Report n.78

Condizioni di efficienza locale nella ottimizzazione vettoriale

Riccardo CAMBINI

Pisa, aprile 1994
Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40%)

CONDIZIONI DI EFFICIENZA LOCALE NELLA OTTIMIZZAZIONE VETTORIALE

RICCARDO CAMBINI
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia,
Università degli Studi di Pisa, via Ridolfi 10, 56124 Pisa

1. Introduzione

In questo lavoro si determinano alcune condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per un problema di estremo vettoriale, che permettono di caratterizzare punti localmente efficienti, debolmente efficienti oppure strettamente efficienti; l'approccio seguito estende quello proposto in [3] e poi ripreso in [2].
Le condizioni di ottimalità sono espresse tramite l'appartenenza ad un opportuno cono di riferimento C delle derivate direzionali della funzione obiettivo rispetto alle direzioni appartenenti al cono tangente alla regione ammissibile nel punto preso in esame.
In questo lavoro sono inoltre introdotte nuove classi di funzioni vettoriali concavo-generalizzate, che estendono quelle definite in [2, 4], evidenziando il ruolo di ciascuna di esse nell'ottimizzazione vettoriale. In particolare, per ciascuno dei tre tipi introdotti di efficienza, vengono messe in relazione l'ottimalità locale e globale di un punto, viene analizzata l'ottimalità di "punti critici vettoriali" ed infine viene confrontata l'ottimalità locale con l'ottimalità rispetto alle direzioni ammissibili.

2. Generalità

Si consideri il seguente problema di estremo vettoriale:

$$P: \begin{cases} C\_\max F(x) \\ x \in S \end{cases},$$

dove F è una funzione vettoriale $F: A \to \Re^m$, con A aperto di $\Re^n$, $S \subseteq A$ è la regione ammissibile del problema e $C \subseteq \Re^m$ è un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto.

In questo lavoro saranno esaminati tre diversi tipi di efficienza, indotti dal cono C, dal cono C privato dell'origine e dall'interno del cono C, in accordo con la seguente definizione:

Definizione 2.1 Si consideri il problema P e si ponga $C^0 = C \setminus \{0\}$ e $C^{00} = \text{int}(C)$. Un punto $x_0 \in S$ sarà detto:

i) *C^{00}-efficiente* ovvero *efficiente debole* se $\nexists y \in S$ tale che $F(y) \in F(x_0) + C^{00}$,

ii) *C^0-efficiente* ovvero *efficiente* se $\nexists y \in S$ tale che $F(y) \in F(x_0) + C^0$,

iii) *C-efficiente* ovvero *efficiente stretto* se $\nexists y \in S$, $y \neq x_0$, tale che $F(y) \in F(x_0) + C$.

Un punto $x_0 \in S$ sarà altresì detto localmente efficiente [debole, stretto] se esiste un intorno I di x_0 per cui le precedenti proprietà sono verificate in $I \cap S$.

Ovviamente se $x_0 \in S$ è efficiente stretto è anche efficiente e se è efficiente è anche efficiente debole (poiché $C^{00} \subseteq C^0 \subseteq C$).

In seguito, per esprimere in modo conciso e formale più risultati, sarà utilizzata la notazione C^*-efficiente, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$, per denotare che si considera una qualsiasi delle tre definizioni di efficienza.

Nell'approccio che verrà seguito per caratterizzare la C^*-efficienza di un punto x_0, sarà necessario studiare, a partire da una successione $\{x_k\} \subset S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 e tale che $\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} = d$, l'esistenza del limite della successione $\frac{F(x_k) - F(x_0)}{\|x_k - x_0\|}$. L'importanza della classe di funzioni che sarà di seguito definita, stà nel fatto che per esse un tale limite esiste ed è uguale alla derivata direzionale rispetto alla direzione d della funzione F nel punto x_0.

Definizione 2.1 Si consideri una funzione vettoriale $F:A \rightarrow \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, direzionalmente derivabile in un punto $x_0 \in A$.
F è detta *direzionalmente derivabile con regolarità* in x_0 se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{\|h\|} = d \quad \text{implica} \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{\|h\|} = \frac{\partial F}{\partial d}(x_0). \tag{2.1}$$

La condizione (2.1) è più forte della derivabilità direzionale e più debole della differenziabilità, come mostra il seguente teorema, la cui dimostrazione è analoga a quella presentata in [3] per il caso scalare e si può ritrovare anche in [2].

