Report n.66

Soluzioni efficienti e condizioni di ottimalità nell'ottimizzazione vettoriale

(Relazione invitata Scuola Ciro, ottobre 1992)

Laura MARTEIN

Pisa, dicembre 1992
Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 60%)

SOLUZIONI EFFICIENTI E CONDIZIONI DI OTTIMALITA' NELL'OTTIMIZZAZIONE VETTORIALE

(Relazione invitata Scuola Ciro , Ottobre 1992)

L. Martein
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia
Universita' di Pisa, Via Ridolfi 10, 56100 - Pisa

1. Introduzione e Preliminari

La programmazione multiobiettivo, detta anche programmazione vettoriale, data la sua origine storica nel 1896 quando l'economista Pareto in [15] introdusse il concetto di soluzione di compromesso.
Solo negli anni '50, dopo la pubblicazione dei lavori di Kuhn e Tucker [10] e di Deubreu [7], l'ottimizzazione vettoriale e' stata riconosciuta come disciplina matematica. Nell'ultimo trentennio, parallelamente all'avvento dei calcolatori, la programmazione multiobiettivo ha avuto un rapido sviluppo dovuto anche all'esigenza di descrivere problemi reali nei quali la complessita' delle tematiche trattate porta necessariamente a considerare, nel processo di ottimizzazione, vari obiettivi generalmente in conflitto tra di loro. Cosi' ad esempio in un problema di selezione del portafoglio e' naturale considerare come obiettivi la massimizzazione del profitto e dei dividendi e, al tempo stesso, la minimizzazione del rischio di investimento e degli scostamenti da certi fini prefissati.
Sono disponibili oggi molti testi sull'ottimizzazione vettoriale, quasi tutti orientati alle applicazioni (Multicriteria Decision Making); pochi di essi offrono uno studio sistematico degli aspetti teorici [9,11,17], che sono invece il principale oggetto di questo lavoro
Molte ricerche relative alla programmazione multiobiettivo apparse negli ultimi anni hanno affrontato e sviluppato le principali tematiche

dell'ottimizzazione scalare (condizioni di esistenza delle soluzioni, condizioni di ottimalita', regolarita', dualita').

Nell'ampia scelta degli argomenti da trattare abbiamo ritenuto opportuno presentare quei risultati, in parte presi dalla letteratura e in parte dovuti a contributi personali, che, a nostro parere, sono da considerarsi una base teorica essenziale per coloro che intendessero indirizzare le proprie ricerche nel campo dell'ottimizzazione vettoriale.

Per meglio comprendere ed inquadrare i risultati e le generalizzazioni che saranno presentate nei successivi paragrafi, si consideri innanzitutto il classico problema di ottimizzazione secondo Pareto:

$$P_P : \quad \max \ F(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_s(x)),\ x \in S \subset Z$$

dove $f_i : Z \to \mathbf{R}$, $i= 1, \ldots\ldots, s$ sono funzioni definite su un sottoinsieme aperto Z di $\mathbf{R}^n$.

Ricordiamo che un elemento $x_0 \in S$ e' detto soluzione ottima (efficiente) secondo Pareto del problema P_P se e solo se

$$\nexists\ x \in S\ : f_i(x) \geq f_i(x_0) \quad i=1, \ldots, s \qquad (1.1)$$

dove almeno una delle disuguaglianze e' verificata in senso stretto.

Si osservi che tale definizione e' equivalente ad affermare che se per un certo $x \in S$ e per un certo indice i risulta $f_i(x) > f_i(x_0)$, allora necessariamente deve esistere un indice j tale che $f_j(x) < f_j(x_0)$.

Si perviene cosi' al seguente significato di soluzione ottima paretiana :

x_0 e' un ottimo paretiano se in corrispondenza di esso "non e' possibile migliorare una funzione obiettivo senza al tempo stesso peggiorarne un'altra".

Osserviamo che la (1.1) puo' essere cosi' espressa :

$$\nexists\ x \in S\ : \quad F(x) \geq F(x_0) \qquad (1.2)$$

dove il simbolo $\geq$ significa che le disuguaglianze sono del tipo $\geq$ con almeno una che vale in senso stretto.

Denotato con $U= \mathbf{R}^s_+ = \{ (y_1,\ldots, y_s) : y_i \geq 0\ , i=1,\ldots,s\}$, sia $U^0= \mathbf{R}^s_+ \setminus \{0\}$;

la (1.2) puo' essere riscritta nel seguente modo : $\nexists\ x \in S : F(x) \in F(x_0)+U^0$ ovvero equivalentemente :

$$F(S) \cap (F(x_0) + U) = \{F(x_0)\} \qquad (1.3)$$

Pur essendo la (1.2) e la (1.3) equivalenti tra loro, la (1.3) appare piu' idonea per studiare l'efficienza di un punto x_0 in quantoche' essa si riconduce allo studio dell'intersezione tra due insiemi di cui uno e' un cono preassegnato, studio che sotto opportune ipotesi puo' risultare piu' agevole.
Poiche' nella (1.3) sono coinvolti un insieme, un punto ed un cono, si puo' condurre uno studio piu' generale atto a determinare l'esistenza di un punto efficiente di un insieme $X \subset \mathbf{R}^s$ rispetto ad un cono assegnato $U \subset \mathbf{R}^s$ cosi' definito:
un punto x_0 e' detto <u>efficiente</u> per l'insieme X rispetto al cono U se

$$X \cap (x_0 + U) = \{x_0\} \tag{1.4}$$

L'insieme dei punti efficienti di X rispetto al cono U sara' denotato con E(X,U).
La tematica relativa all'esistenza e alla generazione dei punti efficienti di un insieme rispetto ad un cono sara' affrontata nei paragrafi 2, 3 e 4. I risultati ottenuti permetteranno di studiare l'esistenza e la generazione di punti efficienti per un problema di estremo vettoriale.
Infine nel paragrafo 7 verranno presentate varie condizioni di ottimalita' del primo ordine sia in ipotesi di differenziabilita' che di non differenziabilita' della funzione obiettivo e verra' sottolineato il ruolo della concavita' generalizzata nell'ottimizzazione vettoriale.
Al fine di rendere autonomo questo lavoro, riportiamo le seguenti definizioni e proprieta' relative ad un cono [17]:
- un sottoinsieme U di $\mathbf{R}^s$ e' un <u>cono</u> se $u \in U$ implica $\alpha u \in U \ \forall \ \alpha \geq 0$;
- un cono U e' <u>convesso</u> se e' convesso come insieme o, equivalentemente, se $\forall u_1, u_2 \in U$ si ha $u_1 + u_2 \in U$;
- un cono U e' detto <u>puntato</u> se non contiene rette ovvero se $-u \notin U$ quando $u \neq 0$ e $u \in U$;
- un cono e' detto <u>acuto</u> se esiste un semispazio aperto passante per l'origine che lo contiene, ovvero se esiste $\alpha \in \mathbf{R}^s$ tale che

$$\mathrm{cl}U \subset \{x \in \mathbf{R}^s \setminus \{0\} : \alpha^t x > 0\} \cup \{0\}.$$

Valgono le seguenti proprieta':
- un cono acuto e' anche puntato;
- se U e' un cono convesso, allora U e' acuto se e solo se clU e' puntato.

Denotato con U^* il polare positivo di U ovvero l'insieme
$U^*=\{\alpha\in \mathbf{R}^s: \alpha^t u\geq 0, \forall u\in U\}$, si ha che:
- $\text{int}U^*\neq\emptyset$ se e solo se U e' acuto;
- se U e' acuto allora $\text{int}U^*=\{\alpha\in \mathbf{R}^s: \alpha^t u>0, \forall u\in \text{cl}U\setminus\{0\}\}$.

La seguente proprieta' esprime un Teorema di separazione tra coni :

Proprieta'1.1

Sia V un cono convesso chiuso di $\mathbf{R}^s$ ed U un cono convesso chiuso e puntato di $\mathbf{R}^s$. Se $V\cap U=\{0\}$ allora esiste $\alpha\in \text{int}U^*$ tale che $\alpha^t u>0$ $\forall u\in U\setminus\{0\}$, $\alpha^t v\leq 0$ $\forall v\in V$.

2. Insiemi compatti, chiusi e limitati rispetto ad un cono

Dato un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbf{R}^s$, si pone il problema della esistenza di soluzioni efficienti di X rispetto ad un assegnato cono U di $\mathbf{R}^s$.

Per meglio comprendere lo scopo, le motivazioni e i tipi di risultati che saranno presentati in questo paragrafo, premettiamo il seguente Lemma, che fornisce condizioni sufficienti per l'esistenza di tali soluzioni :

Lemma 2.1.

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$ e U un cono convesso ed acuto di $\mathbf{R}^s$.

i) Se esiste $x_0\in X$ tale che l'insieme $(x_0+\text{cl}U)\cap X$ e' compatto, allora $E(X,U)\neq\emptyset$.

ii) Se esiste $y_0\in X-\text{cl}U$ tale che l'insieme $(y_0+\text{cl}U)\cap(X-\text{cl}U)$ è compatto, allora $E(X,U)\neq\emptyset$.

<u>dim</u>.

i) Poiche' U è un cono acuto, esiste $\alpha\in\mathbf{R}^s$ tale che $\alpha^t c>0$, $\forall c\in \text{cl}U\setminus\{0\}$. Si consideri il problema lineare max $\alpha^t x$, $x\in(x_0+\text{cl}U)\cap X$ e sia x^* una soluzione ottima, soluzione certamente esistente in quanto la funzione obiettivo è continua e definita su un compatto.

Dimostriamo che $x^*\in E(X,\text{cl}U)$.

Se, per assurdo cosi' non fosse, esisterebbero $z \in X$ e $c_1 \in clU \setminus \{0\}$ tali che $z = x^* + c_1$; d'altra parte poiche' $x^* \in (x_0 + clU)$, si ha $x^* = x_0 + c_2$ con $c_2 \in clU$, da cui $z = (x_0 + c_2) + c_1 = x_0 + c$ con $c = c_2 + c_1 \in clU$ per la convessita' del cono U. Di conseguenza, tenuto conto che $\alpha^t c > 0$ essendo U acuto, si ha

$$z \in (x_0 + clU) \cap X \text{ con } \alpha^t z = \alpha^t(x^* + c) = \alpha^t x^* + \alpha^t c > \alpha^t x^*$$

e cio' contraddice l'ottimalita' di x^* rispetto al problema lineare considerato.

La tesi segue dal fatto che $E(X,clU) \subset E(X,U)$.

ii) Dalla dimostrazione effettuata in i) si ha che $E(X\text{-}clU,clU) \neq \emptyset$. Proviamo ora che $E(X\text{-}clU,clU) \subset X$. Sia $z \in E(X\text{-}clU,clU)$; posto $z = x - c$, $x \in X$, $c \in clU$, si ha $x = z + c$ da cui $x \in z + clU$, $x \in X \subset X\text{-}clU$, e cio' contraddice l'efficienza di z se $c \neq 0$. Ne consegue che $c = 0$ e $z \in X$.

Poiche' $(z+clU) \cap X \subset (z+clU) \cap (X\text{-}clU) = \{z\}$ e $z \in (z+clU) \cap X$, si ha $z \in E(X,clU)$. La tesi segue dal fatto che $E(X,clU) \subset E(X,U)$.

♦

Abbiamo visto che la compattezza dell' insieme $(x_0 + clU) \cap X$ e dell'insieme $(x_0 + clU) \cap (X - clU)$ è sufficiente a garantire l'esistenza di punti efficienti per l'insieme X; allo scopo di determinare condizioni necessarie e/o sufficienti che garantiscano tale compattezza, è utile introdurre il concetto di insieme compatto, di insieme chiuso e di insieme limitato rispetto ad un cono assegnato.

Valgono al riguardo le seguenti definizioni :

Def. 2.1

Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Diremo che X è <u>U-compatto</u> se l'insieme $(x + clU) \cap X$ è compatto $\forall x \in X$.

Def. 2.2

Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Diremo che X è <u>U-chiuso</u> se l'insieme X-clU è chiuso.

Def. 2.3

Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Diremo che X è <u>U-limitato</u> se $X^+ \cap clU = \{0\}$, dove X^+ è il cono di recessione definito nel seguente modo:

$$X^+ = \{\, x \in \mathbf{R}^s : \exists\ \alpha_k \to 0,\ \alpha_k > 0,\ \{x^k\} \subset X : \alpha_k x^k \to x \,\}.$$

Def. 2.4
Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Diremo che X è <u>L-limitato</u> se $(x + \mathrm{cl}U) \cap X$ è limitato $\forall\, x \in X$.

