Report n.74

Alcune nuove classi di funzioni concavo-generalizzate

Riccardo CAMBINI

Pisa, settembre 1993
Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40%)

ALCUNE NUOVE CLASSI DI FUNZIONI CONCAVO–GENERALIZZATE

RICCARDO CAMBINI
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia,
Università degli Studi di Pisa.

1. Introduzione

In questo lavoro si introducono cinque nuove classi di funzioni concavo-generalizzate; di esse si studiano le proprietà e le interrelazioni con le classi più note in letteratura [2, 12, 13], le cui definizioni, per ragioni di completezza, sono riportate in nota (1).

Più precisamente, dopo aver evidenziato che le nuove classi sono distinte tra loro e da quelle delle funzioni concave [8, 9, 14, 15], quasi-concave [1, 3, 6, 7, 16-18] e pseudo-concave [4, 5, 11, 16, 18], se ne analizza il comportamento dapprima in ipotesi di semicontinuità superiore e poi in ipotesi di continuità.

Nel lavoro si dimostra inoltre il mantenimento di alcune proprietà strutturali come pure la conservazione delle principali proprietà relative all'ottimizzazione.

---

[1] Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$. La funzione f è detta:

concava [cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione: $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$;

strettamente concava [s.cv] se $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, vale la condizione: $f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$;

quasi-concava [qcv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione: $f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1)$;

strettamente quasi-concava [s.qcv] se $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, vale la: $f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1)$;

semistrettamente quasi-concava [ss.qcv] se $\forall x,y \in C$ vale la: $f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1)$;

pseudo-concava [pcv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione: $f(y) > f(x) \Rightarrow \begin{matrix} \exists \xi(x,y) > 0 \text{ t.c. } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{matrix}$;

strettamente pseudo-concava [s.pcv] se $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, vale la: $f(y) \geq f(x) \Rightarrow \begin{matrix} \exists \xi(x,y) > 0 \text{ t.c. } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{matrix}$;

dove $\xi(x,y)$ non dipende da λ ma soltanto da x ed y. Si ricorda inoltre che una condizione del tipo $A \Rightarrow B$ è verificata se e solo se A non è verificata oppure sia A sia B sono verificate.

2. Cinque nuove classi di funzioni concavo-generalizzate

Si osservi preliminarmente che le funzioni concave e strettamente concave possono essere definite alternativamente in modo simmetrico rispetto alle funzioni quasi-concave.

Proprietà 2.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$.

i) f è concava se e solo se per ogni $x,y \in C$ è verificata la condizione:

$$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

ii) f è strettamente concava se e solo se per ogni $x,y \in C$, $x \neq y$, è verificata la condizione: $f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1)$.

Dim. La necessità dei punti i) e ii) è banale, verifichiamo quindi la sufficienza. Siano $x,y \in C$ qualsiasi, se $x=y$ si ha banalmente $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$; si assuma quindi $x \neq y$: se $f(y) \geq f(x)$ le due tesi sono verificate per ipotesi, se invece $f(x) > f(y)$ si ha per ipotesi $f(y+\alpha(x-y)) \geq f(y)+\alpha(f(x)-f(y))$ $\forall \alpha \in (0,1)$ [$f(y+\alpha(x-y)) > f(y)+\alpha(f(x)-f(y))$ per il punto ii)], ovvero posto $\lambda=1-\alpha$ $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ [$f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$]. ♦

La precedente proprietà permette di introdurre le due seguenti ulteriori classi di funzioni concave.

Definizione 2.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$. f è detta:

semi concava [sm.cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

semistrettamente concava [ss.cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y) > f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) > f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Analogamente alle funzioni concave, f è detta semi convessa o semistrettamente convessa se -f è rispettivamente semi concava o semistrettamente concava.
Anche la definizione di funzione quasi-concava e strettamente quasi-concava può essere "alleggerita" esigendo che la condizione $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ (">" per la stretta quasi-concavità) valga per ogni coppia di punti tali che $f(y) > f(x)$ oppure tali che $f(y)=f(x)$. Per simmetria possiamo così definire le seguenti tre ulteriori classi di funzioni quasi-concave.

