ricordando che

$$\frac{A_0}{I_{p0}} = \frac{A'_1}{I_{p1}} = \frac{A'_2}{I_{p2}} = \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; = \frac{A'_i}{I_{pi}}$$

si può scrivere :

[1] Se per es., **i**=5, l'intervallo 0-5 e' divisibile in 5 subintervalli : 5-4;4-3 ; 3-2 ; 2-1 ; 1-0; in ognuno dei quali la misura dell'elasticita' risulta uguale a quella che si riscontra nell'intervallo che li comprende.

$$A_i = A_{i-1} + A'_{i-1} \frac{I_{P_i} - I_{P_{i-1}}}{I_{P_{i-1}}} 0{,}75 \qquad [2]$$

$$A_i = A_{i-1} + A'_{i-1} \frac{A'_i - A'_{i-1}}{A'_{i-1}} 0{,}75$$

E quindi

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}} = 0{,}75 = \frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} \qquad [3]$$

Il secondo rapporto si può esprimere come media aritmetica ponderata dei "primi rapporti" (per **i** = 1,2,3 ....), che, nel nostro caso, risultano tutti uguali a 0,75, con pesi le quantità che figurano ai rispettivi denominatori . Infatti :

$$\frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} =$$

$$= \frac{\frac{A_i - A_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}}(A'_i - A'_{i-1}) + \frac{A_{i-1} - A_{i-2}}{A'_{i-1} - A'_{i-2}}(A'_{i-1} - A'_{i-2}) + \ldots + \frac{A_1 - A_0}{A'_1 - A_0}(A'_1 - A_0)}{(A'_i - A'_{i-1}) + (A'_{i-1} - A'_{i-2}) + \ldots + (A'_1 - A_0)}$$

10 - Non vale però il ragionamento inverso, cioè se l'elasticità dell'affitto rispetto all'indice generale dei prezzi risulta uguale a 0,75 **in ciascuno** dei subintervalli **i -1 - i** , che danno luogo all'intervallo **0 - i**, in quest'ultimo intervallo l'elasticità risulterà minore di 0,75 [2].

Infatti se

$$\frac{\dfrac{A^*_i - A^*_{i-1}}{A^*_{i-1}}}{\dfrac{A'_i - A'_{i-1}}{A'_{i-1}}} = \frac{\dfrac{A^*_i - A^*_{i-1}}{A^*_{i-1}}}{\dfrac{I_{p\,i} - I_{p\,i-1}}{I_{p\,i-1}}} = 0{,}75 \qquad [4] \ (\text{per } \mathbf{i} = 2, 3, 4, \ldots, n)$$

$$\frac{A^*_i - A^*_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}} \frac{A'_{i-1}}{A^*_{i-1}} = 0{,}75$$

[2] Ovviamente, se **i** = 1, l'intervallo **0-1** coincide con l'intervallo **(i -1) - 1** e quindi l'elasticità risulterà uguale a 0,75.

In base alla [3], si può scrivere :

$$\frac{A^*_i - A^*_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}} \frac{A'_{i-1}}{A^*_{i-1}} = \frac{A_i - A_{i-1}}{A'_i - A'_{i-1}} = \frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} = 0{,}75$$

Poichè $A'_{i-1} > A^*_{i-1}$, si dimostra, per **i** = 2, 3, ... , che $A_i > A^*_i$, e quindi :

$$\frac{A^*_i - A_0}{A'_i - A_0} < 0{,}75$$ [3]

Analogamente a quanto dimostrato nel precedente paragrafo, il suindicato rapporto si può esprimere come media aritmetica ponderata dei rapporti

$$\frac{(A^*_i - A^*_{i-1})}{(A'_i - A'_{i-1})} \quad \text{(per } \mathbf{i} = 1, 2, 3, \ldots\text{),}$$

che risultano tutti inferiori a 0,75, con pesi le quantità che figurano ai rispettivi denominatori.

Per **i** intero maggiore di 1, in base alla [1] si ottengono valori maggiori di quelli ottenuti applicando la [4] , ad es., il canone mensile relativo al periodo **i** (A^*_i) si ottiene addizionando al canone del periodo **i -1**, la variazione relativa dei prezzi rispetto al periodo **i -1**, moltiplicata per il canone del periodo **i -1**, cioè :

$$A^*_i = A^*_{i-1} + A^*_{i-1} \frac{I_{p\,i} - I_{p\,i-1}}{I_{p\,i-1}} 0{,}75 = A^*_{i-1}\, 0{,}25 + A^*_{i-1} \frac{A'_i}{A'_{i-1}} 0{,}75$$

In altre parole, in base alla [1]si considera l'intera variazione dell' indice ISTAT , dal periodo base (= **0**) a quello **i** di volta in volta considerato, da ciò la denominazione, anche se impropria di VARIAZIONE ASSOLUTA (METODO delle cosiddette VARIAZIONI ASSOLUTE), in contrapposizione di VARIAZIONE RELATIVA (cioè dal periodo **i -1** al periodo **i**) presa in considerazione nella [4] (METODO delle cosiddette VARIAZIONI RELATIVE).