Teorema 2.1 Si consideri una funzione vettoriale $F:A \rightarrow \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, ed un punto $x_0 \in A$. Se vale almeno una delle seguenti condizioni:

i) F è direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana in x_0 ([1]),

ii) F è differenziabile in x_0,

allora F è direzionalmente derivabile con regolarità in x_0.

I seguenti esempi evidenziano come la classe delle funzioni direzionalmente derivabili con regolarità sia più generale della classe di funzioni differenziabili e della classe di funzioni direzionalmente derivabili e localmente Lipschitziane; mostreranno inoltre come anche queste ultime due classi siano distinte tra loro.

Esempi 2.1 Si considerino le seguenti funzioni scalari definite su tutto l'insieme dei reali: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|^3}\sin\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$, $g(x)=|x|$ ed $h(x)=f(x)+g(x)$.

Tutte e tre le funzioni sono direzionalmente derivabili con regolarità in $x_0=0$; in particolare la funzione f è in $x_0=0$ differenziabile ma non localmente Lipschitziana, la funzione g è in $x_0=0$ direzionalmente derivabile e localmente Lipschitziana ma non differenziabile, mentre la funzione h è direzionalmente derivabile ma non è né localmente Lipschitziana né differenziabile.

---

[1] Si ricordi che $F:A \rightarrow \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, è detta localmente Lipschitziana in un punto $x_0 \in A$ se esiste un intorno $U \subseteq A$ di x_0 ed una costante reale $L>0$ tale che $\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\| \ \forall x,y \in U$.

3. Condizioni di efficienza locale

In questo paragrafo la C*-efficienza di un punto x_0 sarà caratterizzata per mezzo delle direzioni di $T(S,x_0)$, cono tangente alla regione ammissibile S nel punto x_0 [1]; l'approccio seguito è analogo a quello proposto in [2, 3] e permette di estenderne i risultati. Il cono $T(S,x_0)$ può essere espresso nella seguente forma più utile ai fini di questo lavoro (2):

Definizione 3.2 Dato un insieme non vuoto $S \subseteq \Re^n$ ed un punto x_0 appartenente alla chiusura di S, si dice cono tangente ad S nel punto x_0 il cono $T(S,x_0)$ di vertice l'origine definito come:

$$T(S,x_0)=\{0\} \cup \{x \in \Re^n: x=\lambda d, \lambda>0, d \in \mathcal{D}_T\},$$

dove $\mathcal{D}_T$ denota l'insieme delle direzioni di $T(S,x_0)$, ovvero:

$$\mathcal{D}_T=\{d \in \Re^n: \exists \{x_k\} \subset S \backslash \{x_0\}, x_k \to x_0, d=\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\}.$$

Osservazione 3.1 Nel caso in cui la regione ammissibile S sia costituita dal solo punto x_0, si ha $T(S,x_0)=\{0\}$ e $\mathcal{D}_T=\emptyset$; in tale situazione x_0 è ovviamente punto efficiente stretto del problema. Per evitare questo caso banale si supporrà in seguito che x_0 sia punto di accumulazione per S o, equivalentemente, che sia $\mathcal{D}_T \neq \emptyset$; sotto tale ipotesi il cono tangente si può pertanto esprimere nella forma:

$$T(S,x_0)=\{x \in \Re^n: x=\lambda d, \lambda \geq 0, d \in \mathcal{D}_T\}.$$

Come è stato puntualizzato in [3], non vi è alcuna relazione tra la C*-efficienza locale di un punto rispetto alla regione ammissibile e la sua C*-efficienza rispetto al cono tangente $T(S,x_0)$ oppure rispetto alle singole direzioni del cono tangente.

Per poter caratterizzare la C*-efficienza del punto sarà pertanto necessario approfondire lo studio della funzione obiettivo relativamente a quelle direzioni del cono tangente che "creano problemi", ovvero quelle rispetto alle quali la derivata direzionale della funzione obiettivo appartiene alla frontiera del cono C.