Definizione 2.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$. f è detta:

semi quasi-concava [sm.qcv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

quasi-concava generalizzata [g.qcv] se $\forall x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1);$$

strettamente quasi-concava generalizzata [gs.qcv] se $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, si ha:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

3. Relazioni tra le classi

Si dimostrano per esteso solamente le relazioni intercorrenti tra le funzioni semi concave e quelle pseudo-concave e tra le funzioni strettamente concave e quelle strettamente pseudo-concave, dal momento che le altre relazioni si possono dedurre direttamente dalle definizioni. Si inizia con lo studio delle implicazioni esistenti tra la nuova classe delle funzioni semi concave e quelle delle funzioni pseudo-concave e strettamente pseudo-concave.

Teorema 3.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$.

i) Se f è semi concava allora è anche pseudo-concava.

ii) Se f è semi concava ed inoltre $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ $\exists \lambda \in (0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))>f(x)=f(y)$ allora è anche strettamente pseudo-concava.

Dim. i) Si supponga per assurdo che la funzione f sia semi concava ma non pseudo-concava e quindi $\exists x,y \in C$ tali che $f(y)>f(x)$ e $\forall \xi(x,y)>0$ $\exists \lambda \in (0,1)$ tale che $f(x+\lambda(y-x))<f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)<f(x)+\lambda\xi(x,y)$. In particolare per il valore reale $\xi(x,y)=f(y)-f(x)>0$ $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))<f(x)+\bar{\lambda}(f(y)-f(x))$, disuguaglianza assurda per la semi concavità della funzione f.

ii) Per il punto precedente f, essendo semi concava, risulta pseudo-concava; per verificarne quindi la stretta pseudo-concavità si deve solamente dimostrare che $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ esiste un reale $\xi(x,y)>0$ tale che per ogni $\lambda \in (0,1)$ risulta $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)$. Per ipotesi $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ tale che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x)=f(y)$; essendo f sm.cv nell'intervallo di estremi x e $z=x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha che $f(x+\alpha(x+\bar{\lambda}(y-x)-x)) \geq f(x)+\alpha(f(z)-f(x))$ $\forall \alpha \in (0,1)$ ovvero, posto $\alpha=\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$:

$$f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\frac{1}{\bar{\lambda}}\lambda(f(z)-f(x))>f(x)+\frac{1}{\bar{\lambda}}\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x)) \quad \forall \lambda \in (0,\bar{\lambda});$$

analogamente essendo f sm.cv nell'intervallo di estremi y e $z=x+\bar{\lambda}(y-x)$ si ha che $f(y+\alpha(x+\bar{\lambda}(y-x)-y))\geq f(y)+\alpha(f(z)-f(y))$ $\forall\alpha\in(0,1)$ ovvero, posto $\alpha=\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}$:

$$f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}(f(z)-f(x))>f(x)+\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x))\ \forall\lambda\in(\bar{\lambda},1).$$

Posto quindi $k=\min\{\frac{1}{\bar{\lambda}},\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\}>0$, per quanto sopra dimostrato risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))>f(x)+k\lambda(1-\lambda)(f(z)-f(x))\ \forall\lambda\in(0,1),\ \lambda\neq\bar{\lambda};$$

tale condizione però vale anche per $\lambda=\bar{\lambda}$, dal momento che per costruzione è $k\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})=\min\{\frac{\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})}{\bar{\lambda}},\frac{\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})}{1-\bar{\lambda}}\}\leq\frac{1}{2}$ da cui si ottiene $f(z)>f(x)+k\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(f(z)-f(x))$.

Pertanto, posto $\xi(x,y)=k(f(x+\bar{\lambda}(y-x))-f(x))>0$, risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y)\ \forall\lambda\in(0,1),$$

da cui segue la stretta pseudo-concavità di f. ♦

Si osservi che per il precedente teorema una qualsiasi funzione concava priva di tratti costanti è strettamente pseudo-concava; esso inoltre permette di determinare la relazione esistente tra le funzioni strettamente concave e quelle strettamente pseudo-concave, risultato noto e banale sotto ipotesi di differenziabilità della funzione, ma non immediato per funzioni qualsiasi.

Corollario 3.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\to\Re$.
Se f è strettamente concava allora è anche strettamente pseudo-concava.
Dim. Se f è s.cv allora è anche sm.cv (vedi diagramma 1), inoltre $\forall x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ risulta $f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$. Tutte le ipotesi del punto ii) del teorema 3.1 sono soddisfatte e quindi f è s.pcv. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le varie classi di funzioni concavo-generalizzate sono rappresentate graficamente nel seguente diagramma (2).

$$
\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\text{g.qcv}} & \supset & \boxed{\text{qcv}} & \subset & \boxed{\text{sm.qcv}} & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\boxed{\text{gs.qcv}} & \supset & \boxed{\text{s.qcv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}} & & \boxed{\text{qcv}} \\
 & & \cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{s.pcv}} & \subset & \boxed{\text{pcv}} & & \boxed{\text{cv}} \\
 & & & & \cup & & \\
 & & \boxed{\text{cv}} & \subset & \boxed{\text{sm.cv}} & & \\
 & & \cup & & \cup & & \\
 & & \boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{ss.cv}} & &
\end{array}
$$

diagramma 1

I seguenti esempi mostrano che le inclusioni tra le varie classi di funzioni quasi-concave e concave sono proprie; altre inclusioni saranno analizzate in seguito.