<u>Osservazione 2.1</u>
E' evidente che un insieme compatto è anche U-compatto rispetto ad ogni cono U. Per quanto riguarda il cono di recessione X^+, si osservi che $X^+=\{0\}$ se e solo se X è un insieme limitato ; inoltre X^+ coincide con il cono di recessione O^+X introdotto in [16] quando X e' un insieme chiuso e convesso, essendo $O^+X= \{ v \in \mathbf{R}^s : x+tv \in X , x \in X , t>0\}$.

Per meglio chiarire le definizioni 2.2 e 2.3, si osservi che la chiusura di X non implica la chiusura di X-clU e viceversa, come mostrano i seguenti esempi:
<u>Esempio 2.1</u>
Sia $X = \{ (x,y) : xy=-1 , x<0 \}$ e $U= \mathbf{R}^2_+$. E' immediato verificare che X è chiuso, mentre l'insieme $X\text{-cl}U = \{(x,y) : x < 0 \}$ non è chiuso.
<u>Esempio 2.2</u>
Sia $X = \{ (x,y) : x^2+ y^2 <1 \} \cup \{ (x,y) : x^2+ y^2 =1 , x \geq 0, y \geq 0\}$ e $U=\mathbf{R}^2_+$. E' facile verificare che X non è chiuso, mentre è chiuso l'insieme X-clU.

Una condizione sufficiente affinche' la chiusura di X implichi la chiusura di X-clU è espressa dal seguente teorema che evidenzia al tempo stesso la motivazione della definizione data di U-limitatezza.

Teorema 2.1
Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Se X è chiuso e U-limitato, allora X è U-chiuso.
<u>dim</u>.
Si deve dimostrare che se la successione $\{ x^k\text{-}c^k\} \subset X\text{-cl}U$ converge ad un elemento x^*, allora $x^* \in X\text{-cl}U$. Se $\{x^k\}$ è una successione limitata, essa ammette una sottosuccesione convergente che, senza ledere la generalita', possiamo supporre essere la successione stessa; d'altra parte $x^k \to x$ implica necessariamente $c^k \to c= x-x^*$, da cui $x^*=x-c \in X\text{-cl}U$.

Se $\{x^k\}$ non è limitata, ovvero se $\| x^k \| \to +\infty$, tenuto conto che $(x^k - c^k) \to x^*$, si ha $\frac{x^k - c^k}{\|x^k\|} \to 0$. Poiche' $\frac{x^k}{\|x^k\|}$ sono elementi della sfera unitaria, possiamo supporre che essa converga ad un elemento x che necessariamente appartiene a X^+ ; d'altra parte $\frac{c^k}{\|x^k\|} \to x$ con $\frac{c^k}{\|x^k\|} \in clU$ e quindi $x \in clU$.

Ne consegue che $x \in X^+ \cap clU$ contro l'ipotesi.

♦

Corollario 2.1.

Un insieme X compatto è U-chiuso rispetto ad ogni cono U.

dim.

Basta osservare che la limitatezza di X implica $X^+ = \{0\}$ e quindi $X^+ \cap clU = \{0\}$, dopodiche' la tesi segue dal Teorema 2.1.

♦

Vediamo adesso la relazione esistente tra insiemi L-limitati ed insiemi U-limitati. Il seguente teorema dimostra che la classe degli insiemi U-limitati è contenuta in quella degli insiemi L-limitati, mentre l'esempio 2.3 evidenzia che tale inclusione è propria.

Teorema 2.2

Sia U un cono di $\mathbf{R}^s$. Se X è un insieme U-limitato, allora X è L-limitato.

dim.

Supponiamo per assurdo che $\exists\ x_0 \in X$ tale che $(x_0 + clU) \cap X$ non sia limitato, ovvero che esista una successione $\{x^k\} \subset (x^0 + clU) \cap X$ con $x^k = x_0 + c^k$, $c^k \in U\ \forall k$, tale che $\|x^k\| \to +\infty$. La successione $\{\frac{x^k}{\|x^k\|}\}$ ammette una sottosuccessione convergente che, senza ledere la generalita', possiamo supporre essere la successione stessa, per cui $\frac{x^k}{\|x^k\|} \to x^* \in X^+$.

Dalla relazione $\frac{x^k}{\|x^k\|} = \frac{x_0}{\|x^k\|} + \frac{c^k}{\|x^k\|}$, tenuto conto che $\frac{x_0}{\|x^k\|} \to 0$ e $\frac{c^k}{\|x^k\|} \in clU$ si ha che $\{\frac{c^k}{\|x^k\|}\}$ converge a x^*, e quindi $x^* \in clU$. Di conseguenza $x^* \in X^+ \cap clC$ e cio' contraddice l'ipotesi.

♦

Esempio 2.3

Sia $X =\{ (x,y) : xy=1, x>0\}$ e $U= \mathbf{R}^2_+$. E' facile verificare che X è L-limitato, mentre non è U-limitato in quanto $(1,0),(0,1) \in X^+ \cap clU \neq \{0\}$.

Come abbiamo visto, la L-limitatezza è una condizione piu' debole della U-limitatezza, nel senso che quest'ultima implica la prima ma non viceversa; esistono tuttavia classi di insiemi rispetto alle quali la L-limitatezza è equivalente alla U-limitatezza. Valgono al riguardo i seguenti risultati:

Teorema 2.3.

Sia X un insieme convesso e U un cono di $\mathbf{R}^s$. Allora X è L-limitato se e solo se X è U-limitato.

dim.

Tenuto conto del Teorema 2.2, si deve dimostrare che la L-limitatezza implica la U-limitatezza.

Supponiamo per assurdo che $\exists\ u \in X^+ \cap clU$, $u \neq 0$. Poiche' per la convessita' di X si ha $X^+ \subset (clX)^+ = O^+(clX)$, la semiretta $x= x_0+tu$, $t \geq 0$, $x_0 \in X$, e' contenuta in clX (vedi osservazione 2.1) e, d'altra parte, e' contenuta anche in $(x_0+ clU)$; ne consegue che l'insieme $(x_0+ clU) \cap clX$ non e' limitato e cio' comporta anche la non limitatezza dell'insieme $(x_0+clU) \cap clX$ contro l'ipotesi.

♦

Una classe di insiemi che sono L-limitati e U-limitati e' quella rappresentata dagli insiemi superiormente limitati rispetto al cono U cosi' definiti :

Def. 2.5

Diremo che X e' un insieme superiormente limitato (rispetto ad un cono U) se $\exists\ a \in \mathbf{R}^s$ tale che $X \subset a-clU$.

Osservazione 2.2

La definizione 2.5 e' stata usata in [17] in luogo della U-limitatezza; essa coincide, nel caso in cui X e' un sottoinsieme dei numeri reali e $U= \mathbf{R}_+$, con l'usuale definizione di insieme superiormente limitato.

Quando U = $\mathbf{R}^s_+$ (cono paretiano), la definizione data equivale a richiedere che $x_i \leq M$, i=1,...,s , $\forall$ x = (x_1,...., x_s)$\in$ X.

Il seguente Teorema stabilisce che un insieme superiormente limitato e' sia U-limitato che L-limitato rispetto ad un cono U acuto, e, di conseguenza, fornisce una condizione sufficiente a garantire la L-limitatezza.

Teorema 2.4
Sia U un cono acuto di $\mathbf{R}^s$ ed X un insieme superiormente limitato . Allora X e' U-limitato ed L-limitato .
<u>dim</u>.
A norma del Teorema 2.2, e' sufficiente dimostrare che X e' U-limitato. Se cosi' non fosse, esisterebbe una successione $\{x^k\}\subset X$, con $\|x^k\| \to +\infty$ tale che $\frac{x^k}{\|x^k\|} \to x^* \in X^+ \cap \mathrm{cl}U$. Poiche' $X \subset a\text{-}\mathrm{cl}U$, si ha $x^k = a - c^k$, $c^k \in \mathrm{cl}U$ da cui $\frac{x^k}{\|x^k\|} = \frac{a}{\|x^k\|} - \frac{c^k}{\|x^k\|}$; di conseguenza, tenuto conto che $\frac{a}{\|x^k\|} \to 0$, si ha $\frac{c^k}{\|x^k\|} \to -x^*$. D'altra parte $\frac{c^k}{\|x^k\|} \in \mathrm{cl}U$ cosicche' $-x^* \in \mathrm{cl}U$ e cio' e' assurdo in quanto $x^* \in \mathrm{cl}U$ e clU e' puntato essendo il cono U acuto .

♦

<u>Osservazione 2.3</u>
La tesi del Teorema precedente e' falsa se si considera un cono U puntato anziche' acuto.
Si consideri ad esempio il cono $U=\{(x,y): y>0\} \cup \{(x,y): y=0, x \geq 0\}$ e l'insieme $X= \{(x,y): y=0\}$. Si ha $X \subset 0\text{-}\mathrm{cl}U$ ed $(1,0) \in X^+ \cap \mathrm{cl}U$.
Appare dunque non corretta l'asserzione riportata nel Remark 3.2.4, pag.53 di [18].
<u>Osservazione 2.4</u>
Si osservi che un insieme L-limitato non e' in generale superiomente limitato come si puo' verificare considerando l'insieme X e il cono U definiti come nell'esempio 2.3.

Vediamo adesso le relazioni intercedenti tra insiemi U-chiusi, U-limitati, L-limitati e U-compatti.

Iniziamo a dimostrare il seguente Teorema:

Teorema 2.5
Sia X un insieme chiuso e U un cono di $\mathbf{R}^s$. Allora X e' L-limitato se e solo se X e' U-compatto.
dim.
Poiche' l'insieme $(x+ \mathrm{cl}U) \cap X$ e' chiuso $\forall x \in X$ in quanto intersezione di chiusi, tale insieme risulta compatto se e solo se X e' L-limitato.

♦

Corollario 2.2
Sia X un insieme chiuso e U un cono di $\mathbf{R}^s$. Se X e' U-limitato, allora X e' U-compatto.
dim.
Segue immediatamente dai Teoremi 2.2 e 2.5.

♦

Osserviamo che, per gli insiemi chiusi, la U-compattezza non e' equivalente alla U-limitatezza a differenza di quanto accade per la L-limitatezza, come si puo' dedurre considerando l'insieme X e il con U definiti nell'esempio 2.3; il Teorema seguente fornisce una condizione sufficiente affinche' si abbia detta equivalenza :

Teorema 2.6
Sia X un insieme chiuso e convesso e U un cono di $\mathbf{R}^s$. Allora X e' U-limitato se e solo se X e' U-compatto.
dim.
Segue immediatamente dai Teoremi 2.3 e 2.5.

♦

E' facile verificare che l'insieme X descritto nell'esempio 2.2 e' U-chiuso e U-limitato ma non e' U-compatto; il Teorema 2.6, tenuto conto del Teorema 2.1, individua, comunque, una classe di insiemi per i quali le ipotesi di U-chiusura e di U-limitatezza sono equivalenti all'ipotesi di U-compattezza. Si ritrova cosi' come caso particolare il seguente Teorema riportato in [18]:

Teorema 2.7
Sia U un cono convesso chiuso e puntato di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme convesso e chiuso di $\mathbf{R}^s$. Allora X e' U-chiuso e U-limitato se e solo se X e' U-compatto.

Come abbiamo gia' osservato, un insieme X che e' U-chiuso e U-limitato non e', se non per particolari classi di insiemi, U-compatto; tuttavia, come ora vedremo, tali ipotesi implicano che l'insieme X-clU e' U-compatto.