---

2 In letteratura si definisce cono tangente ad S nel punto x_0 il cono $T(S,x_0)$ di vertice l'origine tale che $T(S,x_0)=\{x \in \Re^n: \exists \{x_k\} \subset S, x_k \to x_0, \exists \{\lambda_k\} \subset \Re^{++}, \lambda_k \to +\infty, x=\lim_{k \to +\infty} \lambda_k(x_k-x_0)\}$.

Come nel caso scalare tale studio verrà effettuato, data una direzione $d \in \Re^n$ ($\|d\|=1$) ed un valore reale $\varepsilon>0$, per mezzo dei seguenti coni convessi:

i) $K(d,\varepsilon)$ è il cono di vertice l'origine tale che:

$$K(d,\varepsilon)=\{x \in \Re^n: x=\lambda y,\ \lambda \geq 0,\ y \in \Re^n \text{ tale che } \|y-d\|<\varepsilon\};$$

ii) r_d è il raggio $\{x \in \Re^n: x=\lambda d,\ \lambda \geq 0\}$ generato dalla direzione $d \in \Re^n$.

E' ora possibile caratterizzare la C*-efficienza locale di un punto per mezzo del comportamento della funzione F sulle direzioni del cono tangente.

Teorema 3.2 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$. Il punto x_0 è localmente C*-efficiente rispetto alla regione S se e solo se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ ed inoltre per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C \setminus C^{00}$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è localmente C*-efficiente rispetto alla regione $S \cap (x_0+K(d,\varepsilon))$.

Dim. Sia x_0 localmente C*-efficiente rispetto alla regione S. Banalmente lo è anche rispetto alle regioni del tipo $S \cap (x_0+K(d,\varepsilon))$, con $\varepsilon>0$ qualsiasi.

Per definizione inoltre $F(y) \notin F(x_0)+C^*$ $\forall y \in I \cap S$, con I opportuno intorno di x_0; in particolare, per la definizione dell'insieme $\mathcal{D}_T$, è possibile determinare per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ una successione $\{x_k\} \subset I \cap S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0, tale che $\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}=d \in \mathcal{D}_T$ ed $F(x_k) \notin F(x_0)+C^{00}$; si ha quindi $\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|} \notin C^{00}$ da cui risulta, essendo F direzionalmente derivabile con regolarità ed essendo C^{00} un insieme aperto, $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = \lim_{k \to +\infty} \frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|} \notin C^{00}$.

Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente C*-efficiente rispetto alla regione S. E' allora possibile determinare una successione $\{x_k\} \subset S \setminus \{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $F(x_k) \in F(x_0)+C^*$; tale successione permette di definire la successione di direzioni $d_k=\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}$ appartenenti alla sfera unitaria $\{d \in \Re^n: \|d\|=1\}$ che è un insieme compatto, di conseguenza dalla successione $\{x_k\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ convergente ad x_0 e tale che $\tilde{d}= \lim_{j \to +\infty} d_{k_j} = \lim_{j \to +\infty} \frac{x_{k_j}-x_0}{\|x_{k_j}-x_0\|} \in \mathcal{D}_T$; per semplicità di notazione si può quindi supporre, senza perdere la generalità, che sia $\tilde{d}= \lim_{k \to +\infty} \frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|} \in \mathcal{D}_T$.

Poiché $F(x_k) \in F(x_0)+C^*$ si ha $\frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|} \in C^*$ e quindi, essendo C chiuso ed F direzionalmente derivabile con regolarità, $\frac{\partial F}{\partial \tilde{d}}(x_0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{F(x_k)-F(x_0)}{\|x_k-x_0\|} \in C$; per ipotesi quindi, poiché $\tilde{d} \in \mathcal{D}_T$, deve essere $\frac{\partial F}{\partial \tilde{d}}(x_0) \in C \setminus C^{00}$.

Fissato un valore reale $\varepsilon>0$, poiché $\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|} = \tilde{d} \in \mathcal{D}_T$, la successione $\{x_k\}$ convergente ad x_0 deve essere, da un certo indice in poi, contenuta in $(S\setminus\{x_0\}) \cap (x_0+K(\tilde{d},\varepsilon))$ ma ciò è assurdo dal momento che per ipotesi x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto ad $S \cap (x_0+K(\tilde{d},\varepsilon))$. ♦

Si osservi che il precedente teorema altro non è che una forma compatta per tre teoremi identici, relativi alle condizioni necessarie e sufficienti di efficienza debole, efficienza ed efficienza stretta di un punto.