Esempi 3.1

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0,1 \\ 1 & \text{per } x=0,1 \end{cases}$: questa funzione è semi quasi-concava ma non è né g.qcv (e quindi neanche qcv) né ss.qcv;

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: questa funzione è qcv (e quindi sm.qcv e g.qcv) ma non è né ss.qcv né gs.qcv (e quindi neanche s.qcv);

iii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ -1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: questa funzione è ss.cv (e quindi sm.cv, ss.qcv, sm.qcv) ma non è g.qcv (e quindi neanche qcv né s.qcv né gs.qcv né cv né s.cv);

iv) f(x)=[x]: la funzione "parte intera di x" risulta qcv (e quindi sm.qcv e g.qcv) ma non ss.qcv né gs.qcv (e quindi neanche s.qcv);

v) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ 1 & \text{per } x\in [0,1[\\ 2 & \text{per } x\in\,]1,2] \end{cases}$: questa funzione è g.qcv ma non è né gs.qcv (e quindi neanche s.qcv) né sm.qcv (e quindi neanche qcv né ss.qcv);

---

2 Il simbolo $\boxed{A} \subset \boxed{B}$ indica che la classe A è contenuta nella classe B.

vi) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ x & \text{per } x\in\,]0,2[\,,\ x\neq 1 \end{cases}$: questa funzione è gs.qvc ma non è sm.qcv (e quindi neanche qcv, s.qcv, ss.qcv);

vii) f(x)=k: la funzione costante è ss.cv ma non è s.pcv e quindi neanche s.cv;

viii) f(x)=x: la funzione identità è cv, e quindi anche sm.cv, ma non è ss.cv, e quindi neanche s.cv.

La seguente proprietà mostra come la quasi-concavità di una funzione si possa esprimere per mezzo delle nuove classi introdotte.

Proprietà 3.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$.
La funzione f è quasi-concava se e solo se è sia semi quasi-concava sia quasi-concava generalizzata.
Dim. L'equivalenza segue direttamente dalle definizioni. ♦

Una proprietà analoga alla 3.1 vale anche per le funzioni strettamente quasi-concave; tali funzioni però possono essere ulteriormente caratterizzate per mezzo delle nuove classi introdotte, evidenziando l'importanza del comportamento della funzione in corrispondenza dei punti $x,y\in C$ per i quali $f(y)=f(x)$.
Vale al riguardo il seguente teorema.

Teorema 3.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$; le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è strettamente quasi-concava;
ii) f è sia semi quasi-concava sia strettamente quasi-concava generalizzata;
iii) f è sia semistrettamente quasi-concava sia quasi-concava generalizzata ed inoltre $\nexists x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)=f(x+\lambda(y-x))\ \forall\lambda\in(0,1)$.

Dim. i)⇒ii) Segue direttamente dalle definizioni (diagramma 1).
ii)⇒iii) Essendo f gs.qcv per definizione è anche g.qcv ed inoltre $\nexists x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)=f(x+\lambda(y-x))\ \forall\lambda\in(0,1)$. Si supponga adesso per assurdo che f sia sm.qcv ma non ss.qcv e che quindi esistano due punti $\bar{x},\bar{y}\in C$ ed un valore reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(\bar{y})>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; applicando la definizione di funzione gs.qcv all'intervallo di estremi $\bar{x}$ e $\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ si ha che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})$ $\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$, sia quindi $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})$; se $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))=f(\bar{y})$, applicando la definizione di funzione gs.qcv all'intervallo di estremi $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{y}$, risulta che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{y})\ \forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$, condizione assurda essendo $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$.