Teorema 2.8
Sia U un cono convesso acuto di $\mathbf{R}^s$ ed X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Se X e' U-chiuso e U-limitato allora X- clU e' U-compatto.
dim.
Si deve dimostrare che l'insieme $X^*(x_0)= (x_0+ \mathrm{cl}U) \cap (X- \mathrm{cl}U)$ e' compatto $\forall x_0 \in X\text{-cl}U$. Poiche' X e' U-chiuso, $X^*(x_0)$ e' chiuso in quanto intersezione di chiusi; resta da provare la limitatezza di $X^*(x_0)$.
Se $X^*(x_0)$ non e' limitato, esistono le successioni $\{c^k\} \subset \mathrm{cl}U$, $\{x^k\} \subset X$, $\{u^k\} \subset \mathrm{cl}U$ tali che $x_0+c^k = x^k-u^k$ con $\|c^k\| \to +\infty$. Risulta $x^k= x_0 +c^k+u^k$; iniziamo a dimostrare che $\|x^k\| \to +\infty$. Essendo U acuto, esiste $\alpha \in \mathbf{R}^s$ tale che $\alpha^t c > 0$, $\forall c \in \mathrm{cl}U \setminus \{0\}$.
Poniamo $\bar{c}^k = \frac{c^k}{\| c^k \|}$, $\bar{u}^k = \frac{u^k}{\| u^k \|}$; si ha $\bar{c}^k, \bar{u}^k \in S \cap \mathrm{cl}U$ dove S e' la sfera unitaria di centro l'origine. Poiche' la funzione lineare $\alpha^t c$ ammette minimo sull'insieme compatto $S \cap \mathrm{cl}U$, posto $\beta=\alpha^t c^0 = \min \alpha^t c$, $c \in S \cap \mathrm{cl}U$, si ha ovviamente $\beta>0$. Risulta
$\alpha^t x^k=\alpha^t(x_0+c^k+u^k)=\alpha^t x_0+\alpha^t \bar{c}^k\|c^k\|+\alpha^t \bar{u}^k \|u^k\| \geq \alpha^t x_0+\beta(\|c^k\|+\|u^k\|) \to +\infty$
e, di conseguenza, $\|x^k\| \to +\infty$. Si consideri adesso la successione $\{\frac{x^k}{\|x^k\|}\}$ che ammette una sottosuccessione convergente che possiamo supporre essere la successione stessa.
Si ha $\frac{x^k}{\|x^k\|} \to x^* \in X^+$; d'altra parte $\frac{x^k}{\|x^k\|} = \frac{x_0}{\|x^k\|} + \frac{c^k + u^k}{\|x^k\|}$ con $\frac{c^k + u^k}{\|x^k\|}$ $\in \mathrm{cl}U$ per la convessita' di U e, di conseguenza, $\frac{c^k + u^k}{\|x^k\|} \to x^* \in \mathrm{cl}U$.
Quindi $x^* \in X^+ \cap \mathrm{cl}U$ contro l'ipotesi di U-limitatezza.

♦

I seguenti diagrammi riassumono lo studio effettuato sulle relazioni intercorrenti tra insiemi L-limitati, U-limitati e U-compatti.

X chiuso.

$$\begin{tikzcd}
\text{X e' L-limitato} \arrow[rr, shift left] & & \text{X e' U-compatto} \arrow[ll, shift left] \\
& \text{X e' U-limitato} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

diagramma 1

Si osservi che l'esempio 2.3 dimostra che la L-limitatezza e/o la U-compattezza non implicano la U-limitatezza.

X chiuso e convesso.

$$\begin{tikzcd}
\text{X e' L-limitato} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{X e' U-compatto} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{X e' U-limitato} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

diagramma 2

3. Sulla esistenza di punti efficienti

I risultati ottenuti nel precedente paragrafo, relativi alla U-compattezza degli insiemi X e X-clU, permettono tramite il Lemma 2.1 di ottenere varie condizioni di esistenza di punti efficienti espresse nel seguente teorema :

Teorema 3.1

Sia U un cono convesso acuto di $\mathbf{R}^s$ e sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. L'insieme E(X,U) dei punti efficienti di X rispetto al cono U e' diverso dal vuoto quando e' verificata almeno una delle seguenti condizioni :

i) X e' U-compatto;
ii) X e' U-chiuso e U-limitato;
iii) X e' U-chiuso e superiormente limitato;
iv) X e' chiuso e L-limitato;
v) X e' chiuso e U-limitato;
vi) X e' chiuso e superiormente limitato.

dim.

i) Segue dalla i) del Lemma 2.1.
ii) Segue direttamente dal Teorema 2.8 e dalla ii) del Lemma 2.1.
iii) Segue dalla ii) tenuto conto del Teorema 2.4.
iv) Segue dalla i) tenuto conto del Teorema 2.5.
v) Segue dalla i) tenuto conto del Corollario 2.2.
vi) Segue dall v) tenuto conto del Teorema 2.4.

♦

Abbiamo gia' osservato che la L-limitatezza e' una condizione piu' generale della U-limitatezza; in particolare le condizioni di U-chiusura e di L-limitatezza per un insieme X non implicano, in generale (vedi Esempio 2.3), che l'insieme X-clU sia U-compatto.
Tuttavia per un insieme U-chiuso e L-limitato si puo' ancora stabilire l'esistenza di punti efficienti come mostra il seguente Teorema:

Teorema 3.2

Sia U un cono convesso chiuso e puntato di $\mathbf{R}^s$ e sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$. Se X e' U-chiuso e L-limitato allora $E(X,U)\neq\emptyset$.

dim.

Basta dimostrare che l'insieme $X^*(x_0)= (x_0+ \mathrm{cl}U) \cap (X- \mathrm{cl}U)$, $x_0 \in X$ che e' chiuso in quanto intersezione di chiusi, e' anche limitato, dopodiche' la tesi segue dalla ii) del Lemma 2.1.
Se $X^*(x_0)$ non e' limitato, esistono le successioni $\{c^k\} \subset \mathrm{cl}U$, $\{x^k\} \subset X$, $\{u^k\} \subset \mathrm{cl}U$ tali che $x_0 +c^k =x^k-u^k$ con $\|c^k\| \to +\infty$. Risulta $x^k= x_0 +c^k+u^k$ e, per la convessita' del cono U, si ha $x^k= x_0 +c^k +u^k \in x^0+\mathrm{cl}U$; iniziamo a

dimostrare che $\|x^k\| \to +\infty$. Essendo U acuto, esiste $\alpha \in \mathbf{R}^s$ tale che $\alpha^t c>0$, $\forall c \in clU\setminus\{0\}$.Posto $\bar{c}^k = \frac{c^k}{\| c^k \|}$, $\bar{u}^k = \frac{u^k}{\| u^k \|}$, si ha $\bar{c}^k, \bar{u}^k \in S \cap clU$, dove S e' la sfera unitaria di centro l'origine.

Poiche' la funzione lineare $\alpha^t c$ ammette minimo sull'insieme compatto $S \cap clU$, posto $\beta = \alpha^t c^0 = \min \ \alpha^t c$, $c \in S \cap clU$, si ha ovviamente$\beta>0$. Risulta

$\alpha^t x^k=\alpha^t(x_0+c^k+u^k)= \alpha^t x_0+\alpha^t \bar{c}^k\|c^k\| + \alpha^t \bar{u}^k\|u^k\| \ \geq \alpha^t x_0+\beta(\|c^k\|+\|u^k\|) \to +\infty$

e, di conseguenza , $\|x^k\| \to +\infty$.

Esiste allora una successione $\{x^k\} \subset X \cap (x_0+ clU)$ divergente in norma e cio' contraddice l' ipotesi di L-limitatezza dell'insieme X.

♦

4. Scalarizzazione

In questo paragrafo si evidenziera' come, sotto opportune ipotesi, sia possibile caratterizzare l'insieme dei punti efficienti come unione di insiemi di soluzioni ottime di un problema scalare parametrico; ci limiteremo a presentare i vari risultati in una forma alla quale ci riferiremo nello studio di un problema multiobiettivo.

A tal fine , si consideri un insieme non vuoto X di $\mathbf{R}^s$, un cono U di $\mathbf{R}^s$, e si associ all'insieme X e al cono U il problema scalare

$$P(\alpha): \max \alpha^t x , \ x \in X , \ \ \alpha \in U^*\setminus\{0\}.$$

del quale denoteremo con $S(\alpha)$ l'insieme delle soluzioni ottime.

Il seguente Teorema stabilisce che se il problema $P(\alpha)$, $\alpha \in intU^*$, ha soluzioni ottime , quest'ultime sono anche punti efficienti di X rispetto ad un cono acuto:

Teorema 4.1

Sia X un insieme non vuoto di $\mathbf{R}^s$ e U un cono acuto di $\mathbf{R}^s$. Risulta :

$$\bigcup_{\alpha \in intU^*} S(\alpha) \subset E(X,U) \qquad (4.1)$$

dim.

Se $S(\alpha)=\emptyset$ non vi e' niente da dimostrare; sia allora $x^*\in S(\alpha)$ e supponiamo per assurdo che $x^*\notin E(X,U)$ ovvero che esista $z\in X$ con $z=x^*+c$, $c\in U\setminus\{0\}$. Tenuto conto che $\alpha^t c>0$ in quanto $\alpha\in \text{int } U^*$, si ha $\alpha^t z=\alpha^t(x^*+c)=\alpha^t x^*+\alpha^t c > \alpha^t x^*$ e cio' contraddice l'ottimalita' di x^*.

♦

Osservazione 4.1

In generale un punto efficiente di X rispetto al cono U non e' ottenibile come soluzione ottima di un problema $P(\alpha)$ anche quando $S(\alpha)\neq\emptyset$, $\forall\alpha\in U^*\setminus 0$. Si consideri al riguardo l'insieme

$X=\{\ (x,y) : x=-y^2, y\geq 0\ \}\cup\{\ (x,y) : y=-x^2, x\geq 0\}$ ed il cono $U=\mathbf{R}^2_+$.

Si verifica facilmente che $(0,0)\in E(X,U)$ ma $(0,0)$ non e' soluzione ottima di $P(\alpha)$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}^2_+\setminus\{0\}$.

Osservazione 4.2

Si osservi che la compattezza dell'insieme X, tenuto conto della linearita' della funzione obiettivo, implica che $S(\alpha)\neq\emptyset$, $\forall\alpha\in U^*\setminus\{0\}$; tale proprieta' non sussiste se si sostituisce l'ipotesi di compattezza con quella di U-compattezza.

Si consideri infatti l'insieme $X=\{(x,y) : x=0, y\geq 0\}\cup\{(x,y) : y=0, x\geq 0\}$ ed il cono $U=\{(x,y): x\leq y\leq 2x,\ x\geq 0\}$; risulta $E(X,U)=X$ ed $S(\alpha)=\emptyset$, $\forall\alpha\in U^*\setminus\{0\}$.

Il seguente Teorema stabilisce che se X e' un insieme U-convesso ovvero se X-U e' un insieme convesso, allora un punto efficiente di X rispetto al cono U e' ottenibile come soluzione ottima di un problema $P(\alpha)$, $\alpha\in U^*\setminus\{0\}$; nel caso particolare in cui X é un insieme poliedrico α appartiene a $\text{int}U^*$.

Teorema 4.2

i) Sia U un cono convesso puntato di $\mathbf{R}^s$ e X un insieme non vuoto, U-convesso di $\mathbf{R}^s$. Risulta :

$$E(X,U)\subset\bigcup_{\alpha\in U^*\setminus\{0\}}S(\alpha) \tag{4.2}$$

Se inoltre $S(\alpha)$ e' costituito da un solo elemento quando $\alpha\in U^*\setminus\{0\}\setminus\text{int}U^*$, allora

$$E(X,U) = \bigcup_{\alpha\in U^*\setminus\{0\}} S(\alpha)$$

ii) Sia U un cono convesso, chiuso e puntato di $\mathbf{R}^s$ e X un insieme non vuoto, poliedrico di $\mathbf{R}^s$. Risulta :

$$\bigcup_{\alpha\in \mathrm{int}U^*} S(\alpha) = E(X,U) \qquad (4.3)$$

dim.

i) Sia $x^*\in E(X,U)$; tenuto conto che U e' un cono convesso e puntato, e' facile verificare che $(X-U)\cap(x^*+U)=\{x^*\}$.Poiche' X-U e x^*+U sono insiemi convessi, esiste un iperpiano che li separa di equazione $\beta^t(z-x^*)= 0$, $z \in \mathbf{R}^s$, tale che

$$\beta^t (z-x^*)\geq 0 \quad \forall z\in x^*+U \qquad (4.4)$$

$$\beta^t (z-x^*)\leq 0 \quad \forall z\in X-U \qquad (4.5)$$

La (4.4), applicata a $z=x^*+u$ per ogni $u\in U$, implica $\beta\in U^*\setminus\{0\}$, mentre la (4.5) , che vale in particolare per $\forall z\in X$, implica che x^* e' soluzione ottima del problema $P(\beta)$.

ii) Per la (4.1) si deve dimostrare che $x^* \in E(X,U)$ implica $x^*\in \bigcup_{\alpha\in \mathrm{int}U^*} S(\alpha)$.