Il Teorema 3.2 permette di stabilire direttamente le seguenti condizioni necessarie di C^{00}-efficienza e sufficienti di C-efficienza; si osservi che tali condizioni sono state stabilite in [2] limitatamente però ai punti localmente C^0-efficienti.

Corollario 3.1 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S.
Se x_0 è localmente efficiente debole allora $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C^{00}$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$.

Corollario 3.2 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità nel punto x_0 di accumulazione per S.
Se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \notin C$ $\forall d \in \mathcal{D}_T$ allora x_0 è localmente efficiente stretto.

Osservazione 3.2 Nel caso in cui la funzione F sia nel punto x_0 debolmente differenziabile ([3]), tutti i risultati precedenti possono essere riscritti semplicemente sostituendo la derivata direzionale $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)$ con il prodotto $J_F(x_0)d$.

Nel caso invece in cui la regione ammissibile S sia un cono chiuso D di vertice x_0 (come accade quando x_0 è il vertice di una regione poliedrica) risulta $\mathcal{D}_T$=D e quindi tutti i risultati precedenti si possono esprimere utilizzando direttamente le direzioni ammissibili di D in luogo di quelle del cono tangente.

---

[3] Si ricordi che una funzione $F: A \to \Re^m$, con $A \subseteq \Re^n$ aperto, direzionalmente derivabile nel punto $x_0 \in A$ è detta *debolmente differenziabile* in x_0 (secondo Gateaux) se esiste una matrice $M(F,x_0)$, dipendente da F e da x_0, tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = M(F,x_0)d$ $\forall d \in \Re^n$, $\|d\|=1$; si ricordi inoltre che in tal caso è $M(F,x_0)=J_F(x_0)d$.

Nel caso in cui x_0 sia interno ad S ed il cono C sia convesso i precedenti risultati possono essere notevolmente particolarizzati.
Per maggior chiarezza si ricordano di seguito le ipotesi sotto le quali verrà considerato d'ora in avanti il problema P:

i) il cono C di vertice l'origine è, oltre che chiuso e con interno non vuoto, anche convesso;
ii) x_0 è interno ad S e quindi il cono tangente $T(S,x_0)$ coincide con $\Re^n$;
iii) in x_0 la funzione obiettivo F è, oltre che direzionalmente derivabile con regolarità, anche debolmente differenziabile.

Nello studio successivo sarà utilizzato il seguente insieme:

$$W=\{w=\mu\frac{\partial F}{\partial d}(x_0),\ \mu\in\Re,\ d\in\mathcal{D}_T\},$$

che per l'ipotesi di debole differenziabilità può essere equivalentemente espresso nella seguente forma, che evidenzia come esso sia un sottospazio vettoriale:

$$W=\{w=\mu\, J_F(x_0)d,\ \mu\in\Re,\ d\in\mathcal{D}_T\}=\{w=J_F(x_0)v,\ v\in\Re^n\}.$$

Vale il seguente teorema ([4]) che particolarizza al caso in esame le condizioni $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ e $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\ \forall d\in\mathcal{D}_T$.

Teorema 3.3 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 interno ad S e che il cono C sia convesso. Risulta:

i) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ se e solo se $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$;
ii) C è un cono puntato e $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\ \forall d\in\mathcal{D}_T$ se e solo se rango$[J_F(x_0)]=n$ con $n<m$ ed inoltre $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$.

---

[4] Si ricordi che dato un cono non banale $C\subset\Re^m$ si definisce *polare positivo di C* il cono chiuso convesso $C^+=\{\alpha\in\Re^m:\ \alpha^T c\geq 0\ \forall c\in C\}$ e si definisce inoltre *polare positivo stretto di C* il cono convesso $C^{++}=\{\alpha\in\Re^m:\ \alpha^T c>0\ \forall c\in C,\ c\neq 0\}\subset C^+$. Si ricordi inoltre che se C è chiuso, convesso e con interno non vuoto allora $C^+\setminus\{0\}\neq\emptyset$; se inoltre C è puntato allora $C^{++}\neq\emptyset$.