Sia quindi $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\neq f(\bar{y})$; applicando la definizione di funzione sm.qcv all'intervallo di estremi $\bar{y}$ e $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ risulta che:

$$f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))\geq \min\{f(\bar{y}),f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\}>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})) \quad \forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1),$$

condizione nuovamente assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$.

iii)⇒i) Si supponga per assurdo che f sia ss.qcv e g.qcv ma non s.qcv e che quindi esistano due punti $\bar{x},\bar{y}\in C$ ed un $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(\bar{y})=f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$. Per la definizione di funzione g.qcv applicata all'intervallo di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ risulta $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))\geq f(\bar{x})$ $\forall\lambda\in(0,1)$; dal momento quindi che per ipotesi la funzione f non può essere costante nell'intervallo di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{y}$, deve esistere un reale $\tilde{\lambda}\in(0,1)$, $\tilde{\lambda}\neq\bar{\lambda}$, tale che $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})=f(\bar{y})$; applicando allora la definizione di funzione ss.qcv all'intervallo di estremi $\bar{y}$ ed $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed a quello di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ si ha che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})=f(\bar{y})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, $\lambda\neq\tilde{\lambda}$, condizione assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(0,1)$, $\bar{\lambda}\neq\tilde{\lambda}$. ♦

4. Proprietà delle nuove classi

Relativamente alle nuove classi di funzioni introdotte, è possibile determinare numerose proprietà riguardanti la composizione di funzioni ed i punti di massimo globale.

Teorema 4.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali. f è costante se e solo se è sia semistrettamente concava sia semistrettamente convessa.

Dim. Se f è costante la tesi è ovvia in quanto non accade mai che $f(y)>f(x)$, viceversa si supponga per assurdo che f non sia costante e che quindi esistano due punti $x,y\in C$ tali che $f(y)>f(x)$; essendo f sia semistrettamente concava sia semistrettamente convessa risulta:

$$f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(f(y)-f(x))>f(x+\lambda(y-x)) \quad \forall\lambda\in(0,1),$$

condizione banalmente assurda. ♦

Analogamente a quanto accade per la classe delle funzioni concave, queste nuove classi sono chiuse rispetto alle trasformazioni crescenti concave.

Teorema 4.2 Sia $f:C \rightarrow \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ insieme convesso, una funzione a valori reali, sia $g:f(C) \rightarrow \Re$ una funzione concava e sia $F=g^\circ f:C \rightarrow \Re$ la corrispondente funzione composta. Risulta:

i) se f è semi concava e g è nondecrescente allora F è semi concava;

ii) se f è semistrettamente concava e g è crescente allora F è semistrettamente concava.

Dim. i) Siano $x,y \in C$ tali che $F(y)>F(x)$, ovvero tali che $g(f(y))>g(f(x))$; la nondecrescenza di g implica che $f(y)>f(x)$, tale condizione a sua volta implica, per la semi concavità di f, $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$ da cui si ottiene, per la nondecrescenza e la concavità di g:

$$g(f(x+\lambda(y-x))) \geq g(f(x)+\lambda(f(y)-f(x))) \geq g(f(x))+\lambda(g(f(y))-g(f(x))) \quad \forall \lambda \in (0,1),$$

ovvero $F(x+\lambda(y-x)) \geq F(x)+\lambda(F(y)-F(x))$ $\forall \lambda \in (0,1)$, da cui la tesi.

ii) Analoga alla dimostrazione del punto ii). ♦

Le funzioni quasi-concave introdotte verificano delle interessanti proprietà relative ai problemi di massimo del tipo $P:\{\max f(x), x \in C\}$, dove C è un insieme convesso ed $f:C \rightarrow \Re$ è una funzione a valori reali, il cui insieme delle soluzioni ottime sarà denotato con S. Come è noto la convessità dell'insieme S dei massimi globali è garantita dalla classe delle funzioni quasi-concave; in realtà è sufficiente che le funzioni siano quasi-concave generalizzate.

Teorema 4.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \rightarrow \Re$.

i) Se f è quasi-concava generalizzata ed $S \neq \emptyset$ allora S è convesso.

ii) Se f è strettamente quasi-concava generalizzata ed $S \neq \emptyset$ allora S è costituito da un solo punto.

Dim. i) Siano $x,y \in S$; poiché $f(y)=f(x)$ per l'ipotesi di quasi-concavità generalizzata risulta $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)=f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ e quindi, per l'ottimalità di x ed y, deve necessariamente essere $f(x+\lambda(y-x))=f(x)=f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ da cui la tesi.

ii) Se per assurdo esistessero due punti distinti $x,y \in S$ allora, essendo f strettamente quasi-concava generalizzata ed essendo $f(y)=f(x)$, avremmo $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$ il che è assurdo dal momento che f(x) è il massimo valore che la funzione può per ipotesi assumere. ♦

Per sottolineare il teorema precedente si considerino le seguenti funzioni.