Poiché X é un insieme poliedrico, esistono m vettori $a_1,..., a_m$ di $\mathbf{R}^s$ ed m scalari $b_1,..., b_m$ tali che $X=\{x \in \mathbf{R}^s\colon a_i^t x\geq b_i \quad i=1, ...,m\}$.

Sia $J=\{i\colon a_i^t x^*=b_i\}$ e $X^*=\{x \in \mathbf{R}^s\colon a_i^t x\geq a_i^t x^* \quad i\in J\}$ (si osservi che $J\neq\emptyset$ in quantoché x^* é necessariamente un punto di frontiera per X).

X^* é un cono poliedrico contenente X ed esiste in modo ovvio un intorno I di x^* tale che $I\cap X^*=I\cap X$; quest'ultima relazione unitamente alla $X\cap(x^*+U)=\{x^*\}$ implica $X^*\cap(x^*+U)=\{x^*\}$, dopodiché la tesi segue dalla Proprietà 1.1

♦

Osservazione 4.3

Si consideri in $\mathbf{R}^2$ il quadrato di vertici O=(0,0), A=(0,1), B=(1,1), C=(1,0) ed il cono $U=\mathbf{R}\setminus S(2,+)$; e' facile verificare che $E(X,U)=\{(1,1)\}$, $\bigcup_{\alpha\in U^*\setminus\{0\}} S(\alpha) = AB \cup BC$ cosicche' la (4.2) non vale, in generale, sotto forma di uguaglianza.

5. Sulla esistenza delle soluzioni efficienti in un problema multiobiettivo

Consideriamo il seguente problema di estremo vettoriale :

$P: \quad U\text{-max } F(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_s(x)), x \in S \subset Z$

dove $f_i : Z \to \mathbf{R}$, $i= 1, \ldots\ldots, s$ sono funzioni definite su un insieme aperto Z di $\mathbf{R}^n$. Si ponga $U^0=U\backslash\{0\}$.

Un punto ammissibile $x_0 \in S$ é detto punto <u>efficiente</u> per il problema P rispetto al cono U se e solo se

$$\nexists\, x \in S : F(x) \in F(x_0) + U^0 \qquad \text{o, equivalentemente,}$$

$$F(x) \notin F(x_0) + U^0 \quad \forall x \in S \qquad \text{o, equivalentemente,}$$

$$F(S) \cap (F(x_0) + U) = \{F(x_0)\} \quad , \forall x \in S$$

Quando il cono U coincide con l'ortante $U= \mathbf{R}^s_+$, la precedente definizione coincide con quella di soluzione ottima secondo Pareto.

Denotato con E* l'insieme delle soluzioni efficienti del problema P, si ha:

$$E^*=\{x\in S: F(x) \in E(F(S),U)\} \tag{5.1}$$

e quindi

$$E^* \neq \emptyset \text{ se e solo se } E(F(S),U)\neq\emptyset \tag{5.2}$$

In altri termini risolvere il problema P é equivalente a determinare i punti efficienti dell'insieme X=F(S) rispetto al cono U, nel senso che x_0 é efficiente per P se e solo se $F(x_0)$ é efficiente per F(S) rispetto al cono U. Di conseguenza si possono applicare i risultati di cui ai paragrafi precedenti per trovare condizioni che assicurino l'esistenza di punti efficienti per P e la loro caratterizzazione.

A tale riguardo nel seguente Teorema é riportata una classica condizione che assicura la compattezza di F(S) :

Teorema 5.1

Si consideri il problema P, dove S e' un insieme compatto ed F é una funzione continua. Allora $E^* \neq \emptyset$.

dim.

Basta osservare che le ipotesi implicano la compattezza di F(S), dopodiche' per la i) del Teorema 3.1 si ha $E(F(S),U)\neq\emptyset$ e quindi $E^*\neq\emptyset$ per la (5.2).

♦

Metteremo ora in evidenza come i risultati ottenuti relativi agli insiemi L-limitati possono essere utilizzati per estendere il Teorema precedente a funzioni semicontinue. Premettiamo la seguente definizione che , nel caso scalare, coincide con la classica definizione di funzione semicontinua superiormente :

Def. 5.1

F é detta U-semicontinua superiormente nel punto $x_0 \in S$ se per ogni intorno V di $F(x_0)$, esiste un intorno I di x_0, tale che $F(x) \in V-U$, $\forall x\in I\cap S$.

F é detta U-semicontinua superiormente in S se é U-semicontinua superiormente in ogni punto di S.

Vale il seguente Teorema:

Teorema 5.2

Si consideri il problema P dove S e' un insieme compatto, U e' un cono acuto ed F e' una funzione U-semicontinua superiormente in S . Allora clF(S) é L-limitato.

dim.

Supponiamo per assurdo che clF(S) non sia L-limitato o , equivalentemente, che esista $F(z)\in$ clF(S) tale che $(F(z)+clU) \cap clF(S)$ é illimitato. Esiste allora una successione $\{z_n\} \subset clF(S)$, $z_n=F(z)+c_n$, $c_n\in clU$, con $\|c_n\| \to +\infty$.

Poiché $z_n \in clF(S)$, esiste una successione $\{x_n\} \subset S$ ed un $M > 0$ tale che $F(x_n)= z_n+h_n$, $\|h_n\| < M$. Essendo S compatto $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente che, senza ledere la generalita', possiamo supporre essere la successione stessa; si ha allora $x_n \to x^*$ ed essendo F una funzione U-semicontinua superiormente , esiste un intorno V di $F(x^*)$ tale che $F(x_n) \in V - U$ per n sufficientemente grande, cosicché esiste $M_1>0 : F(x_n) = v_n- \bar{c}_n$, $\bar{c}_n\in clCU$,$\| v_n\| < M_1$.

Risulta $v_n - \bar{c}_n = z_n + h_n = F(z) + c_n + h_n$, $v_n - h_n - F(z) = c_n + \bar{c}_n$ e questo e' assurdo in quanto la successione $\{v_n - h_n - F(z)\}$ e' limitata , mentre la successione $\{ c_n + \bar{c}_n\}$ e' illimitata essendo U acuto e $\|c_n\| \to +\infty$.

♦

Il seguente Teorema estende ad un problema multiobiettivo il ben noto teorema di Weierstrass :

Teorema 5.3

Si consideri il problema P dove S e' un insieme compatto, U e' un cono chiuso convesso e puntato, ed F e' una funzione U-semicontinua superiormente in S. Allora $E^* \neq \emptyset$.

dim

Dalla iv) del Teorema 3.1, tenuto conto del Teorema 5.2, si ha $E(\mathrm{cl}F(S),U) \neq \emptyset$. Sia $w \in E(\mathrm{cl}F(S),U)$; esiste allora una successione $\{x_n\} \subset S$ tale che $F(x_n) \to w$ e, poiche' S e' compatto, si puo' supporre, sostituendo $\{x_n\}$ con una opportuna sottosuccessione se necessario, che $x_n \to x^*$.
Per la U-superioresemicontinuita' della F, per ogni sfera chiusa V di centro $F(x^*)$ abbiamo $F(x_n) \in V - U$ per n sufficientemente grande, cosicche', tenuto conto che V-U e' chiuso essendo V compatto, si ha:

$$w \in V - U \text{ per ogni sfera chiusa } V \text{ di centro } F(x^*) \tag{5.3}$$

Dimostriamo ora che $w \in F(x^*) - U$; se cosi' non fosse, essendo $F(x^*)-U$ chiuso, esisterebbe una sfera chiusa I di centro w tale che $I \cap (F(x^*)-U) = \emptyset$, e, conseguentemente, $F(x^*) \notin I+U$. Poiche' I+U e' chiuso, esiste una sfera chiusa V^* di centro $F(x^*)$ tale che $V^* \cap (I+U) = \emptyset$; quest'ultima relazione implica, per la convessita' del cono U, $(V^*-U) \cap (I+U) = \emptyset$, e questo e' assurdo in quanto (5.3) implica $w \in (V^*-U) \cap (I+U)$.
Infine, poiche' $w \in F(x^*)-U$ ed inoltre $w \in E(\mathrm{cl}(F(S),U)$, si ha necessariamente $w=F(x^*)$ e quindi $w \in E((F(S),U)$.
Dalla (5.2) si ha $E^* \neq \emptyset$.

♦

6. Sulla caratterizzazione delle soluzioni efficienti in un problema multiobiettivo

In questo paragrafo vedremo come sia possibile convertire un problema di estremo vettoriale in un problema scalare (scalarizzazione) o, equivalentemente, come sia possibile caratterizzare l'insieme dei punti efficienti E* tramite le soluzioni ottime del seguente problema scalare parametrico:

$$P^*(\alpha)\text{: } \max \alpha^t F(x)\ ,\ \ x \in S\ ,\ \ \alpha \in U^* \setminus \{0\}.$$

Denotato con $S^*(\alpha)$ l'insieme delle soluzioni ottime di $P^*(\alpha)$ si ha ovviamente

$$S^*(\alpha) = \{\ x \in S :\ F(x) \in S(\alpha)\} \tag{6.1}$$

essendo $S(\alpha)$ l'insieme delle soluzioni ottime del problema $P(\alpha)$ con $X=F(S)$.

I risultati stabiliti nel paragrafo 4 possono allora essere utilizzati per caratterizzare E*; piu' precisamente tenuto dei teoremi 4.1 e 4.2, e delle relazioni (5.1) e (6.1), si ha il seguente Teorema:

Teorema 6.1

Si consideri il problema multiobiettivo P.

i) Se U e' un cono acuto allora

$$\bigcup_{\alpha \in \text{int}U^*} S^*(\alpha) \subset E^* \tag{6.2a}$$

ii) Se U e' un cono convesso puntato e F(S) e' un insieme U-convesso allora

$$E^* \subset \bigcup_{\alpha \in U^* \setminus \{0\}} S^*(\alpha) \tag{6.2b}$$

Se inoltre $S^*(\alpha)$ e' costituito da un solo elemento quando $\alpha \in U^* \setminus \{0\} \setminus \text{int}U^*$, allora

$$E^* = \bigcup_{\alpha \in U^* \setminus \{0\}} S^*(\alpha) \tag{6.2c}$$

iii) Sia U un cono convesso chiuso e puntato. Se F(S) e' un insieme poliedrico allora

$$E^* = \bigcup_{\alpha \in \text{int}U^*} S^*(\alpha) \tag{6.2d}$$

Corollario 6.1
Si consideri il problema lineare multiobiettivo P, dove U e' un cono convesso chiuso e puntato. Allora

$$E^* = \bigcup_{\alpha \in \text{int}U^*} S^*(\alpha)$$

dim.
Poiche' la funzione obiettivo F e' lineare e la regione ammissibile S e' definita da disuguaglianze lineari, si ha che F(S) e' un insieme poliedrico; la tesi segue dalla iii) del Teorema 6.1.

♦

Osservazione 6.1
Si osservi che la classe dei problemi per i quali F(S) e' un insieme poliedrico contiene propriamente la classe dei problemi lineari multiobiettivo; basta considerare al riguardo il problema P dove $F(x)=(x^2,-x^2)$, $S=\mathbf{R}_+$,$U= \mathbf{R}^2_+$.

La seguente classe di funzioni introdotta in [8], permette di caratterizzare la U-convessita' del codominio della funzione F:

Def. 6.1
Sia U un cono convesso di $\mathbf{R}^s$. Una funzione F: $S \to \mathbf{R}^s$ e' detta U-convexlike se $\forall x,y \in S, \exists\, z \in S$ tale che $F(z) \in \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y) + U$ $\forall \lambda \in [0,1]$.

Vale il seguente

Teorema 6.2
Sia U un cono convesso di $\mathbf{R}^s$. Allora F(S) e' un insieme U-convesso se e solo se F e' U-convexlike.
dim.
Sia F(S)-U un insieme convesso e siano $x,y \in S$. Poiche' $F(x), F(y) \in F(S)$ si ha $\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y) \in F(S)-U$ $\forall \lambda \in [0,1]$ e quindi esiste $z \in S$ tale che $F(z) \in \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y) + U$ per ogni fissato λ in [0,1];

Viceversa sia F una funzione U-convexlike e si considerino due elementi di F(S)-U del tipo $F(x_1) - u_1$, $F(x_2)-u_2$ con $x_1,x_2 \in S$ e $u_1,u_2 \in U$. Risulta $\lambda(F(x_1)-u_1)+(1-\lambda)(F(x_2)-u_2)= \lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)-(\lambda u_1 +(1-\lambda)u_2)=F(z)-u \in F(S)-U$.