Dim. i) Per la sufficienza si supponga per assurdo che esista un vettore $\bar{d}\in \mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0)\in C^{00}$; per una nota proprietà dei coni convessi ([5]) deve essere $\alpha^T\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) = \alpha^T J_F(x_0)\bar{d} > 0$, condizione assurda poiché per ipotesi è $\alpha^T J_F(x_0)=0$.

Per la necessità si osservi inizialmente che la condizione $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in \mathcal{D}_T$ implica che $W\cap C^{00}=\emptyset$, di conseguenza per un noto teorema di separazione tra insiemi convessi ([6]) $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T w\leq 0$ $\forall w\in W$; poiché però per ogni vettore $w\in W$ anche il vettore $-w\in W$ deve necessariamente essere $\alpha^T w=0$ $\forall w\in W$, ovvero $\alpha^T J_F(x_0)v=0$ $\forall v\in \Re^n$; di conseguenza $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$.

ii) Per la sufficienza si supponga per assurdo che esista un vettore $\bar{d}\in \mathcal{D}_T$ tale che $\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0)\in C\backslash\{0\}=C^0$; per ipotesi deve essere $\alpha^T\frac{\partial F}{\partial \bar{d}}(x_0) = \alpha^T J_F(x_0)\bar{d} > 0$, condizione assurda poiché, sempre per ipotesi, è $\alpha^T J_F(x_0)=0$; il cono C risulta inoltre puntato poiché in caso contrario $\exists c\in C^0$ tale che $-c\in C^0$ e quindi si avrebbe la condizione assurda $\alpha^T c>0$ e $\alpha^T(-c)>0$. Per la necessità si osservi inizialmente che la condizione $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ $\forall d\in \mathcal{D}_T$ implica che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0) = J_F(x_0)d\neq 0$ $\forall d\in \mathcal{D}_T$, ovvero $J_F(x_0)u\neq 0$ $\forall u\in \Re^n$, $u\neq 0$; in altre parole tutte le colonne di $J_F(x_0)$ sono linearmente indipendenti, il che implica che rango$[J_F(x_0)]=n$ con $n\leq m$.
Risulta inoltre $n<m$, poiché se fosse $n=m$ si avrebbe:

$$W=\{w=\mu\frac{\partial F}{\partial d}(x_0),\ \mu\in\Re,\ d\in \mathcal{D}_T\}=\{w=J_F(x_0)v,\ v\in\Re^n\}=\Re^n,$$

e quindi non potrebbe essere $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ $\forall d\in \mathcal{D}_T$.

La condizione $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ $\forall d\in \mathcal{D}_T$ implica inoltre che $W\cap C=\{0\}$, di conseguenza per un noto teorema di separazione tra coni chiusi convessi (W essendo un sottospazio vettoriale è in particolare un cono chiuso convesso) $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T w\leq 0$ $\forall w\in W$; poiché però per ogni vettore $w\in W$ anche il vettore $-w\in W$ si ottiene, analogamente al punto i), che $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$. ♦

---

[5] Sia $C\subset\Re^m$ un cono con interno non vuoto tale che $C^+\backslash\{0\}\neq\emptyset$. $\forall\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, risulta $\alpha^T c>0$ $\forall c\in C^{00}$.

[6] Sia $C\subset\Re^m$ un cono non banale chiuso, convesso e con interno non vuoto e sia $W\subset\Re^m$ un cono non banale, convesso e non vuoto. Se $C^{00}\cap W=\emptyset$ allora $\exists\alpha\in C^+$, $\alpha\neq 0$, tale che $\alpha^T w\leq 0$ $\forall w\in W$. Se inoltre C è puntato e W è chiuso, risulta che: se $C\cap W=\{0\}$ allora $\exists\alpha\in C^{++}$ tale che $\alpha^T w\leq 0$ $\forall w\in W$.

Corollario 3.3 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 interno ad S e che il cono C sia convesso; sia inoltre $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$.
Il punto x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione S se e solo se $\exists \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$, tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$ ed inoltre per ogni direzione $d \in \mathcal{D}_T$ tale che $J_F(x_0)d \in C \setminus C^{00}$ esiste un $\varepsilon>0$ tale che il punto x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione $S \cap (x_0+K(d,\varepsilon))$.