Esempi 4.1

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ -1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: è sm.qcv ma non g.qcv, ogni punto $x\neq 0$ è di massimo globale e quindi S non è convesso; in assenza di ipotesi di quasi-concavità generalizzata quindi niente si può dire sulla convessità dell'insieme S.

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ 1 & \text{per } x\in [0,1[\\ 2 & \text{per } x\in]1,2] \end{cases}$: è g.qcv ma non qcv ed il suo insieme S dei massimi globali è convesso; la classe delle funzioni quasi-concave generalizzate raccoglie quindi, rispetto a quella delle quasi-concave, un maggior numero di funzioni aventi un insieme S convesso.

Come è noto, se $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, è una funzione semistrettamente quasi-concava allora un punto di massimo locale è anche un punto di massimo globale, se è strettamente quasi-concava allora un punto di massimo locale è anche l'unico punto di massimo globale, mentre se è quasi-concava allora un punto di massimo locale stretto è anche l'unico punto di massimo globale. La nuova classe delle funzioni semi quasi-concave permette di completare questo panorama relativo all'ottimalità globale di un massimo locale, come è mostrato nel seguente teorema.

Teorema 4.4 Sia $C\subseteq\Re^n$ un convesso ed $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali. Se f è semi quasi-concava allora un punto di massimo locale stretto è anche un punto di massimo globale di f su C.

Dim. Supponiamo per assurdo che $x\in C$ sia un punto di massimo locale stretto ma non globale e che quindi esista un punto $y\in C$ tale che $f(y)>f(x)$; per la semi quasi-concavità di f abbiamo $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e ciò è assurdo dal momento che nega la stretta ottimalità locale di x. ♦

Per puntualizzare meglio il ruolo svolto dalla concavità generalizzata nell'ottimalità globale di un punto si osservino le seguenti funzioni.

Esempi 4.2

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\neq 0 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$: è qcv (e quindi sm.qcv) ma non ss.qcv, ogni punto $x\neq 0$ è di massimo locale non stretto ma non è di massimo globale; si osservi quindi che senza l'ipotesi di semistretta quasi-concavità niente si può dire sull'ottimalità globale di un massimo locale non stretto.

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ per } x\neq 0,1 \\ 1 \text{ per } x=0,1 \end{cases}$: è sm.qcv ma non qcv; i punti $x=0,1$ sono sia di massimo locale stretto sia di massimo globale (che non è quindi unico); si può quindi notare come sia fondamentale l'ipotesi di quasi-concavità per avere un unico massimo globale.

Come è noto ogni trasformazione nondecrescente di una funzione quasi-concava è ancora quasi-concava, mentre ogni trasformazione crescente di una funzione strettamente [semistrettamente] quasi-concava è ancora strettamente [semistrettamente] quasi-concava. Tali risultati valgono anche per le nuove classi introdotte.

Teorema 4.5 Sia $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, una funzione a valori reali, sia $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione nondecrescente e sia $F=g°f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta.
Se f è semi quasi-concava allora anche F è semi quasi-concava.
Dim. Siano $x,y\in C$ tali che $g(f(y))>g(f(x))$, per la nondecrescenza di g risulta $f(y)>f(x)$; poiché f è sm.qcv segue quindi che $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ da cui, sempre per la nondecrescenza di g, si ha $g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, la funzione F è quindi sm.qcv.

♦

Teorema 4.6 Sia $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, una funzione a valori reali, sia $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione crescente e sia $F=g°f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta.
Se f è [strettamente] quasi-concava generalizzata allora anche F è [strettamente] quasi-concava generalizzata.
Dim. Sia $g(f(y))=g(f(x))$, ciò implica per la crescenza di g che $f(y)=f(x)$. Se f è g.qcv si ha $f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e perciò, per la crescenza di g, risulta $g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, ovvero F è g.qcv; se invece f è gs.qcv si ha $f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi, per la crescenza di g, risulta necessariamente $g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, ovvero F è gs.qcv.

♦

5. Relazioni tra le classi in ipotesi di semicontinuità superiore

In questo paragrafo si analizzeranno le relazioni tra le varie classi in ipotesi di semicontinuità superiore della funzione.
Sotto tale ipotesi vale il seguente noto risultato dovuto a Karamardian [10].

Teorema 5.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente.
Se f è semistrettamente quasi-concava allora è anche quasi-concava.