♦

Allo scopo di determinare una classe di funzioni U-convexlike diamo la seguente definizione che estende al caso vettoriale la classica nozione di concavita' :

Def. 6.2

Sia S un insieme convesso di $\mathbf{R}^n$ ed U un cono di $\mathbf{R}^s$. Una funzione $F:S \to \mathbf{R}^s$ e' detta U-concava se

$$F(x_1+\lambda(x_2-x_1)) \in F(x_1)+\lambda(F(x_2)-F(x_1))+U \quad \forall\lambda\in [0, 1], \ \forall x_1,x_2\in S$$

Si osservi che nel caso paretiano ($U= \mathbf{R}^s_+$), F e' una funzione U-concava se e solo se ogni sua componente e' una funzione concava nel senso ordinario.

Vale il seguente Lemma:

Lemma 6.1

Sia S un insieme convesso di $\mathbf{R}^n$ e U un cono convesso di $\mathbf{R}^s$. Se $F:S \to \mathbf{R}^s$ e' una funzione U-concava allora F e' U-convexlike.

<u>dim</u>.

Si deve dimostrare che F(S)-U e' un insieme convesso, ovvero che $z_1+\lambda(z_2-z_1) \in F(S)-U \ \ \forall\lambda\in [0,1], \forall z_1,z_2\in F(S)$. Poiche' $z_1= F(x_1) - u_1$ e $z_2=F(x_2)-u_2$ con $x_1,x_2\in S$ e $u_1,u_2 \in U$, si ha $z_1+\lambda(z_2-z_1)=F(x_1)+\lambda(F(x_2)-F(x_1))-(u_1+\lambda(u_2-u_1))$. Essendo F una funzione U-concava, esiste $u^*\in U$ tale che $F(x_1)+\lambda(F(x_2)-F(x_1))=F(x_1+\lambda(x_2-x_1))-u^*$ e, di conseguenza, tenuto conto della convessita' del cono, $z_1+\lambda(z_2-z_1)= F(x_1)+\lambda(F(x_2)-F(x_1)) - u$ con $u = u^* + u_1+\lambda(u_2-u_1)\in U$, da cui la tesi.

♦

Dal Lemma 6.1 e dalla ii) del Teorema 6.1, si ha il seguente Corollario:

Corollario 6.2
Si consideri il problema multiobiettivo P dove S e' un insieme convesso, U e' un cono convesso puntato e F e' una funzione U-concava. Allora

$$E^* \subset \bigcup_{\alpha \in U^* \setminus \{0\}} S^*(\alpha)$$

Se inoltre $S^*(\alpha)$ e' costituito da un solo elemento quando $\alpha \in U^* \setminus \{0\} \setminus \text{int}U^*$, allora

$$E^* = \bigcup_{\alpha \in U^* \setminus \{0\}} S^*(\alpha)$$

Osservazione 6.2

Nel caso paretiano ($U = \mathbf{R}^s_+$), le (6.2) valgono o per $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 0$, oppure per $\alpha > 0$; tenuto conto che l'insieme delle soluzioni efficienti non varia se si normalizza il vettore α , si puo' supporre, senza ledere la generalita', che dette relazioni valgano per $\alpha_i \in [0,1]$. Di conseguenza la scalarizzazione permette di sostituire un problema paretiano con un problema scalare parametrico avente per funzione obiettivo una somma pesata delle componenti della funzione vettoriale, con pesi compresi tra 0 ed 1. Cio' permette, per classi particolari di problemi, come i problemi lineari multiobiettivo ed i problemi bicriteria, di generare l'insieme dei punti efficienti E* tramite opportuni algoritmi parametrici.

7. Condizioni di Ottimalita'

In questo paragrafo studieremo condizioni necessarie e sufficienti di ottimalita' locale e determineremo ampie classi di funzioni per le quali un ottimo locale e' anche globale.
A tal fine, rispetto al problema multiobiettivo P, diremo che $x_0 \in S$ e' un punto efficiente locale rispetto al cono U per P se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$F(x) \notin F(x_0) + U^0 , \quad \forall x \in I \cap S \tag{7.1a}$$

e diremo che $x_0 \in S$ e' un punto <u>efficiente locale stretto</u> rispetto al cono U per P se non esistono nella (7.1a) punti $x \neq x_0$ per i quali $F(x)=F(x_0)$, ovvero se

$$F(x) \notin F(x_0)+U\,, \quad \forall x \in I \cap S\,, x \neq x_0 \qquad (7.1b)$$

Osserviamo che nel caso scalare ($s=1$, $U=\mathbf{R}_+$) le precedenti definizioni coincidono rispettivamente con quelle ben note di punto di massimo locale e di punto di massimo locale stretto.
Se la (7.1b) e' verificata $\forall x \in S$, diremo che x_0 e' punto efficiente stretto.
Come e' noto, per un problema scalare, le funzione concavo-generalizzate svolgono un ruolo essenziale nella ricerca di condizioni sotto le quali alcune condizioni necessarie di ottimalita' divengono sufficienti o per le quali un ottimo locale e' anche globale.
Una tale problematica estesa al caso vettoriale comporta l'introduzione del concetto di concavita' generalizzata rispetto ad un cono.
Una tale generalizzazione non e' del tutto ovvia e scontata ed e' ancora materia di studio sia per quanto riguarda le possibili definizioni di funzioni concavo-generalizzate sia per quanto riguardo il loro ruolo nell'ottimizzazione.
Ai fini dei risultati contenuti in questo lavoro ci limiteremo a proporre alcune classi di funzioni.

7.1. Funzioni concavo-generalizzate

Dovendo studiare l'ottimalità di un punto e al fine di fornire risultati in una forma più generale possibile, daremo le definizioni di funzioni concavo- generalizzate rispetto ad un punto, ad un cono e ad un insieme localmente stellato; tali definizioni generalizzano quelle introdotte da Mangasarian [12] nel caso scalare.
Sia Z un aperto di $\mathbf{R}^n$, $F\colon Z \to \mathbf{R}^s$ una funzione e U un cono di $\mathbf{R}^s$.
Un insieme $S \subset Z$ é detto <u>localmente stellato in x_0</u> se esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I \cap S$ si ha:

$$[x\,, x_0] = \{tx+(1-t)x_0 :\ t \in [0,1]\} \subset S.$$

Def. 7.1.1

La funzione F é detta <u>U-concava</u> in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U \quad \forall\lambda \in (0,\,1),\ \forall x \in S$$

Def. 7.1.2

La funzione F é detta U-semistrettamente quasiconcava (U-s.s.q.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U^0 \Rightarrow F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0) + U^0 \quad \forall\lambda \in (0, 1)$$

Def. 7.1.3

La funzione F é detta U-quasiconcava (U-q.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U \Rightarrow F(x_0+\lambda(x-x_0)) \in F(x_0) + U \qquad \forall\lambda \in (0, 1)$$

Def 7.1.4

Sia F direzionalmente differenziabile in x_0 ;

F é detta U-debolmente pseudoconcava (U-w.p.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U^0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in U^0,\ d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$$

Def. 7.1.5

Sia F direzionalmente differenziabile in x_0 e sia $\mathrm{int}U \neq \emptyset$;

F é detta U-pseudoconcava (U-p.cv.) in x_0 (rispetto all'insieme localmente stellato S in x_0) se:

$$x \in S\ ,\ F(x) \in F(x_0) + U^0 \quad \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in \mathrm{int}U,\ d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$$

Osservazione 7.1.1

Se s=1 ed $U=\mathbf{R}_+$, le definizioni precedenti coincidono con le classiche definizioni di funzioni concave, semistrettamente quasiconcave, quasiconcave e pseudoconcave nel punto $x_0 \in S$ [12].

A differenza di quanto accade nel caso scalare una funzione semicontinua superiormente e U-s.s.q.cv. non e' U-q.cv.; si consideri al riguardo la funzione $F(x)=(x\ \mathrm{sen}\frac{1}{x}\ ,\ -\ x\ \mathrm{sen}\frac{1}{x})$ per $x\neq 0$ ed $F(x)=0$ per $x=0$, sull'insieme stellato $S=\mathbf{R}_+$, F e' nel punto $x_0=0$ continua e $\mathbf{R}^2_+$-s.s.q.cv. ma non $\mathbf{R}^2_+$-q.cv.

Osservazione 7.1.2

Le definizioni date implicano che una funzione lineare F é U-concava e U-w.p.cv. rispetto ad ogni cono U ,ma non é U-p.cv.

Osservazione 7.1.3

Per meglio sottolineare la generalità delle definizioni date, si osservi che le classi delle funzioni concavo-generalizzate definite rispetto al cono paretiano $U= \mathbf{R}^s_+$, sono assai più ampie di quelle che si ottengono richiedendo che ogni componente di F sia una funzione concavo-generalizzata dello stesso tipo. A tale riguardo basta notare che se una componente della F ha in x_0 un punto di massimo locale stretto, allora F verifica le definizioni 7.1.2, 7.1.3, 7.1.4, 7.1.5, senza nessuna ulteriore specifica sulle altre componenti.

Un esempio meno ovvio é il seguente:

Esempio 7.1.1

Si consideri la funzione $F(x_1,x_2)=(x_1- x_2 , x_1^2- x_2 , -x_1^2- x_2)$, il punto $x_0=(0,0)$, l'insieme stellato $S=\{(x_1,x_2): x_1 \geq 0\}$ ed il cono $U= \mathbf{R}^3_+$.

Si verifica facilmente che la funzione $f_2(x_1,x_2)= x_1^2- x_2$ non é s.s.q.cv. né q.cv. né p.cv. nel punto x_0 mentre la funzione F risulta essere sia $\mathbf{R}^3_+$-s.s.q.cv., sia $\mathbf{R}^3_+$-q.cv., sia $\mathbf{R}^3_+$-p.cv. che $\mathbf{R}^3_+$-w.p.cv. nel punto x_0.

Valgono per le funzioni concavo-generalizzate precedentemente definite le relazioni espresse nel seguente Teorema:

Teorema 7.1.1

Sia S un insieme localmente stellato in x_0 e sia U un cono convesso.

i) Se F é U-concava in x_0 allora F é U-q.cv. in x_0.

ii) Se F é U-concava in x_0 ed U é puntato, allora F é U-s.s.q.cv. in x_0.

dim.

i) Supponiamo che $F(x) \in F(x_0) +U$, cioé $F(x)- F(x_0)\in U$. Poiché F é U-concava in x_0 si ha $F(x_0+\lambda(x-x_0))\in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U \subset F(x_0)+U$ $\forall\lambda\in (0,1)$, cosicché F é U-q.cv in x_0.

ii) Supponiamo che $F(x)\in F(x_0) +U^0$, cioé $F(x)- F(x_0)\in U^0$. Poiché F e' U-concava in x_0 si ha $F(x_0+\lambda(x-x_0))\in F(x_0)+\lambda(F(x)-F(x_0))+U$. La tesi segue dal fatto che per un cono puntato vale la relazione $U^0 +U= U^0$.

♦

Il seguente esempio dimostra che la ii) del Teorema 7.1.1 é falsa se U non é puntato .

Esempio 7.1.2

Consideriamo la funzione $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x \geq 0 \\ x & \text{if } x < 0 \end{cases}$ e il cono non puntato $U=\mathbf{R}$. E' facile verificare che F e' U-concava in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ ma F non e' U-s.s.qv. in $x_0=1$, poiché per $x^*=-1$ si ha :

$$F(-1) \in F(1)+\mathbf{R}\setminus\{0\} \text{ e } F(x_0+\frac{1}{2}(x^*-x_0)) = F(0)=0 \notin F(x_0)+\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

7.2. Proprietà di un problema multiobiettivo concavo-generalizzato

Le classi delle funzioni concavo-generalizzate precedentemente introdotte permettono di studiare le relazioni intercedenti tra un ottimo locale ed un ottimo globale e tra l'ottimalità rispetto ad ogni direzione ammissibile e l'ottimalità locale rispetto ad un intorno.