Il Teorema 3.3 permette inoltre di ottenere, dai Corollari 3.1 e 3.2, le seguenti condizioni necessarie di C^{00}-efficienza e sufficienti di C-efficienza.
Si osservi che tali condizioni sono state stabilite in [2] limitatamente però ai punti localmente C^0-efficienti; si osservi inoltre che la seguente condizione necessaria può essere interpretata come possibile generalizzazione a livello vettoriale del concetto, proprio del caso scalare, di punto critico.

Corollario 3.4 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 interno ad S e che il cono C sia convesso.
Condizione necessaria affinché il punto x_0 sia localmente C^{00}-efficiente (ovvero debolmente efficiente) rispetto alla regione S è la seguente:

$$\exists \alpha \in C^+,\ \alpha \neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0)=0.$$

Corollario 3.5 Si consideri il problema P e si supponga che F sia direzionalmente derivabile con regolarità e debolmente differenziabile nel punto x_0 interno ad S e che il cono C sia convesso.
Se $\text{rango}[J_F(x_0)]=n$ con $n<m$ ed inoltre $\exists \alpha \in C^{++}$ tale che $\alpha^T J_F(x_0)=0$ allora x_0 è localmente efficiente stretto.

4. Regione stellata: condizioni tramite concavità generalizzata

In questo paragrafo si assume che la regione ammissibile S sia un insieme stellato di vertice x_0; in tale ipotesi la caratterizzazione della C*-efficienza del punto x_0 verrà determinata per mezzo della concavità-generalizzata vettoriale della funzione obiettivo F.

L'insieme delle direzioni ammissibili relative al vertice x_0 verrà denotato con $\mathcal{D}$; si osservi che in generale questo insieme è contenuto ma non coincide con l'insieme delle direzioni del cono tangente $T(S,x_0)$, ovvero $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_T$ con $\mathcal{D}_T \neq \mathcal{D}$.

Per avere uno studio organico del ruolo svolto dalla concavità-generalizzata vettoriale nella determinazione delle condizioni di C*-efficienza, si definiscono nuove classi di funzioni vettoriali concavo-generalizzate in un punto, che estendono quelle definite in [2, 4], evidenziando l'importanza di ognuna di esse.

Definizione 4.1 Sia $F:S \to \Re^m$, con $S \subset \Re^n$ insieme stellato di vertice x_0, e sia C un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano inoltre $C^*, C^\# \in \{C, C^0, C^{00}\}$. La funzione F è detta localmente $(C^*,C^\#)$-quasiconcava in x_0 [$(C^*,C^\#)$.qcv] se esiste un intorno $I \subset \Re^n$ di x_0 tale che per ogni $x \in S \cap I \setminus \{x_0\}$ è verificata la seguente condizione:

$$F(x) \in F(x_0) + C^* \Rightarrow F(x_0 + \lambda(x - x_0)) \in F(x_0) + C^\# \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Definizione 4.2 Sia $F:S \to \Re^m$, con $S \subset \Re^n$ insieme stellato di vertice x_0, una funzione direzionalmente derivabile in x_0 e sia C un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto; siano inoltre $C^*, C^\# \in \{C, C^0, C^{00}\}$. La funzione F è detta localmente $(C^*,C^\#)$-pseudoconcava in x_0 [$(C^*,C^\#)$.pcv] se esiste un intorno $I \subset \Re^n$ di x_0 tale che per ogni $x \in S \cap I \setminus \{x_0\}$ è verificata la seguente condizione:

$$F(x) \in F(x_0) + C^* \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial d}(x_0) \in C^\# \text{ con } d = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Come è noto, a livello scalare se un punto è di massimo locale oppure di massimo locale stretto per una funzione rispetto ad una certa regione convessa, allora a seconda della concavità generalizzata della funzione stessa (quasi-concavità, semistretta quasi-concavità, ecc. ecc.) il punto può essere globalmente di massimo oppure di massimo stretto. Tale proprietà si può estendere anche alle funzioni vettoriali grazie alle classi di tipo quasiconcavo definite nella 4.1; in pratica, a seconda della ipotesi di concavità generalizzata relativa alla funzione F, risulta che l'efficienza locale, anche debole o stretta, implica un certo grado di efficienza anche a livello globale.

