Report n.87

Una nota storica sulla programmazione lineare: un problema di Kantorovich rivisto alla luce del problema degli zeri

Elena Melis

Pisa, February 1995

Una nota storica sulla programmazione lineare: un problema di Kantorovich rivisto alla luce del problema degli zeri

Elena Melis *

La programmazione lineare fu concepita, nella sua struttura teorica ed algoritmica da G.B. Danzig nel 1947, negli anni successivi alla fine della seconda guerra mondiale; in tale teoria Danzig inquadrava i molti problemi di pianificazione che aveva affrontato nel Pentagono negli anni 1941-45 con l'uso di calcolatori da tavolo. Allo scopo di implementare il metodo del simplesso, nella convinzione assoluta dell'efficacia del metodo ideato, Danzig ebbe un incontro con J. von Neuwmann nell'ottobre del 1947, ed in quella occasione sentì parlare per la prima volta di variabili duali e di dualità ([3]) che lo stesso von Neumann e Morgerstern avevano introdotto nella loro teoria dei giochi.
In questo quadro di riferimento, è sorprendente il fatto che il famoso matematico russo L.V. Kantorovich avesse già stabilito, nell'anno 1939, condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per problemi di estremi vincolato, avesse già introdotto un problema duale e ideato un metodo risolutivo da lui chiamato "metodo di risoluzione tramite moltiplicatori"([6]), metodo molto somigliante al noto algoritmo primale-duale sviluppato nel 1957 da Danzig-Ford-Fulkerson.
In questa nota, di carattere poco più che storico-didattico, si vuole da una parte evidenziare come Kantorovich avesse affrontato anche problemi di programmazione lineare e dall'altra condurre una analisi della circostanza che vi siano zeri nella produzione, servendoci dell'esempio (contenuto in [4]), illustrato in un seminario del prof. A. Bukhvalov di S. Pietroburgo.
Per quanto sembra, sia Kantorovich che gli altri, prestano attenzione al caso che sia zero una coordinata della soluzione ottimale per i prezzi, trascurando di analizzare il caso che sia nulla una coordinata della soluzione ottimale della produzione. Uno dei primi lavori in cui si accenna alla artificiosità dell'effetto di una coordinata nulla nel problema primale (per altro legittima matematicamente) risale al 1958 ed è citato in [5], e riguarda un esempio di scelta fra investimenti indipendenti (problema di Lorie e Savage).
La discussione, seppure ingenua, che deriva dal come e perchè evitare gli zeri, offre l'occasione di mettere in luce da una parte la necessità di tener conto di

*Dip. D.M.D.E.F.A. Università la Sapienza, Roma

vincoli che a prima vista non sembrano necessari, e dall'altra la impossibilità di evitare, anche con vincoli aggiuntivi, che la soluzione ottimale abbia qualche pecca di incoerenza con la realtà. Se infatti dal punto di vista della microeconomia l'avere una soluzione con qualche coordinata nulla può non avere un particolare significato, dal punto di vista della pianificazione di un lavoro una coordinata nulla significa che una delle componenti del piano (una macchina, una delle società affiliate, un fornitore) deve essere soppressa: a questo ci si può adeguare se si ha infinita fede nel rigore della teoria, ma ha dei costi aggiuntivi (immobilizzazioni, disoccupazione) che finiscono per falsare la convenienza dell'aver minimizzato il costo o massimizzato il profitto. Ciò forse contrasta con l'atteggiamento di quegli economisti che sono interessati più alla determinazione dei prezzi che alla quantità di produzione.

L'esempio delle miniere - Per fissare le idee, esponiamo l'esempio trattato da Kantorovich. Una compagnia, nel caso specifico statale ovviamente, ha tre miniere dalle quali estrae carbone che è di due qualità, energetico e coke, che vengono assorbite dal mercato in quantità differenti; la compagnia non può stabilire l'aliquota dell'una o dell'altra qualità di carbone per tonnellata di carbone estratta, perchè essa è determinata a priori dalla composizione della pietra estratta, composizione che varia da miniera a miniera. Sono noti i costi di funzionamento di ciascuna miniera per tonnellata di carbone estratto e viene fissata (dalla compagnia) la quantità totale di ciascuno dei due tipi di carbone da produrre ogni anno. Visto che le miniere producono a costi diversi e in diverse proporzioni, si vuole minimizzare il costo di produzione. Lo schema riprodotto chiarisce la situazione.

Numero della miniera	carbone energetico %	carbone coke %	costo per 1 t (migliaia di lire)	quantità da estrarre
1	100	0	$c_1 = 9$	x_1
2	50	50	$c_2 = 11$	x_2
3	20	80	$c_3 = 13$	x_3

Se 6000 e 2000 sono rispettivamente le quantità massime di energetico e coke da produrre, il problema è di minimizzare:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 9x_1 + 11x_2 + 13x_3 \rightarrow \min$$

con le condizioni:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5\,x_2 + 0.2\,x_3 \geq 6000 \\ 0.5\,x_2 + 0.8\,x_3 \geq 2000 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il problema, si trova che la soluzione ottimale si ha nel punto:

$$x^* = (4000; 4000; 0)$$

ed il valore del costo minimo è $C_{min} = 80000$.