Come gia' accade nel caso scalare, la semistretta quasiconcavita' oppure la pseudoconcavita' della funzione obiettivo implica il fatto che i massimi locali sono anche globali mentre tale proprieta' non e' estendibile alle funzioni quasiconcave se non richiedendo che i massimi locali siano stretti. Si ha infatti il seguente Teorema:

Teorema 7.2.1

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0.

i) Se x_0 e' un punto efficiente locale ed F é una funzione U-s.s.q.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente .

ii) Se x_0 e' un punto efficiente locale stretto ed F é una funzione U-q.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente stretto .

iii) Se x_0 e' un punto efficiente locale, $\text{int}U \neq \emptyset$ ed F é una funzione U-p.cv. in x_0, allora x_0 e' anche punto efficiente.

dim.

i) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U^0$, $\forall\ \lambda \in (0,1)$; per $\lambda \in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0) \in I \cap S$ e cio' implica, contrariamente all'ipotesi, che x_0 non e' un punto efficiente locale.

ii) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U$. Si ha allora $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+U$, $\forall\ \lambda \in (0,1)$; per $\lambda \in (0,\varepsilon)$ con ε opportuno si ha $x_0+\lambda(x^*-x_0) \in I \cap S$ e cio' implica, contrariamente all'ipotesi, che x_0 non e' un punto efficiente locale stretto.

iii) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Si ha allora $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in \mathrm{int}U$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$ ovvero $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0+td)-F(x_0)}{t} \in \mathrm{int}U$, e cio' implica per un opportuno $\varepsilon>0$, che $F(x_0+td)-F(x_0) \in \mathrm{int}U$ per ogni $t \in (0,\varepsilon)$. Posto $t= \lambda\|x^*-x_0\|$, si ha $F(x_0+\lambda(x^*-x_0)) \in F(x_0)+\mathrm{int}U$ per ogni $\lambda \in (0, \frac{\varepsilon}{\|x^*-x_0\|})$ e cio' contraddice l'efficienza locale di x_0.

♦

Osservazione 7.2.1

La proprieta' iii) del Teorema precedente non e' estendibile alle funzioni U-w.p.cv. anche quando x_0 e' un punto efficiente locale stretto; si consideri infatti il problema P dove $U= \mathbf{R}^2_+$, $F(x)=(x^2, x^2-2x)$ e $S=\{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$. Si verifica facilmente che $x_0=0$ e' un punto efficiente locale stretto per P ma non e' efficiente rispetto ad S; inoltre la funzione F e' $\mathbf{R}^2_+$-w.p.cv. ma non e' $\mathbf{R}^2_+$-p.cv. in x_0.

Corollario 7.2.1

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono puntato ed F é una funzione U-concava in x_0.

Se x_0 e' un punto efficiente locale , allora x_0 e' anche punto efficiente.

dim.

Conseguenza diretta dei Teoremi 7.1.1 e 7.2.1.

♦

Corollario 7.2.2

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0 ed F é lineare.

Se x_0 e' un punto efficiente locale , allora x_0 e' anche punto efficiente.

dim.

Conseguenza immediata del Corollario 7.2.1 e dell'Osservazione 7.1.2.

♦

Come é noto la proprietà per la quale un ottimo locale rispetto ad ogni direzione ammissibile di un insieme localmente stellato é anche un ottimo locale, non vale in generale; al riguardo basta considerare la funzione $F(x,y)=(y-x^4)(x^2-y)$, l'insieme $S= \mathbf{R}_+^2$ ed il punto $x_0=(0,0)$.

Faremo vedere che per la classe delle funzioni U-s.s.q.c. si ha equivalenza tra il concetto di efficienza locale ed il concetto di efficienza rispetto ad una direzione, cosi'definito:

Def. 7.2.1 Diremo che x_0 e' punto efficiente locale (punto efficiente locale stretto) rispetto alla direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$ e rispetto al cono U se esiste $t^*>0$ tale che

$$F(x) \notin F(x_0) +U^0 ,\ \forall\ x = x_0+td\ ,\ t\in (0, t^*).$$
$$(F(x) \notin F(x_0) +U ,\ \forall\ x = x_0+td\ ,\ t\in (0, t^*)).$$

Vale il seguente Teorema :

Teorema 7.2.2

Si consideri il problema P dove S é un insieme localmente stellato in x_0.

i) Se x_0 e' punto efficiente locale per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$ ed F e' una funzione U-s.s.q.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale.

ii) Se x_0 e' punto efficiente locale stretto per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x\in S$ ed F é una funzione U-q.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale stretto.

iii) Se x_0 e' punto efficiente locale per ogni direzione $d=\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, $x \in S$, $\text{int}U \neq \emptyset$ ed F é una funzione U-p.cv. in x_0 allora x_0 e' punto efficiente locale.

<u>dim</u>.

Simile a quella data nel Teorema 7.2.1.

♦

7.3 Condizioni di ottimalità (caso non differenziabile)

Le condizioni di ottimalita' che stabiliremo in questo paragrafo saranno dedotte da un approccio molto generale basato su condizioni espresse tramite le derivate direzionali relative a direzioni del cono tangente alla regione ammissibile S in x_0, ovvero al cono chiuso di vertice l'origine definito nel seguente modo:

Def 7.3.1

Il cono tangente ad S nel punto $x_0 \in S$, denotato con $T(S,x_0)$ e' l'insieme

$$T(S,x_0)=\{v : \exists \{\alpha_n\} \subset \mathbf{R}, \{x_n\} \subset S, \ \alpha_n \to +\infty, \ x_n \to x_0 \ \text{ con } \alpha_n(x_n-x_0) \to v\}.$$

Si osservi che $T(S,x_0)=\{0\}$ se e solo se x_0 e' un punto isolato nel qual caso l'ottimalita' di x_0 e' del tutto ovvia; nel seguito supporremo quindi , senza ledere la generalita', che $T(S,x_0) \neq \{0\}$.

Ricordiamo che F e' direzionalmente differenziabile nel punto x_0 rispetto alla direzione v se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t} \triangleq \frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$$

Allo scopo di stabilire condizioni di ottimalita' nel caso sottodifferenziabile, premettiamo il seguente Lemma :

Lemma 7.3.1

Sia F direzionalmente differenziabile in x_0 e lipschiztiana in un intorno di x_0. Allora per ogni successione $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, esiste una sottosuccessione $x_{n_k} \to x_0$, tale che

$$\lim_{x_{n_k} \to x_0} \frac{x_{n_k}-x_0}{\|x_{n_k}-x_0\|} = v \qquad (7.3.1a)$$

$$\lim_{x_{n_k} \to x_0} \frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} = \frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \qquad (7.3.1b)$$

<u>dim</u>.

Posto $v_n = \dfrac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}$ e $t_n = \|x_n-x_0\|$ si ha $\dfrac{F(x_n)-F(x_0)}{\|x_n-x_0\|} = \dfrac{F(x_0+t_nv_n)-F(x_0)}{t_n}$

.

Poiche' la successione $\{v_n\}$ e' limitata, esiste una sua sottosuccessione $\{v_{n_k}\}=\{\frac{x_{n_k}-x_0}{\|x_{n_k}-x_0\|}\}$ convergente che verifica (7.3.1a). Risulta

$$\frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} = \frac{F(x_0+t_{n_k}v)-F(x_0)}{t_{n_k}} + \frac{F(x_0+t_{n_k}v_{n_k})-F(x_0+t_{n_k}v)}{t_{n_k}}$$

Tenuto conto che la lipschitzianita' di F implica

$\left\| \frac{F(x_0+t_{n_k}v_{n_k})-F(x_0+t_{n_k}v)}{t_{n_k}} \right\| \leq K \, \| v_{n_k}-v \|$, essendo $K>0$ la costante di Lipschitz, si ha

$$\lim_{x_{n_k}\to x_0} \frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} = \lim_{x_{n_k}\to x_0} \frac{F(x_0+t_{n_k}v)-F(x_0)}{t_{n_k}} = \frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \ .$$

♦

Il seguente Teorema fornisce una condizione necessaria di ottimalita':

Teorema 7.3.1

Si consideri il problema P dove $\mathrm{int}U \neq \emptyset$ ed F e' direzionalmente differenziabile in x_0 e lipschiztiana in un intorno di x_0 .

Condizione necessaria affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin \mathrm{int}U \ , \quad \forall\, v \in T(S,x_0) \ , \quad v \neq 0. \qquad (7.3.2)$$

<u>dim</u>.

Sia $v \in T(S,x_0)$; e' noto che e' sufficiente dimostrare il Teorema nel caso in cui v sia una direzione unitaria. Tenuto conto della definizione di cono tangente e' possibile determinare una successione $\{x_n\} \subset S$, $x_n \to x_0$, tale che $\lim_{x_n\to x_0} \frac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|} = v$.

Per il Lemma 7.3.1 risulta $\lim_{x_n \to x_0} \frac{F(x_n)-F(x_0)}{\|x_n-x_0\|} = \frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$; d'altra parte l'efficienza di x_0 implica che $\frac{F(x_n)-F(x_0)}{\|x_n-x_0\|} \notin U^0$ $\forall$ n e, di conseguenza, passando al limite si ha $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin \mathrm{int}U$.

♦

Il seguente Teorema fornisce una condizione sufficiente di ottimalita':

Teorema 7.3.2

Si consideri il problema P dove U é un cono chiuso, F e' direzionalmente differenziabile in x_0 e lipschiztiana in un intorno di x_0 .

Condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin U , \quad \forall\, v \in T(S,x_0) , \quad v \neq 0. \qquad (7.3.3)$$

dim.

Supponiamo per assurdo che x_0 non sia efficiente. Esiste allora una successione $\{x_n\} \subset S$, $x_n \to x_0$ tale che $F(x_n) \in F(x_0)+U^0$. Per il Lemma 7.3.1 esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che

$$\lim_{x_{n_k} \to x_0} \frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} = \frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \quad \text{con} \quad \lim_{x_{n_k} \to x_0} \frac{x_{n_k}-x_0}{\|x_{n_k}-x_0\|} = v .$$

Poiche' $\frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} \in U^0$, si ha, passando al limite, che $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \in$ clU=U e cio' contraddice l'ipotesi.

♦

Le condizioni di ottimalità (7.3.2), (7.3.3) possono essere specializzate rispetto alla regione ammissibile.

Quando la regione ammissibile S é un cono convesso chiuso di vertice x_0 il cono tangente $T(S,x_0)$ coincide con l'insieme delle direzioni D del cono, ovvero $D=S-\{x_0\}$, e di conseguenza le condizioni di ottimalità (7.3.2) e (7.3.3) divengono rispettivamente:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin \mathrm{int}U, \quad \forall\, v \in D \tag{7.3.4a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin U, \qquad \forall\, v \in D \tag{7.3.4 b}$$

Si osservi che quando S é un insieme poliedrico ed x_0 é un vertice di S, la (7.3.4 b) esprime una condizione sufficiente di ottimalità rispetto ad un vertice. Tale risultato si riduce, nel caso scalare, a quello riportato in [3,6].

Se in particolare $S=\mathbf{R}^n$ la (7.3.4 b) esprime la seguente condizione sufficiente di ottimalità per un punto interno, condizione che generalizza quella relativa al caso scalare data in [1] :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin U, \qquad \forall\, v \in \mathbf{R}^n,\ v \neq 0 \tag{7.3.5}$$

Infine, come diretta conseguenza delle definizioni 7.1.4 e 7.1.5 si hanno le seguenti condizioni sufficienti di ottimalità in ipotesi di concavità generalizzata:

Teorema 7.3.3

Si consideri il problema P dove F e' direzionalmente differenziabile in x_0 , e lipschiztiana in un intorno di x_0 .

i) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, int$U \neq \emptyset$ ed F é U-p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin \mathrm{int}U, \quad \forall\, v \in D \tag{7.3.6}$$

ii) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono chiuso ed F é U-w.p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x_0) \notin U^0, \quad \forall\, v \in D \tag{7.3.7}$$

7.4. Condizioni di Ottimalita' (caso differenziabile)

Si consideri adesso il problema P nell'ipotesi in cui F e' differenziabile nel punto x_0. E' noto che in tali ipotesi F e' anche direzionalmente differenziabile rispetto ad ogni direzione v e risulta $J_{F_{X_0}}(v)= \frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$ essendo $J_{F_{X_0}}$ la matrice jacobiana di F nel punto x_0. Se F e' differenziabile in un intorno di x_0, allora e' anche lipschitziana in un intorno di x_0 e quindi il Lemma 7.3.1 puo' essere espresso sostituendo $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0)$ con $J_{F_{X_0}}(v)$.