Teorema 4.1 Si consideri il problema P, con S insieme stellato di vertice x_0, siano $C^*, C^\# \in \{C, C^0, C^{00}\}$ e si supponga inoltre che il punto x_0 sia localmente $C^\#$-efficiente. Se la funzione F è $(C^*, C^\#)$-quasiconcava in x_0 allora il punto x_0 è anche C^*-efficiente.

Dim. Si supponga per assurdo che x_0 sia localmente $C^\#$-efficiente ma non globalmente C^*-efficiente, e che quindi esista un punto $x \in S$, $x \neq x_0$, tale che $F(x) \in F(x_0) + C^*$; per la definizione di funzione $(C^*, C^\#)$.qcv in x_0 risulta quindi che $F(x_0 + \lambda(x - x_0)) \in F(x_0) + C^\#$ $\forall \lambda \in (0,1)$, condizione assurda poiché nega la locale $C^\#$-efficienza di x_0. ♦

E' noto anche che, nel caso scalare, sotto ipotesi di pseudo-concavità un punto critico diviene anche di massimo assoluto oppure massimo assoluto stretto.
Il teorema seguente, che sfrutta le funzioni di tipo pseudoconcavo definite nella 4.2, si può interpretare come naturale estensione al caso vettoriale di tali risultati.

Teorema 4.2 Si consideri il problema P, con S insieme stellato di vertice x_0 ed F differenzabile in x_0; sia inoltre C convesso e puntato.

i) Si supponga che F sia (C^*, C^{00})-pseudoconcava, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$; allora x_0 è C^*-efficiente se verifica la seguente condizione:
$$\exists \alpha \in C^+, \alpha \neq 0, \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0) = 0.$$

ii) Si supponga che F sia (C^*, C^0)-pseudoconcava, con $C^* \in \{C, C^0, C^{00}\}$; allora x_0 è C^*-efficiente se verifica la seguente condizione:
$$\exists \alpha \in C^{++} \text{ tale che } \alpha^T J_F(x_0) = 0.$$

Dim. Si supponga per assurdo che x_0 non sia C^*-efficiente, ovvero che $\exists x \in S$ tale che $F(x) \in F(x_0) + C^*$.

i) Dalla (C^*, C^{00}).pseudoconcavità di F si ha $J_F(x_0)(x - x_0) \in C^{00}$; di conseguenza $\alpha^T J_F(x_0)(x - x_0) > 0$ $\forall \alpha \in C^+$, $\alpha \neq 0$ (5), condizione che contraddice l'ipotesi.

ii) Essendo la funzione F (C^*, C^0).pcv si ha $J_F(x_0)(x - x_0) \in C^0$; di conseguenza $\alpha^T J_F(x_0)(x - x_0) > 0$ $\forall \alpha \in C^{++}$, condizione che contraddice l'ipotesi. ♦

Come è già stato precedentemente osservato, non vi è in generale alcuna relazione, anche a livello scalare, tra la C^*-efficienza locale rispetto ad una regione e la C^*-efficienza lungo le singole direzioni ammissibili; assumendo invece delle ipotesi di concavità generalizzata è possibile caratterizzare la C^*-efficienza locale per mezzo del comportamento della funzione lungo tali direzioni.

Nei teoremi successivi saranno considerate tutte le classi di funzioni di tipo pseudoconcavo definite nella 4.2 e le funzioni $(C^*,C^\#)$-quasiconcave tali che $C^\#\subseteq C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$, ovvero tali che:

$$C^*\in\{C,C^0,C^{00}\} \quad \text{e} \quad C^\#\in\begin{cases}\{C,C^0,C^{00}\} & \text{se } C^*=C\\ \{C^0,C^{00}\} & \text{se } C^*=C^0\\ \{C^{00}\} & \text{se } C^*=C^{00}\end{cases}. \tag{4.1}$$

Teorema 4.3 Si consideri il problema P, con S insieme stellato di vertice x_0; siano inoltre C^* e $C^\#$ i simboli definiti nella (4.1). Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione S;

ii) x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}$, ed F è localmente $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

Se inoltre F è direzionalmente derivabile in x_0 le precedenti condizioni sono equivalenti alla successiva:

iii) $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}$, x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C\backslash C^{00}$ ed inoltre F è localmente $(C^*,C^\#)$.qcv in x_0 su S.