[3] Nel caso in cui l'elasticità nei subintervalli precedentemente indicati, risultasse maggiore di 1 (ad es. 1,25), nell'intervallo "complessivo" risulterebbe maggiore di 1,25, perchè, in questo caso, $A'_{i-1} < A^*_{i-1}$.

Il canone relativo al periodo **i**, calcolato col metodo delle variazioni relative, risulta uguale al 25% del canone relativo al periodo **i -1** più il 75% del canone del periodo **i** ottenuto rivalutando del 100% il canone "precedente".
Si potrebbe applicare un terzo metodo, ipotizzando che tra i punti di coordinate A_0 I_{p0} e A''_i I_{p_i} passi una PARABOLA (cfr. § 7). Il termine incognito A''_i si determina, conoscendo il valore dell' ELASTICITA' (= 0,75), in base alla seguente formula :

$$\frac{\log A''_i - \log A_0}{\log I_{Pi} - \log I_{P0}} = \frac{\log A''_i - \log A_0}{\log A'_i - \log A_0} = 0{,}75$$

Quindi

$$\log A''_i = 0{,}25 \log A_0 + 0{,}75 \log A'_i$$

$$A''_i = \sqrt[1]{A_0^{0,25} \; A_i'^{\,0,75}}$$

Quindi A''_i si può considerare come una media geometrica ponderata di A_0 e A'_i, con pesi, rispettivamente, 0,75 e 0,25, e quindi risulta minore di A_i (= media aritmetica ponderata) (cfr. § 8).

11 - Abbiamo precedentemente dimostrato che per **i**, intero, >1, A_i risulta sempre maggiore di A^*_i e tale differenza aumenta sempre di più col trascorrere degli anni. Infatti :

$$A_i - A^*_i = A_0 + A_0 \frac{I_{p\,i} - I_{p\,0}}{I_{p\,0}} 0{,}75 - A^*_{i-1} - A^*_{i-1} \frac{I_{Pi} - I_{Pi-1}}{I_{Pi-1}} \; 0{,}75$$

Ricordando la [2], si può scrivere :

$$A_i - A^*_i = A_{i-1} + A'_{i-1} \frac{I_{p\,i} - I_{p\,i-1}}{I_{p\,i-1}} 0{,}75 - A^*_{i-1} - A^*_{i-1} \frac{I_{Pi} - I_{Pi-1}}{I_{Pi-1}} \; 0{,}75$$

$$= (A_{i-1} - A^*_{i-1}) + 0{,}75 \; \frac{I_{Pi} - I_{Pi-1}}{I_{Pi-1}} \; (A'_{i-1} - A^*_{i-1})$$

Ponendo :

$i = 1$ si ha $A_1 - A^*_1 = 0$

$$i = 2 \;;\; A_2 - A_2^* = (A_1 - A_1^*) + 0{,}75 \frac{I_{p2} - I_{p1}}{I_{p1}} (A_1' - A_1)$$

$$i = 3 \;;\; A_3 - A_3^* = (A_2 - A_2^*) + 0{,}75 \frac{I_{p3} - I_{p2}}{I_{p2}} (A_2' - A_2^*)$$

....

....

$$i = n \;;\; A_n - A_n^* = (A_{n-1} - A_{n-1}^*) + 0{,}75 \frac{I_{pn} - I_{pn-1}}{I_{pn-1}} (A_{n-1}' - A_{n-1}^*)$$

Sommando membro a membro ed eliminando i termini simili si ottiene :

$$A_n - A_n^* = 0{,}75 \sum_{1}^{n-1}{}_i \left(\frac{I_{pi+1} - I_{pi}}{I_{pi}}\right) (A_i' - A_i^*)$$

Quindi $A_n - A_n^*$ risulta uguale al 75% della somma delle differenze fra gli "incrementi" dal tempo **1** al tempo **n** degli affitti indicizzati al 100% e gli "incrementi", sempre dal tempo **1** al tempo **n**, degli affitti indicizzati al 75%, calcolati questi ultimi con il metodo delle VARIAZIONI RELATIVE.