Faremo vedere adesso che la tesi di tale Lemma puo' essere estesa anche nella ipotesi di sola differenziabilita' nel punto x_0, ipotesi che non implica la lipschitzianita' in un intorno di x_0.

Vale il seguente

Lemma 7.4.1

Sia F differenziabile nel punto. Allora per ogni successione $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $x_{n_k} \to x_0$, tale che

$$\lim_{x_{n_k}\to x_0} \frac{x_{n_k}-x_0}{\|x_{n_k}-x_0\|} = v \ , \qquad \lim_{x_{n_k}\to x_0} \frac{F(x_{n_k})-F(x_0)}{\|x_{n_k}-x_0\|} = J_{F_{X_0}}(v) \ .$$

<u>dim</u>.

Pioche' risulta $F(x_n)-F(x_0)= J_{X_0}(x_n-x_0)+\sigma(x_n,x_0)$, con $\lim_{x_n\to x_0} \frac{\sigma(x_n,x_0)}{\|x_n-x_0\|} =0$, si ha : $\frac{F(x_n)-F(x_0)}{\|x_n-x_0\|} = J_{F_{X_0}}(\frac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}) + \frac{\sigma(x_n,x_0)}{\|x_n-x_0\|}$. Tenuto conto che la successione $\{\frac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}\}$ e' limitata e che quindi esiste una sua sottosuccessione $\{ \frac{x_{n_k}-x_0}{\|x_{n_k}-x_0\|} \}$ convergente ad un elemento v, da cui la tesi.

♦

Il precedente Lemma permette di riformulare i Teoremi 7.3.1 e 7.3.2 nel seguente modo:

Teorema 7.4.1

Si consideri il problema P dove intU $\neq\emptyset$ ed F e' differenziabile in x_0.

Se x_0 é un punto efficiente locale per P allora

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin \mathrm{int}U\ , \quad \forall\ v \in T(S,x_0)\ , \quad v \neq 0. \qquad (7.4.1)$$

Teorema 7.4.2

Si consideri il problema P dove U é un cono chiuso ed F e' differenziabile in x_0.

Condizione sufficiente affinche' x_0 sia punto efficiente locale per P e' che

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin U\ , \quad \forall\ v \in T(S,x_0)\ , \quad v \neq 0. \qquad (7.4.2)$$

Quando S é un cono chiuso di vertice x_0, poiché $T(S,x_0)=S-\{x_0\}=D$, le condizioni (7.4.1) e (7.4.2) valgono $\forall\ v \in D$ e il Teorema 7.3.3 può essere riformulato nel seguente modo:

Teorema 7.4.3

Si consideri il problema P dove F e' differenziabile in x_0.

i) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, $\mathrm{int}U \neq \emptyset$ ed F é U-p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin \mathrm{int}U\ , \quad \forall\ v \in D \qquad (7.4.3)$$

ii) Se S e' un insieme localmente stellato in x_0, U é un cono chiuso ed F é U-w.p.cv. in x_0, allora condizione sufficiente affinche' x_0 sia un punto efficiente locale per P e' che risulti

$$J_{F_{x_0}}(v) \notin U^0\ , \quad \forall\ v \in D \qquad (7.4.4)$$

7.5 Problema multiobiettivo non vincolato

Quando S é un insieme aperto, P diviene un problema non vincolato per il quale possono essere specificati i risultati del precedente paragrafo.

Vale il seguente Teorema:

Teorema 7.5.1

Si consideri il problema non vincolato P dove S é un insieme aperto, U é un cono convesso con interno non vuoto ed F é differenziabile in x_0.

Se x_0 é un punto efficiente locale per P allora

$$\exists\ \alpha \in U^{*}\setminus\{0\} \text{ tale che } \alpha^t J_{F_{x_0}} = 0 \qquad (7.5.1)$$

dim.

Poiché $T(S,x_0) = \mathbf{R}^n$, la condizione (7.4.1) diviene equivalente alla seguente:

$$J_{Fx_0}(x-x_0) \notin \text{int}U \,, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n \qquad (7.5.2)$$

Sia W la varieta' lineare definita da $W=\{z=J_{Fx_0}(x-x_0)\,,\ x\in \mathbf{R}^n\}$. La (7.5.2) e' equivalente a $W \cap \text{int}U = \emptyset$ cosicche' esiste un iperpiano che separa W e intU tale che $\alpha^t J_{Fx_0}(x-x_0) = 0$, $\forall\, x\in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in U^* \setminus\{0\}$ e tale condizione implica ovviamente $\alpha^t J_{Fx_0} = 0$.

♦

Il seguente esempio mostra che la condizione (7.5.1) non é in generale sufficiente a garantire l'ottimalità di x_0 anche nel caso in cui $\alpha \in \text{int}U^*$.

Esempio 7.5.1

Si consideri il problema P dove $F(x_1,x_2)=(x_1^3+x_2, -x_2)$, $U=\mathbf{R}^2_+$ ed il punto $x_0=(0,0)$. Risulta $J_{Fx_0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha^t J_{Fx_0}=0$ con $\alpha^t=(1,1)$, cosicche' la (7.5.1) e' verificata ma x_0 non e' punto efficiente locale in quantoche' $F(x_1,0)=(x_1^3,0) \in \mathbf{R}^2_+$ $\forall\, x_1>0$.

Il seguente Teorema evidenzia i diversi ruoli assunti dalla debole pseudoconcavità e dalla pseudoconcavità nello stabilire condizioni sufficienti di ottimalità:

Teorema 7.5.2

Si consideri il problema non vincolato P dove S e' un insieme localmente stellato in x_0 ed F e' differenziabile in x_0.

i) Se $\text{int}U \neq \emptyset$ ed F é U-p.cv. in x_0, allora (7.5.1) é una condizione sufficiente per l'ottimalità di x_0.

ii) Se F é U-w.p.cv. in x_0, e la condizione (7.5.1) vale con $\alpha \in \text{int}U^*$ allora x_0 é un punto efficiente locale per P.

dim.

i) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-p.cv. in x_0, si ha $J_{F_{x_0}}(d) \in \text{int}U$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$, cosicche' $\alpha^t(J_{F_{x_0}}(d)) > 0$ e cio' contraddice la (7.5.1).

ii) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-w.p.cv. in x_0, si ha $J_{F_{x_0}}(d) \in U^0$, $d=\frac{x^*-x_0}{\|x^*-x_0\|}$, cosicche' $\alpha^t(J_{F_{x_0}}(d)) > 0$ e cio' contraddice la (7.5.1).

♦

Quando P e' un problema lineare multiobiettivo, la ii) del Teorema 7.5.2 puo' essere ulteriormente specificata; vale al riguardo il seguente teorema:

Teorema 7.5.3

Si consideri il problema lineare multiobiettivo non vincolato P, dove U e' un cono convesso, chiuso e puntato.

Allora x_0 e' un punto efficiente per P se e solo se

$$\exists\ \alpha \in \text{int}U^* \text{ tale che } \alpha^t J_{F_{x_0}} = 0 \tag{7.5.3}$$

dim.

Se vale la (7.5.3) allora la tesi segue dalla ii) del Teorema 7.5.2 e dal Corollario 7.2.2 , ricordando che F is U-w.p.cv. in x_0.

Se x_0 e' un punto efficiente allora $F(x) \notin F(x_0) + U^0$, $\forall\ x \in \mathbf{R}^n$, e cio' implica, per la linearita' della F, che $J_{F_{x_0}}(x-x_0) \notin U^0$, $\forall\ x \in \mathbf{R}^n$, cosicche', posto $W=\{z=J_{F_{x_0}}(x-x_0)\ ,\ x \in \mathbf{R}^n\}$, si ha $W \cap U^0 = \emptyset$, ovvero $W \cap U = \{0\}$.

Poiche' W e' un cono convesso chiuso, la tesi segue dalla Proprietà 1.1.

♦

Osservazione 7.5.1

Si osservi che la condizione (7.5.3) e' indipendente da x_0 in quanto $J_{F_{x_0}}=F$; conseguentemente una funzione lineare o non ha punti efficienti interni alla regione ammissibile, oppure ogni punto della regione e' efficiente (rispetto ad un cono convesso, chiuso e puntato).

Vediamo adesso come diviene la condizione espressa nel Teorema 7.4.2 nel caso non vincolato. Si ha

$$J_{F_{x_0}}(x-x_0) \notin U, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n, \quad x \neq x_0. \qquad (7.5.4)$$

Si osservi che nel caso scalare ($s=1, U=\mathbf{R}_+$) la (7.5.4) diviene $\nabla F(x_0)(x-x_0)<0$ $\forall x \neq x_0$, relazione che non puo' essere ovviamente verificata. Tale situazione non accade nel caso $s>1$; vale al riguardo il seguente Teorema:

Teorema 7.5.4

Si consideri il problema non vincolato P dove U é un cono chiuso ed F é differenziabile in x_0. Se

i) $s>n$, rank $J_{F_{x_0}}=n$

ii) $\exists\ \alpha \in \mathrm{int}U^*$ tale che $\alpha^t J_{F_{x_0}}=0$

allora x_0 e' punto efficiente locale per P.

dim.

Si deve dimostrare che la (7.5.4) e' verificata $\forall x \neq x_0$, ovvero che $J_{F_{x_0}}(x-x_0) \neq 0$ per $x \neq x_0$, e $J_{F_{x_0}}(x-x_0) \notin U^0$ $\forall x \neq x_0$.

La prima condizione e' implicata dalla i) che impone l'unicita' della soluzione del sistema lineare omogeneo $J_{F_{x_0}}(x-x_0)=0$. Per quanto riguarda la seconda condizione basta osservare che se esistesse $x \in \mathbf{R}^n$ tale che $J_{F_{x_0}}(x-x_0) \in U^0$, si avrebbe $\alpha^t J_{F_{x_0}}(x-x_0) > 0$ in quantoche' $\alpha \in \mathrm{int}U^*$, e cio' e' assurdo.

♦

L'esempio 7.5.1 mostra che la ii) del Teorema 7.5.4 da sola non garantisce l'ottimalita' del punto,mentre il seguente esempio prova che la classe dei problemi verificanti i) e ii) del Teorema 7.5.4 e' non vuota.

Esempio 7.5.2

Si consideri il problema P dove $F(x_1,x_2)=(x_1+x_2, x_1+2x_2, -2x_1-3x_2)$, $S=\mathbf{R}^2$, $U=\mathbf{R}^3_+$. Risulta $J_F=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ con $\mathrm{rank}J_F=2=n < s=3$. La ii) é verificata per $\alpha^t=(1, 1, 1)$.

E' evidente che in questo caso (vedi Osservazione 7.5.1) ogni punto x_0 di $\mathbf{R}^2$ verifica i) e ii) e quindi é efficiente per P.

7.6 Le condizioni di F. John e di Kuhn-Tucker

In questo paragrafo considereremo il problema di estremo vettoriale P nella seguente formulazione:

$$P: \text{ U-max } F(x), \ x \in S = \{x \in Z: G(x) \in V\}$$

dove $Z \subset \mathbf{R}^n$ é un insieme aperto, $F: Z \to \mathbf{R}^s$ e $G: Z \to \mathbf{R}^m$ sono funzioni continue, $s \geq 1$, $m \geq 1$, e $U \subset \mathbf{R}^s$, $V \subset \mathbf{R}^m$ sono coni convessi chiusi puntati di vertice l'origine con $\text{int}U \neq \emptyset$, $\text{int}V \neq \emptyset$.

Sia x_0 un punto ammissibile e supponiamo senza ledere la generalità che $G(x_0) = 0$ (quando $V = \mathbf{R}^m_+$, $G(x_0) = 0$ significa che x_0 è aderente a tutti i vincoli e ciò non é restrittivo se si tiene conto della continuità della G).