Relativamente alla classe delle funzioni semi concave vale il seguente teorema.

Teorema 5.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente. f è semi concava se e solo se è concava.
Dim. Poiché la sufficienza è banale si deve solo dimostrare che, sotto ipotesi di semicontinuità superiore, una funzione sm.cv è anche cv ovvero che, per la proprietà 2.1, $\forall x,y \in C$, $x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$ si ha $f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; in altre parole si deve verificare che f è g.qcv. Ogni funzione sm.cv è anche ss.qcv (vedasi diagramma 1), per il corollario 5.1 quindi f è anche qcv e quindi g.qcv, da cui la tesi.

♦

L'ipotesi di semicontinuità superiore permette inoltre di caratterizzare in modo semplice le funzioni che differenziano la classe delle funzioni semistrettamente concave da quella delle strettamente concave.

Teorema 5.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \rightarrow \Re$ una funzione semicontinua superiormente. f è semistrettamente concava se e solo se è strettamente concava oppure costante.
Dim. Se f è strettamente concava oppure costante è banalmente semistrettamente concava. Si supponga adesso che la f sia ss.cv ma non s.cv ovvero che, per la proprietà 2.1, esistano due punti $\bar{x},\bar{y} \in C$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, tali che $f(\bar{y})=f(\bar{x})$ ed esista un $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tale che $f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})) \leq f(\bar{x})+\bar{\lambda}(f(\bar{y})-f(\bar{x}))=f(\bar{x})$; per l'ipotesi di superiore semicontinuità f, essendo ss.cv, è anche qcv e quindi poiché $f(\bar{y})=f(\bar{x})$ risulta che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x})) \geq f(\bar{x})$ $\forall \lambda \in (0,1)$, di conseguenza deve essere $f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))=f(\bar{x})$.
Si supponga adesso per assurdo che f non sia costante ed esista un $\tilde{\lambda} \in (0,\bar{\lambda})$ $[\tilde{\lambda} \in (\bar{\lambda},1)]$ tale che $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})=f(\bar{y})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; applicando la definizione di funzione ss.cv nel segmento di estremi $z=\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{y}$ $[\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{x}]$ si ha:

$$f(\bar{y}+\alpha(z-\bar{y}))>f(\bar{y})+\alpha(f(z)-f(\bar{y}))>f(\bar{y})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\ \ \forall\alpha\in(0,1)$$
$$[f(\bar{x}+\alpha(z-\bar{x}))>f(\bar{x})+\alpha(f(z)-f(\bar{x}))>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\ \ \forall\alpha\in(0,1)],$$
da cui si ottiene, posto $\lambda=1-\alpha(1-\bar{\lambda})$ $[\lambda=\alpha\bar{\lambda}]$, $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\ \forall\lambda\in(\bar{\lambda},1)$ $[\forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})]$, condizione assurda poiché $\bar{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)$ $[\bar{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})]$. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le funzioni concavo-generalizzate sono quindi, sotto ipotesi di superiore semicontinuità, quelle espresse dal diagramma 2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \boxed{\text{sm.qcv}} & & \\
 & & & & \cup & & \\
\boxed{\text{g.qcv}} & \supset & & & \boxed{\text{qcv}} & & \\
\cup & & \cup & & & & \cup \\
\boxed{\text{gs.qcv}} & \supset & \boxed{\text{s.qcv}} & & \subset & & \boxed{\text{ss.qcv}} \\
 & & \cup & & & & \cup \\
 & & \boxed{\text{s.pcv}} & & \subset & & \boxed{\text{pcv}} \\
 & & \cup & & & & \cup \\
 & & \boxed{\text{s.cv}} & \subset & \boxed{\text{ss.cv}} & \subset & \boxed{\text{cv} \equiv \text{sm.cv}}
\end{array}$$

diagramma 2

Per verificare che tutte le classi di funzioni quasi-concave sono ancora distinte l'una dall'altra si considerino i seguenti esempi.

Esempi 5.1

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\in]-1,1[\\ 1 & \text{per } x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è sm.qcv ma non è g.qcv (e quindi neanche qcv);

ii) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\in]-1,1[\\ x+3 & \text{per } x\in[-2,2],\ x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è g.qcv ma non è né gs.qcv né sm.qcv (e quindi neanche qcv);

iii) $f(x)=\begin{cases} -|x| & \text{per } x\in]-1,1[\\ x+3 & \text{per } x\in[-2,2],\ x\notin]-1,1[\end{cases}$: questa funzione è gs.qcv (e quindi anche g.qcv) ma non è sm.qcv (e quindi neanche qcv, s.qcv, ss.qcv).