Ipotizzando un tasso annuo costante di inflazione pari ad

$$i \left(= \frac{I_{pi+1} - I_{pi}}{I_{pi}}\right),$$

si può scrivere :

$$A_n - A_n^* = 0{,}75 \; i \sum_{1}^{n-1}{}_i (A_i' - A_i^*)$$

12 - In base al metodo delle cosiddette VARIAZIONI RELATIVE il **grado di indicizzazione effettivo (g)** , che, dopo il secondo anno di locazione (i = 2, 3, n) risulta inferiore a quello "prefissato" (ad es. 75%), si può ottenere dividendo la variazione relativa dell'affitto dal tempo base **(0)** al tempo **i,** per l'analoga variazione dell'indice dei prezzi, che è uguale, come si è visto precedentemente, alla variazione relativa dell'affitto indicizzato al 100%. Cioè

$$g = \frac{A_i^* - A_0}{A_0} : \frac{A_i' - A_0}{A_0} = \frac{A_i^* - A_0}{A_i' - A_0}$$

Questa formula si può considerare come una stima errata per difetto della [1],infatti :

$$\frac{A_i - A_i^*}{A_i' - A_0} + \frac{A_i^* - A_0}{A_i' - A_0} = \frac{A_i - A_0}{A_i' - A_0} = 75\%$$

13- Per chiarire il significato delle formule riportate precedentemente ci sembra utile fare un esempio.

Supponiamo che il proprietario di un negozio lo abbia affittato a L. 500.000 mensili, con decorrenza 1° Settembre 1986 e con scadenza 31 Agosto 1992. Si vuole conoscere il canone mensile per i periodi :

1° Settembre 1987 - 31 Agosto 1988 e 1° Settembre 1988 - 31 Agosto 1989. I calcoli sono riportati nella Tab.4.

TAB.4 - AGGIORNAMENTO IN BASE AL METODO DELLE "VARIAZIONI ASSOLUTE"

Anno e mese	N.indici prezzi al consumo		75% della variazione relativa rispetto al periodo base 0,75(c -1)	Canone mensile aggiornato L. 500.000 + + 500.000 (d)
	base 1985 =100	base set.86 =1		
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1986 Set.	106,7	1,0000		
1987 Set.	112,0	1,0497	0,0373	518.650
1988 Set.	117,4	1,1003	0,0752	537.600

Quindi :

dal 1° Set.1986 al 31 Agosto 1987 : canone mensile L. 500.000 (A_0) ;

dal 1° Set.1987 al 31 Agosto 1988 : canone mensile L. 518.650 (A_1) ;

dal 1° Set.1988 al 31 Agosto 1989 : canone mensile L. 537.600 (A_2) ;

L'aggiornamento relativo al periodo: 1° Set.1988 - 31 Agosto 1989, è stato calcolato moltiplicando il canone base (L. 500.000) per il 75% dell'intera variazione dell'indice ISTAT dal Set. 1986 al Set.1988. Con questo METODO DELLE VARIAZIONI ASSOLUTE (cfr. § 10) si mantiene inalterata nel tempo, così come voluto dal legislatore, la perdita del 25% della svalutazione monetaria. Infatti, la differenza in percentuale fra l'aumento del canone previsto dalla legge, pari a L. 37.600, e l'aumento corrispondente all'integrale recupero della svalutazione pari a L.50.150 (= L.500.000 x 0,1003) risulta effettivamente uguale a

$$-25\% = \frac{37.600 - 50.150}{50.150} = \frac{\Delta A_{i/0}}{\Delta A'_{i/0}} - 1 = \frac{A_i - A_0}{A'_i - A_0} - 1$$

Non conduce, invece, a risultati corretti un altro METODO (delle VARIAZIONI cosiddette RELATIVE) che dopo il secondo anno di locazione, calcola l'aggiornamento moltiplicando il canone corrisposto nel periodo precedente per il 75% della variazione percentuale dell'indice ISTAT verificatesi nel periodo precedente.

In base ai dati ed ai risultati della Tab.4, si ha :

$$A_2^* = 518.650 + 518.650 \frac{117,4 - 112,0}{112} (0,75) = 537.373$$

In questo caso l'aumento del canone (= 37.373) sarebbe inferiore del 25,5% a quello che tiene conto del 100% della svalutazione (= 50.150).

Negli anni successivi, in caso di aumento dell'indice ISTAT, tale perdita diventerebbe sempre più consistente.