Seguendo Kantorovich, osserviamo ora il problema duale:

$$6000y_1 + 2000y_2 \longrightarrow \max$$

con le condizioni:

$$\begin{cases} y_1 \leq 9 \\ 0.5y_1 + 0.5y_2 \leq 11 \\ 0.2y_1 + 0.8y_2 \leq 13 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione ottimale è:

$$y^* = (9; 13)$$

Come è noto, la interpretazione delle variabili nel duale, y_1 e y_2, è quella di *prezzi ombra*, ai quali le due qualità di carbone devono essere venduti. All'epoca, questo risultato fu interessante per Kantorovich, perchè il Governo riteneva che le due qualità di carbone dovessere essere venduti allo stesso prezzo perchè, in teoria, provenivano dalla stessa quantità di lavoro. Come si osserva abbstanza ovviamente però, se y è il prezzo unico al quale vengono vendute le due qualità di carbone, eguagliando costo e ricavo, si ottiene y:

$$9 \cdot 4000 + 11 \cdot 4000 + 13 \cdot 0 = 6000y + 2000y$$

da cui

$$y = 10$$

Questa soluzione deriva dalla condizione di equilibrio fra costo e ricavo. Guardando esclusivamente da questo punto di vista, conviene alla compagnia estrarre solo dalla prima miniera, laddove il costo è di 9 e rivendere a 10, in modo da ottenere un ricavo maggiore del costo!.
Lo scopo di Kantorovich era appunto quello di mostrare che la teoria in base alla quale (mercato a parte) essendo uguale il lavoro per estrarre le due qualità di carbone devono essere uguali i prezzi, non è conveniente anche se convincente dal punto di vista sociale.

Essendo la terza coordinata della soluzione nulla, ciò significa che dalle tre miniere insieme il carbone è prodotto a prezzo minimo nelle quantità fissate se la terza miniera non ne produce affatto; vale a dire che la compagnia dovrebbe chiudere la terza miniera, con tutto ciò che ne consegue.

Esaminiamo più attentamente il motivo della presenza degli zeri.
A proposito, c'è da ricordare che:

> Nel caso non degenere, il numero di coordinate non nulle della soluzione ottimale non può superare nè il numero delle variabili, nè il numero dei vincoli.

Nel nostro caso, le variabili sono 2 (le quantità di carbone di ciascuna delle due qualità) ed i vincoli sono tre, per cui non si potranno avere più di due coordinate non nulle, vale a dire che una miniera dovrà necessariamente chiudere. Si osservi che nell'esempio in esame, non è possibile aumentare il numero delle variabili, perchè da una pietra di carbone si estraggono solo due qualità di carbone.

Rimedi - Mettendo a parte il problema del prezzo unico che dipende da un atteggiamento del Governo, riconsideriamo il problema della coordinata nulla nella produzione, per vedere se:
a) accettando di chiudere una miniera, si possa spostare lo zero su un'altra coordinata
b) ponendo il problema più accuratamente, possa evitarsi del tutto la presenza degli zeri.
Supponiamo che la terza miniera, decida di produrre a prezzo più basso per evitare la chiusura. Quanto piu basso? Si tratta di vedere quanto è *sensibile* lo zero alla variazione del terzo coefficiente c_3. Una tale *analisi di sensitività* porta che c_3 non deve essere maggiore di 12.20 se si vuole che x_3 non sia nullo. Se scegliamo di abbassare i costi della terza miniera ad esempio a 12, la terza miniera è salva, con una minima diminuizione dei costi (basta ad esempio una lieve diminuizione dei salari), ma la compagnia ha problemi con una delle altre due. Con $c_3 = 12$ la soluzione è

$$\begin{array}{ll} x_1 = 5550 & \\ x_2 = 0 & y_1 = 9 \\ x_3 = 2500 & y_2 = 12.75 \end{array}$$

$$f_{ott} = 79500$$

ed il discorso si sposta sulla seconda miniera.
Se il numero di vincoli nel problema primale non aumenta, non c'è speranza di evitare uno zero.
Proviamo allora ad aumentare i vincoli per le tre variabili x_1, x_2, x_3, supponendo, in modo abbastanza naturale, che le *capacità* di produzione delle tre miniere non siano infinite, ma che ognuna di esse possa, ove occorra, produrre al più una certa quantità di carbone. Perchè le cose cambino, supponiamo che le due miniere che dai dati precedenti potevano rimanere attive, la prima e la seconda, non possano in realtà produrre quanto richiesto dalla soluzione, cioè

4000 tonnellate ciascuna, ma abbiano la capacità di al più 3000 tonnellate, mentre la terza abbia capacità di 12000 tonnellate. Al sistema primale aggiungiamo allora le condizioni:

$$\begin{cases} x_1 \leq 3000 \\ x_2 \leq 3000 \\ x_3 \leq 12000 \end{cases}$$

che ha la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 3000 \\ x_2 = 3000 \\ x_3 = 7500 \end{cases}$$

con valore minimo del costo uguale a 157500.