6. Relazioni tra le classi in ipotesi di continuità

In questo paragrafo si vedrà come, in ipotesi di conuinuità, le tre nuove classi di funzioni quasi-concave introdotte coincidono con quelle note.

Teorema 6.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$ una funzione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è quasi-concava generalizzata;

ii) f è quasi-concava;

iii) f è semi quasi-concava.

Dim. i)⇒ii) Si supponga per assurdo che f sia g.qcv ma non qcv e che quindi esistano due punti $\bar{x},\bar{y} \in C$ ed un reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(\bar{y})>f(\bar{x})>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$. Per la continuità di f deve esistere un punto $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$, $\tilde{\lambda} \in (\bar{\lambda},1)$, appartenente al segmento di estremi $\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{y}$, tale che $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))=f(\bar{x})$; applicando quindi la definizione di funzione g.qcv al segmento di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ risulta che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x})) \geq f(\bar{x})>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ $\forall \lambda \in (0,\tilde{\lambda})$, condizione assurda poiché $\bar{\lambda} \in (0,\tilde{\lambda})$.

ii)⇒iii) Segue direttamente dalle definizioni (diagramma 1).

iii)⇒i) Si supponga per assurdo che f sia sm.qcv ma non g.qcv e che quindi esistano due punti $\bar{x},\bar{y} \in C$ ed un reale $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(\bar{y})=f(\bar{x})>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$. Per la continuità di f deve esistere un punto $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$, $\tilde{\lambda} \in (\bar{\lambda},1)$, appartenente al segmento di estremi $\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{y}$, tale che $f(\bar{y})=f(\bar{x})>f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; applicando quindi al segmento di estremi $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{x}$ la definizione di funzione sm.qcv risulta che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x})) \geq f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$ $\forall \lambda \in (0,\tilde{\lambda})$, disuguaglianza assurda dal momento che $\bar{\lambda} \in (0,\tilde{\lambda})$. ♦

Si osservi che già in [18] è stata notata l'equivalenza tra la classe delle funzioni quasi-concave e quella delle semi quasi-concave, senza però definire esplicitamente quest'ultima.

Teorema 6.2 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f:C \to \Re$ una funzione continua. f è strettamente quasi-concava generalizzata se e solo se è strettamente quasi-concava.

Dim. Direttamente dalle definizioni segue che una funzione s.qcv è anche gs.qcv. Si supponga adesso per assurdo che f sia gs.qcv ma non s.qcv e che quindi esistano due punti $\bar{x},\bar{y} \in C$ ed un $\bar{\lambda} \in (0,1)$ tali che $f(\bar{y})>f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; si osservi che f, essendo gs.qcv, è anche g.qcv (diagramma 1) e quindi per il teorema 6.1 è qcv, di conseguenza poiché $f(\bar{y})>f(\bar{x})$ risulta $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))\geq f(\bar{x})\ \forall\lambda\in(0,1)$ e quindi deve essere $f(\bar{y})>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$. Applicando la definizione di funzione gs.qcv all'intervallo di estremi $\bar{x}$ ed $\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ si ha $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})\ \forall\lambda\in(0,\bar{\lambda})$, sia quindi $\tilde{\lambda}\in(0,\bar{\lambda})$ tale che $f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))$; applicando adesso la definizione di funzione qcv all'intervallo di estremi $\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})$ ed $\bar{y}$ si ottiene che $f(\bar{x}+\lambda(\bar{y}-\bar{x}))\geq\min\{f(\bar{x}+\tilde{\lambda}(\bar{y}-\bar{x})),f(\bar{y})\}>f(\bar{x})=f(\bar{x}+\bar{\lambda}(\bar{y}-\bar{x}))\ \forall\lambda\in(\tilde{\lambda},1)$, disuguaglianza assurda dal momento che $\bar{\lambda}\in(\tilde{\lambda},1)$. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le funzioni concavo-generalizzate divengono quindi, sotto ipotesi di continuità, quelle espresse dal seguente diagramma.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \boxed{\text{g.qcv} \equiv \text{qcv} \equiv \text{sm.qcv}} & & & \\
 & \cup & & \cup & \\
 & \boxed{\text{gs.qcv} \equiv \text{s.qcv}} & \subset & \boxed{\text{ss.qcv}} & \\
 & \cup & & \cup & \\
 & \boxed{\text{s.pcv}} & \subset & \boxed{\text{pcv}} & \\
 & \cup & & \cup & \\
 & \boxed{\text{s.cv}} \subset \boxed{\text{ss.cv}} & \subset & \boxed{\text{cv} \equiv \text{sm.cv}} &
\end{array}
$$

diagramma 3

Si ricorda adesso, con alcuni esempi di funzioni continue a valori reali e definite su tutto l'insieme dei reali, che le varie inclusioni sono proprie.