In entrambi i metodi per ottenere la variazione relativa dei prezzi abbiamo considerato il numero indice relativo ad una determinato mese (Set. nella Tab.4) e lo abbiamo diviso per quello dello stesso mese, dell'anno precedente o di un determinato anno (anno base), cioè abbiamo utilizzato un COEFFICIENTE DI INFLAZIONE TENDENZIALE su base annuale, biennale, triennale, ecc., sottraendo poi dal risultato l'unità.

In base ai dati della Tab. 4, applicando il TERZO METODO (cfr.§ 10) si ottiene:

$$\log A''_i = 0,25 \log 500.000 + 0,75 \log 550.150$$

e risolvendo, si ha : $A''_i = 537.155$, inferiore, come era da attendersi, ad $A_i = 537.600$.

14 - Abbiamo precedentemente visto che la differenza $A_n - A_n^*$ aumenta sempre di più col trascorrere degli anni.

Ciò risulta confermato dalla Tab.5 dove, per semplicità, supponendo un canone mensile iniziale di L.100.000 ed un aumento costante dei prezzi negli anni pari al 10%, si rileva che la differenza fra i canoni determinati in base ai due criteri (colonne **d** ed **e** dellaTab 5), si accentua col passare degli anni. (col.**f**, Tab.5)

I risultati della Tab.5 si possono ottenere anche in base al seguente ragionamento.

Indicando con

$$i \left(= \frac{I_{p_i} - I_{p_{i-1}}}{I_{p_{i-1}}} \right)$$

il tasso annuo **costante** d'inflazione, con

$$(1+i) = \frac{I_{p_i}}{I_{p_{i-1}}} \quad \text{(numero indice a base mobile)}$$

il corrispondente coefficiente annuo d'inflazione, nel caso di indicizzazione al 100%, ipotizzando, per semplicità, un canone mensile iniziale di L.1 (A_0=1)

Dopo 1 anno di locazione (cfr.Tab.n.5) tale canone mensile sarà uguale a :

$$A_1' = (1 + i)$$

Dopo il secondo anno di locazione :

$$A_2' = (1 + i)(1 + i) = (1 + i)^2$$

Dopo l'ennesimo anno di locazione :

$$A_n' = (1+i)^n$$

Quest'ultima espressione si può considerare come il prodotto di **n** indici a base mobile, uguale al numero indice a base fissa relativo al periodo **n**, con base : periodo iniziale = 1

Di conseguenza $(1+i)^n - 1$ = "incremento" rispetto al canone iniziale

Nel caso di indicizzazione parziale, ad es. al 75%, calcolata col metodo delle variazioni assolute, l'incremento, rispetto al canone base (=1), dopo l'ennesimo anno di locazione, risulterà uguale a :

$$A_0 \left(\frac{I_{pn} - I_{p0}}{I_{p0}}\right) 0{,}75 = A_0 \left(\frac{I_{pn}}{I_{p0}} - 1\right) 0{,}75 = [(1+i)^n - 1]0{,}75 =$$

$$= 0{,}75\,(A'_n - 1)$$

Nel caso di indicizzazione parziale, ad. es. al 75%, calcolata col metodo delle variazioni relative, avremo :

$A^*_1 = 1+0{,}75\,i$ (canone mensile dopo 1 anno di locazione) ;

$A^*_2 = 1 + 0{,}75i + (1+0{,}75i)\,0{,}75\,i = (1 + 0{,}75\,i)\,(1+ 0{,}75i) = (1+0{,}75i)^2$ (canone dopo il secondo anno di locazione) ;

$A^*_n = (1+0{,}75i)^n$ (canone dopo l'n-simo anno di locazione) e di conseguenza $(1+0{,}75i)^n - 1$ ("incremento" rispetto al canone iniziale)

In base ai dati riportati nella Tab.5, si ottengono, dopo 5 anni di locazione, i seguenti "incrementi" del canone mensile :

$100.000\,(1+0{,}10)^5 - 100.000 = 61.051$ (indicizz.al 100%) ;

$61.051(0{,}75) = 45.788$ (indicizz. al 75% : metodo var.assolute) ;

$100.000\,[1 + 0{,}10(0{,}75)]^5 - 100.000 = 43.563$ (indicizz. al 75% : metodo var. relative)

15 - Concludendo, si può affermare che quando la misura dell'elasticità risulta prefissata, bisogna riferirla, affinchè rimanga costante nel tempo, all'intero periodo a cui si riferisce il fenomeno considerato ; tenendo presente che il limite inferiore di tale periodo rimane fisso (nell'es. della Tab.4 : Set.1986) mentre il limite superiore varia col passare del tempo (METODO VARIAZIONI ASSOLUTE). Applicando tale metodo il canone parzialmente indicizzato si può esprimere come una media aritmetica ponderata del canone iniziale (base) e di quello indicizzato al 100% relativo al periodo di volta in volta considerato, con pesi, rispettivamente, il complemento a 1 del grado di indicizzazione ed il grado di indicizzazione stesso.