Allo scopo di ottenere una formulazione generale delle condizioni di Fritz John e di Kuhn-Tucker e , al tempo stesso, di evidenziare il ruolo che assumono i teoremi di separazione nelle condizioni di ottimalita' e di regolarita', consideriamo dapprima il sottospazio lineare

$$W = \{z = \begin{bmatrix} J_{F_{X_0}} \\ J_{G_{X_0}} \end{bmatrix} (x - x_0), \ x \in \mathbf{R}^n\} \text{ ed i coni } \text{int}U \times \text{int}V, \ \text{int}U \times V, \ U^0 \times V.$$

Vale il seguente Lemma:

Lemma 7.6.1

i) $W \cap (\text{int}U \times \text{int}V) = \emptyset$ se e solo se

$$\exists \ 0 \neq (\alpha_F, \alpha_G), \ \alpha_F \in U^*, \ \alpha_G \in V^*: \ \alpha_F^t J_{F_{X_0}} + \alpha_G^t J_{G_{X_0}} = 0 \qquad (7.6.1)$$

ii) $W \cap (\text{int}U \times V) = \emptyset$ se e solo se

$$\exists \ 0 \neq (\alpha_F, \alpha_G), \ \alpha_F \in U^* \backslash \{0\}, \ \alpha_G \in V^*: \ \alpha_F^t J_{F_{X_0}} + \alpha_G^t J_{G_{X_0}} = 0 \qquad (7.6.2)$$

iii) Se U e V sono coni poliedrici allora $W \cap (U^0 \times V) = \emptyset$ se e solo se

$$\exists \ 0 \neq (\alpha_F, \alpha_G), \ \alpha_F \in \text{int}U^*, \ \alpha_G \in V^*: \ \alpha_F^t J_{F_{X_0}} + \alpha_G^t J_{G_{X_0}} = 0 \qquad (7.6.3)$$

<u>dim</u>.

i) L'ipotesi implica l'esistenza di un iperpiano di separazione che separa gli insiemi convessi W e $U \times V$, per cui esiste $(\alpha_F, \alpha_G) \neq 0$ tale che:

$\alpha_F^t u + \alpha_G^t v \geq 0 \qquad \forall (u,v) \in U \times V \qquad (7.6.4a)$

$\alpha_F^t J_{F_{x_0}}(x-x_0) + \alpha_G^t J_{G_{x_0}}(x-x_0) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \qquad (7.6.4b)$

Ponendo nella (7.6.4a) rispettivamente v=0, u=0, si ha $\alpha_F \in U^*$ e $\alpha_G \in V^*$, mentre dalla (7.6.4b) si deduce che $\alpha_F^t J_{F_{x_0}} + \alpha_G^t J_{G_{x_0}} = 0$.

ii) L'insieme W-(U× V) e' un cono convesso chiuso [16]. Tenuto conto della relazione $W \cap (\text{int}U \times V) = \emptyset$ e del fatto che U×V é un cono convesso chiuso e puntato, si ha

$$(W-(U\times V)) \cap (\text{int}U\times V) = \emptyset \qquad (7.6.5)$$

Di conseguenza ogni iperpiano di supporto nell'origine al cono W-(U×V), é anche di separazione [13] tra gli insiemi convessi W-(U×V) e U×V e quindi verifica la (7.5.4). Se la (7.6.4) fosse verificata solo per $\alpha_F=0$ ogni iperpiano di separazione conterrebbe l'insieme U×0, e quindi W-(U×V), che é l'intersezione di tutti i propri iperpiani di supporto [16] , conterrebbe intU×0 contraddicendo la (7.6.5).

iii) Ripetendo le considerazioni fatte in ii), si ha ora che W-(U×V) é un cono convesso chiuso tale che $(W-(U\times V)) \cap (U^0 \times V) = \emptyset$; di conseguenza la minima (nel senso dell'inclusione) faccia F del cono poliedrico U×V che contiene l'insieme intersezione $(W-(U\times V)) \cap (U\times V)$ ha intersezione vuota con $U^0 \times V$.

La tesi segue dalla esistenza [13] di un iperpiano di separazione tra W-(U×V) e U×V la cui intersezione con U×V è costituita dalla sola faccia F; l'equazione di un tale iperpiano verifica (7.6.4) con $\alpha_F \in \text{int}U^*$, altrimenti conterrebbe necessariamente un elemento di $U^0 \times V$.

♦

Lemma 7.6.2

Sia x_0 un punto efficiente locale per P. Allora:

i) $W \cap (\text{int}U \times \text{int}V) = \emptyset$;

ii) se G e' una funzione lineare $W \cap (\text{int}U \times V) = \emptyset$;

iii) se F e G sono funzioni lineari $W \cap (U^0 \times V) = \emptyset$.

<u>dim</u>

i) Supponiamo per assurdo che esista $x^* \in X$ tale che $J_{F_{X_0}}(x^*-x_0) \in \text{int}U$, $J_{G_{X_0}}(x^*-x_0)) \in \text{int}V$. Poiche' $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x_0+t(x^*-x_0))-F(x_0)}{t} = J_{F_{X_0}}(x^*-x_0)$ e $\lim_{t\to 0^+} \frac{G(x_0+t(x^*-x_0))-G(x_0)}{t} = J_{G_{X_0}}(x^*-x_0)$, esiste $\varepsilon>0$ tale che

$$\left(\frac{F(x_0+t(x^*-x_0))-F(x_0)}{t}, \frac{G(x_0+t(x^*-x_0))-G(x_0)}{t}\right) \in \text{int}U \times \text{int}V \quad \forall\, t \in (0,\varepsilon),$$

e cio' implica $x=x_0+t(x^*-x_0) \in S\ \forall t \in (0,\varepsilon)$, $F(x) \in F(x_0)+\text{int}U$ contraddicendo la locale efficienza di x_0.

ii), iii) Dimostrazione simile alla i) , tenendo presente la linearita' di F e G.

♦

Dal Lemma 7.6.2 e dalla i) del Lemma 7.6.1. si ha il seguente:

Teorema 7.6.1 (Condizioni di ottimalita' di F. John)
Si consideri il problema multiobiettivo P dove F e G sono differenziabili in x_0.
Se x_0 e' un punto efficiente locale per P , allora
$\exists\ 0 \neq (\alpha_F, \alpha_G)$, $\alpha_F \in U^*$, $\alpha_G \in V^*$: $\alpha_F^t J_{F_{X_0}} + \alpha_G^t J_{G_{X_0}} = 0$.

Il seguente Teorema caratterizza alcune classi di funzioni per le quali (7.6.2) e (7.6.3) divengono condizioni necessarie di ottimalita' :

Teorema 7.6.2
Si consideri il problema multiobiettivo P dove F e G sono differenziabili in x_0.
i) Se x_0 e' un punto efficiente locale per P e G e' lineare, allora vale la (7.6.2).
ii) Se x_0 e' un punto efficiente locale per P e le funzioni F, G sono lineari, allora vale la (7.6.3) .
<u>dim.</u>
i) Segue dalla ii) del Lemma 7.6.2 tenuto conto della ii) del Lemma 7.6.1.
ii) Segue dalla iii) del Lemma 7.6.2 tenuto conto della iii) del Lemma 7.6.1.

♦

Osservazione 7.6.1

Nel caso paretiano U= $\mathbf{R}^s_+$, V= $\mathbf{R}^m_+$, la i) del Teorema 7.6.2 implica che almeno una delle componenti di α_F e' strettamente positiva nella (7.6.2) e nel caso scalare (s=1) cio' significa che quando la regione ammissibile e' definita da vincoli lineari le condizioni di Kuhn-Tucker valgono senza vincoli di qualifica.

La ii) del Teorema 7.6.2 implica che per un problema lineare multiobiettivo un punto efficiente e' anche strettamente efficiente .

Il seguente Teorema evidenzia il ruolo della concavita' generalizzata nello stabilire condizioni sufficienti di ottimalita':

Teorema 7.6.3

Si consideri il problema multiobiettivo P dove S e' un insieme localmente stellato in x_0 e le funzioni F e G sono differenziabili in x_0.

i) Se F e' U-w.p.cv. in x_0, G e' V-q.cv. in x_0 e la (7.6.1) vale con $\alpha_F \in \text{int}U^*$, allora x_0 e' un punto efficiente locale per P.

ii) Se F e' U-p.cv. in x_0, G e' V-q.cv. in x_0 e la (7.6.1) vale con $\alpha_F \in U^* \setminus \{0\}$, allora x_0 e' un punto efficiente locale per P.

dim.

i) Supponiamo che esista $x^* \in S$ tale che $F(x^*) \in F(x_0)+U^0$. Poiche' F e' U-w.p.cv. in x_0 e G e' V-q.cv. in x_0 si ha , rispettivamente, $J_{F_{x_0}}(x^*-x_0) \in U^0$ e $J_{G_{x_0}}(x^*-x_0) \in V$ e quindi $\alpha_F^t J_{F_{x_0}}(x^*-x_0)>0$, $\alpha_G^t J_{G_{x_0}}(x^*-x_0) \geq 0$ in quanto $\alpha_F \in \text{int}U^*$ e $\alpha_G \in V^*$. Conseguentemente $\alpha_F^t J_{F_{x_0}}(x^*-x_0)+\alpha_G^t J_{G_{x_0}}(x^*-x_0)>0$ e cio' contraddice la (7.6.1).

ii) Dimostrazione simile alla i).

♦

Osservazione 7.5.2

Nel caso scalare la i) e la ii) del Teorema precedente esprimono il fatto che le condizioni di Kuhn-Tucker divengono sufficienti sotto opportune ipotesi di concavita' generalizzata; si osservi inoltre che nel caso scalare $\alpha_F \in U^* \setminus \{0\}$, $\alpha_F \in \text{int}U^*$ equivalgono entrambe ad avere $\alpha_F>0$. Cio' fa comprendere come, rispetto allo studio delle condizioni di qualifica dei vincoli, il caso vettoriale si presenti piu' articolato rispetto al caso scalare in quanto in quest'ultimo si devono solo distinguere i casi $\alpha_F=0$, $\alpha_F>0$, mentre nel caso vettoriale si ha una gamma di casi intermedi tra i casi limite $\alpha_F=0$ e $\alpha_F \in \mathrm{int}U^*$.

Tenuto conto di tutto cio', (7.6.2) e (7.6.3) possono essere interpretate come possibili formulazioni delle condizioni di Kuhn-Tucker nell'ottimizzazione vettoriale.

References

[1] **Ben-Tal A., Zowe J.**: "Directional derivatives in Nonsmooth Optimization" J.O.T.A. 47,pp. 483-490, 1985.

[2] **Bitran G.R.**: "The structure of admissible points with respect to cone dominance" J.O.T.A 29, pp.573-614, 1981.

[3] **Cambini A., Martein L.** : "Optimality conditions in vector and scalar optimization", report 50, Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1991.

[4] **Cambini A., Martein L.** : "A note about the existence of efficient points" in Generalized Concavity for Economic Applications, P.Mazzoleni ed. Proceedings of the Workshop held in Pisa, 1992

[5] **Cambini A., Martein L.** : "An approach to optimality conditions in vector and scalar optimization", to appear in Mathematical Modelling in Economics, Springer.

[6] **Cambini R.**: "Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato", report 54, Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1992.
[7] **Deubreu G.** : "Valuation equilibrium and Pareto optimum", Proc. Nat. Acad. Sci. USA 40, pp.588-592, 1954.
[8] **Elster K.H, Nehse R.** : "Optimality conditions for some non-convex problems", Lecture Notes in Control and Information Sciences, n.23, Springer-Verlag, 1980.
[9] **Jahn J.** : "Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces", Verlag 1986.
[10] **Kuhn H. W., Tucker A. W.** : "Non linear programming" in Proceeding of the second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkley,Ca., pp.481-492, 1951.
[11] **Luc D.T**: " Theory of Vector Optimization " Springer Verlag 1988.
[12] **Mangasarian O. L.** : "Nonlinear Programming", McGraw-Hill,New York,1969.
[13] **Martein L.**: "Some results on regularity in vector optimization" Optimization vol. 20, pp. 787-798,1989.
[14] **Martein L.** : "Alcune classi di funzioni concave generalizzate nell'ottimizzazione vettoriale" report 63 , Dept. of Statistics and Applied Mathematics, University of Pisa, 1992
[15] **Pareto V.**: "Cours d'Economie Politique", Lausanne, Switzerland, Rouge,1896.
[16] **Rockafellar R. T.** : "Convex Analysis", Princeton, New Jersey,1970.
[17] **Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.** : "Theory of Multiobjective Optimization", Academic Press, 1985.
[18] **Tanino T., Sawaragi Y.** : "Conjugate maps and duality in multiobjective optimization", J.O.T.A. vol.31, pp. 473-499, 1980.