Abbiamo così che la soluzione ha tutte le coordinate positive e le tre miniere possono lavorare tutte.

Diamo però una occhiata alla soluzione duale, dove ora per ogni vincolo aggiunto avremo una variabile duale in più:

$$6000y_1 + 2000y_2 - 3000y_1' - 3000y_2' - 12000y_3' \longrightarrow \max$$

con le condizioni:

$$\begin{cases} y_1 - y_1' \leq 9 \\ 0.5y_1 + 0.5y_2 - y_2' \leq 11 \\ 0.2y_1 + 0.8y_2 - y_3' \leq 13 \\ y_1,\, y_2,\, y_1',\, y_2',\, y_3' \geq 0 \end{cases}$$

che porta:

$$y_1 = 65 \quad y_2 = 0 \quad y_1' = 56 \quad y_2' = 21.5 \quad y_3' = 0$$

Almeno due coordinate devono necessariamente essere nulle, come di fatto sono. Esprimendo la eguaglianza fra il minimo del costo e il valore massimo del duale, avremo:

$$9 \cdot 3000 + 11 \cdot 3000 + 13 \cdot 7500 = 6000y_1 + 2000y_2 - 3000y_1' - 3000y_2' - 12000y_3'$$

La quantità che si sottrae al ricavo è collegata alle variabili y_i' e si interpreta come un costo aggiuntivo, da parte della compagnia, legato alla scarsità della risorsa: i due prezzi ombra y_i sono ora tali da ripagare anche tale costo aggiuntivo. Questa interpretazione è suffragata dal fatto che per la soluzione del duale vale la formula

$$y_i' = \frac{\text{incremento del costo}}{\text{incremento della capacità}}$$

Osserviamo infine un'altra possibilità di rendere più realistico il modello proposto da Kantorovich, introducendo dei vincoli che tengano conto del fatto che i costi di esercizio delle miniere sono composti da costi fissi, che si sostengono anche senza funzionamento, e costi variabili, proporzionali alla quantità di carbone estratta. Traduciamo il vincolo in quantità minime di carbone da estrarre per coprire i costi fissi per ciascuna miniera, imponendo

$$\begin{cases} 1000 \leq x_1 \\ 1500 \leq x_2 \\ 2000 \leq x_3 \end{cases}$$

la soluzione diventa:

$$\begin{cases} x_1 = 4850 \\ x_2 = 1500 \\ x_3 = 2000 \end{cases}$$

mentre la soluzione del duale è:

$$\begin{cases} y_1 = 6.5 \\ y_2 = 11.2 \\ y_1'' = 9 \\ y_2'' = 0 \\ y_3'' = 0 \end{cases}$$

In questo caso, i prezzi ombra y_i'' determinano una diminuizione del costo rispetto al problema originario. L'eguaglianza fra costi e ricavi è in questo caso:

$$9 \cdot 4850 + 11 \cdot 1500 + 13 \cdot 2000 = 6000y_1 + 2000y_2 + 1000y_1'' + 1500y_2'' + 2000y_3''$$

In questo caso:

$$y_i'' = \frac{\text{incremento del costo}}{\text{incremento dei costo fisso}}$$

Un problema misto Ovviamente, può osservarsi anche il caso che si tenga conto dei costi fissi e delle capacità delle miniere contemporaneamente. Ma a questo punto si può proporre di unificare l'intera trattazione, introducendo una variabile intera $z = z_1, z_2, z_3$ tale che:

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{se la i/ma miniera deve chiudere} \\ 1 & \text{se la i/ma miniera non deve chiudere} \end{cases}$$

e proporre il problema nei termini:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \min$$

con condizioni del tipo:

$$\begin{cases} 1000z_1 \leq x_1 \leq 3000z_1 \\ 1500z_2 \leq x_2 \leq 3000z_2 \\ 2000z_3 \leq x_3 \leq 12000z_3 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \geq 6000 \\ 0.5x_2 + 0.8x_3 \geq 2000 \end{cases}$$

Si osservi che il sistema di condizioni proposte realizza per z la condizione che $z_i = 0$ se e solo se $x_i = 0$.

Bibliografia

[1] G.B. Danzig, *Linear Programming and Estensions*, Princeton Univ. Press, N.J., 1963

[2] R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow, *Linear Programming and Economyc Analysis, McGraw Hill Co.*, New York, 1958.

[3] *History of Mathematical Programming*, a collection of Personal Reminiscences, Ed. by J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, North-Holland, 1991

[4] L.V. Kantorovich, *Mathematical Methods in Organization and Planning of Production*, Leningrad State University, Leningrad, 1939. Traduzione inglese: Management Sci. 6 (1960), 366-422

[5] L.V. Kantorovich, *Economic Calculation of the Best Use of Resources*, Mosca, 1959. Traduzione inglese: Pergamon Press, Oxford, 1964.

[6] *Mathematical Programming*, Recent development and Applications. Ed. by M. Iri, K. Tanabe - Kluwer Academic Publishers, 1989

[7] H.M. Weingartner,*Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, II ed.,Kershaw, Londra 1974.