Esempi 6.1

i) $f(x)=k$, $k\in\Re$: la funzione costante è semistrettamente concava (e quindi cv, pcv, ss.qcv ed anche qcv) ma non strettamente quasi-concava (e quindi neanche s.pcv né s.cv);

ii) $f(x)=x$: la funzione identica è concava (e quindi pcv, ss.qcv ed anche qcv) e strettamente pseudo-concava ma non semistrettamente concava (e quindi neanche s.cv);

iii) $f(x)=e^x$: la funzione esponenziale risulta strettamente pseudo-concava (e quindi anche pcv) ma non è concava (e quindi neanche s.cv);

iv) $f(x)=e^{-x^2}$: è strettamente pseudo-concava ma non strettamente concava;

v) $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2} & \text{per } x\leq 0 \\ 1 & \text{per } x>0 \end{cases}$: questa è una funzione pseudo-concava ma non strettamente pseudo-concava;

vi) $f(x)=x^3$: è strettamente quasi-concava (e quindi anche ss.qcv) ma non è pseudo-concava (e quindi neanche s.pcv);

vii) $f(x)=x+x^3$: è una funzione pseudo-concava ma non concava;

viii) $f(x)=x+|x|$: è quasi-concava che non è né semistrettamente quasi-concava né strettamente quasi-concava;

ix) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{per } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{per } x<0 \end{cases}$: è una funzione strettamente quasi-concava ma non strettamente pseudo-concava;

x) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{per } x\geq 0 \\ 0 & \text{per } x<0 \end{cases}$: è quasi-concava ma non semistrettamente quasi-concava;

xi) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{per } x<0 \\ 0 & \text{per } x\in[0,1] \\ -(x-1)^2 & \text{per } x>1 \end{cases}$: è una funzione semistrettamente quasi-concava ma non strettamente quasi-concava.

xii) $f(x)=-x^4$: è una funzione strettamente concava;

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Avriel, Nonlinear programming: analysis and methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[2] M. Avriel, W.E. Diewert, *et al.*, Generalized concavity, Mathematical concepts and methods in science and engineering 36, edited by A. Miele, Plenum Press, New York, 1988.

[3] B. De Finetti, Sulle stratificazioni convesse, Ann. Math. Pura Appl. 30 (1949) 173-183.

[4] W.E. Diewert, Alternative characterizations of six kinds of quasiconcavity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth programming, in "Generalized Concavity in Optimization and Economics", edited by S. Schaible and W.T. Ziemba, Academic Press, New York (1981) 51-93.

[5] W.E. Diewert, M. Avriel, and I. Zang, Nine kinds of quasiconcavity and concavity, J. Econ. Theory 25 (1981) 397-420.

[6] W. Fenchel, Convex cones, sets and functions, Mimeographed lecture notes Princeton University, Princeton, New Jersey, 1951.

[7] W. Ginsberg, Concavity and quasi-concavity in economics, J. Econ. Theory 6 (1973) 596-605.

[8] O. Hölder, Über einen Mittelwertsatz, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen (1889) 38-47.

[9] J.L.W.V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalities entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906) 175-193.
[10] S. Karamardian, Duality in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. 20 (1967) 344-358.
[11] O.L. Mangasarian, Pseudo-convex functions, J. SIAM Control Ser. A 3 (1965) 281-290.
[12] O.L. Mangasarian, Nonlinear programming, McGraw-Hill, New York, 1969.
[13] B. Martos, Nonlinear programming theory and methods, North-Holland, Amsterdam, 1975.
[14] H. Minkowsky, Geometrie der zahlen, Teubner, Leipzig, 1910.
[15] H. Minkowsky, Theorie der konvexen korper, inbesondere begründung ihres oberflächenbegriffs, Gesammelte abhandlungen II Teubner, Leipzig, 1911.
[16] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.
[17] J. Ponstein, Seven kinds of convexity, SIAM Rev. 9 (1967) 115-119.
[18] W.A. Thompson and D.W. Parke, Some properties of generalized concave functions, Operation Research 21 (1973) 305-313.