La media aritmetica dei canoni parzialmente indicizzati (ad es., 75%) con tale metodo, si può ottenere aggiungendo al 25% del canone base il 75% della media aritmetica dei canoni indicizzati al 100%.

Lo scostamento medio dalla media aritmetica di tali canoni parzialmente indicizzati, risulta uguale al 75% dello scostamento medio dei canoni indicizzati al 100%.

Ipotizzando un aumento costante dei prezzi nei vari anni, l'incremento rispetto al canone base, dopo l'ennesimo anno di locazione, risulterà uguale al 75% dell'incremento che si può ottenere con l'indicizzazione al 100% del canone di locazione.

Il grado di indicizzazione (ad es., 75%), che coincide con la misura prefissata dell'elasticità (METODO VARIAZIONI ASSOLUTE), si può scomporre in due parti : la prima ci fornisce il grado di indicizzazione effettivo (ad es., < 75%), ottenuto con il metodo delle VARIAZIONI RELATIVE ; la seconda ci fa conoscere la differenza fra il grado di indicizzazione prefissato (75%) e quello ottenuto con il metodo precedente (<75%), tale differenza aumenta sempre di più a mano a mano che ci si allontana dal periodo base ed al crescere dell'inflazione.

Una misura prefissata dell'elasticità ci viene fornita, oltre che in materia di EQUO CANONE, anche nella determinazione delle "PENSIONI" e dell'INDENNITA' DI CONTINGENZA, finchè questa è rimasta in vigore. Infatti la legge 730/83 prevede, fra l'altro, che le PENSIONI di importo fra il doppio ed il triplo del "minimo", aumentino in misura pari al 90% dell'incremento registrato dall'indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai ed impiegati; quelle superiori al triplo, in misura pari al 75%.

L'"ultimo" sistema di adeguamento retributivo al costo della vita (Legge 38/86) prevedeva, quando entrò in vigore, la indicizzazione al 100% di una somma mensile, uguale per tutti, di L. 580.000 ed al 25% della quota di retribuzione mensile eccedente tale parte.

Tab. 5

Periodo (i) (a)	Indice prezzi (b)	Canone completamente indicizzato (c)	Canone indicizzato al 75% (d)	Canone indicizzato a ≤ 75%(criterio errato vedi col.g) (e)	$A_i - A_i^*$ (d) - (e) (f)	$\frac{(e) - 100.000}{(c) - 100.000}$ (4) (g)
0	100 =(I_{p_o})	100.000	100.000 =(A_0)			
1	110	110.000	107.500	107.500		75%
2	121	121.000	115.750	115.562(=A_2^*)	187[2]	74,1%
3	133,1	133.100	124.825	124.230	595[3]	73,2%
4	146,41	146.410	134.808	133.547	1261	72,3%
5	161,051	161.051[1]	145.788[1]	145.563	2225	71,4%

(1) $\frac{A_i - A_o}{A_i' - A_o} \times 100 = \frac{45.788}{61.051} \times 100 = 75$

(2) $187 = 0{,}75 \left(\frac{121 - 110}{110}\right) (110.000 - 107.500)$

(3) $595 = 187 + 0{,}75 \left(\frac{133{,}1 - 121}{121}\right) (121.000 - 115.562)$

(4) $\frac{A_i^* - A_0}{A_i' - A_0} = g$ (GRADO DI INDICIZZAZIONE EFFETTIVO)

BIBLIOGRAFIA

DALTON, *The inequality of incomes*, London, 1920.

GUIDOTTI S., *Il metodo Moore-Shultz per la rilevazione statistica delle curve di domanda.* "Atti della VI e VII Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica", Roma, 1943.

MARSHALL A., *Principi di Economia*, UTET, Torino, 1959.

RICCI U., *Elasticità dei bisogni, della domanda e dell'offerta.* "Giornale degli Economisti", 1924.

VINCI F., *L'elasticità dei consumi*, in "Analisi Economiche", Bologna, 1940, vol.I

- *Sui fondamenti della dinamica economica.* "Rivista Italiana di Statistica Economica e Finanziaria", 1930.

- *La derivazione statistica delle curve di domanda.* Ibid., 1931 (nota critica).