Dim. i)⇔ii) La necessità è ovvia per la relazione esistente tra C^* e $C^\#$ e per la definizione di $(C^*,C^\#)$.quasiconcavità. Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente C^*-efficiente rispetto ad S e che quindi esista una successione $\{x_k\}\subset S\backslash\{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $F(x_k)\in F(x_0)+C^*$; ciò implica che, da un certo indice k in poi, si ha per la locale $(C^*,C^\#)$.qcv di F che $F(x_0+\lambda(x_k-x_0))\in F(x_0)+C^\#$ $\forall\lambda\in(0,1)$, condizione assurda in quanto x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi.

ii)⇔iii) La necessità segue dal fatto che se per assurdo esistesse una direzione $d\in\mathcal{D}$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ allora la funzione F non sarebbe neanche localmente C^{00}-efficiente rispetto a tale direzione ([7]). Per la sufficienza si deve solamente dimostrare che x_0 è localmente $C^\#$-efficiente rispetto ai raggi x_0+r_d, $d\in\mathcal{D}$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C\backslash C^{00}$ ovvero, essendo $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}$, tali che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$. Si supponga quindi per assurdo che esista una direzione $d\in\mathcal{D}$ tale che $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C$ e ris-

[7] Si dimostra facilmente che se $F:S\to\Re^m$, con $S\subset\Re^n$ insieme stellato di vertice x_0, è una funzione direzionalmente derivabile in x_0 ed inoltre C è un cono chiuso di vertice l'origine ed interno non vuoto si ha che se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ allora $\exists\varepsilon>0$ tale che $F(x_0+\lambda d)\in F(x_0)+C^{00}$ $\forall\lambda\in(0,\varepsilon)$.

petto alla quale x_0 non sia localmente $C^{\#}$-efficiente; esiste allora una successione $\{\lambda_k\}\subset\Re^{++}$ convergente a 0 tale che $F(x_0+\lambda_k d)\in F(x_0)+C^{\#}$; per la chiusura di C si ottiene la condizione assurda $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)=\lim_{k\to+\infty}\frac{F(x_0+\lambda_k d)-F(x_0)}{\lambda_k}\in C$. ♦

Teorema 4.4 Si consideri il problema P, con S insieme stellato di vertice x_0 ed F direzionalmente derivabile in x_0; sia inoltre $C^*\in\{C,C^0,C^{00}\}$.

i) Il punto x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto ad S se e solo se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^{00}$ $\forall d\in\mathcal{D}$ ed inoltre F è localmente (C^*,C^{00}).pcv in x_0 su S;

ii) Se $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\notin C^0$ $\forall d\in\mathcal{D}$ ed inoltre F è localmente (C^*,C^0).pcv in x_0 su S allora x_0 è localmente C^*-efficiente rispetto alla regione S.

Dim. i) La necessità segue dalla definizione di funzione (C^*,C^{00}).pcv e dal fatto che se fosse $\frac{\partial F}{\partial d}(x_0)\in C^{00}$ allora F non sarebbe localmente C^{00}-efficiente rispetto a tale direzione. Per la sufficienza si supponga per assurdo che x_0 non sia localmente C^*-efficiente e che quindi esista una successione $\{x_k\}\subset S\setminus\{x_0\}$ convergente ad x_0 tale che $F(x_k)\in F(x_0)+C^*$; ciò implica che, da un certo indice k in poi, risulta per la locale (C^*,C^{00}).pcv di F che $\frac{\partial F}{\partial d_k}(x_0)\in C^{00}$, $d_k=\frac{x_k-x_0}{\|x_k-x_0\|}\in\mathcal{D}$, condizione assurda poiché nega le ipotesi.

ii) Dimostrazione analoga alla sufficienza del punto precedente. ♦

BIBLIOGRAFIA

[1] M.S. Bazaraa and C.M. Shetty, Foundations of optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 122, Springer-Verlag, 1976.

[2] A. Cambini and L. Martein, An approach to optimality conditions in vector and scalar optimization, in "Mathematical Modelling in Economics", edited by Diewert, Spremann, and Stehling, Springer Verlag, (1993)

[3] R. Cambini, Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato, Rendiconti del comitato per gli studi economici 29 (1992)

[4] R. Cambini, Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate, Technical report 57, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, 1992.