Report n.90

Funzioni Scalari Affini Generalizzate

Riccardo CAMBINI

Pisa, July 1995
This research has been partially supported by the Italian Ministry of Public Education

FUNZIONI SCALARI AFFINI GENERALIZZATE

RICCARDO CAMBINI
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università degli Studi di Pisa, via Ridolfi 10, 56124 Pisa

Scopo di questo lavoro è studiare tutte le possibili classi di funzioni che si possono ottenere, a partire dalle varie classi di funzioni concave generalizzate note in letteratura, estendendo il concetto di funzione affine, ovvero di funzione sia concava sia convessa. Inizialmente verranno studiate le loro proprietà e le relazioni di inclusione tra le classi, in seguito verrà analizzato il loro comportamento sotto ipotesi di differenziabilità, il modo in cui viene da esse esteso il concetto di monotonia e le proprietà relative alle trasformazioni di funzione.

1. Introduzione

Come è noto, una funzione affine può essere concepita come una funzione sia concava sia convessa; in letteratura [3, 10, 12, 13] sono state definite altre classi di funzioni che estendono tale concetto, come le funzioni pseudo-monotone (sia pseudo-concave sia pseudo-convesse), quasi-monotone (sia quasi-concave sia quasi-convesse) ed "explicitly quasi-monotone" (sia semistrettamente quasi-concave sia semistrettamente quasi-convesse), denominazioni che ben evidenziano come esse siano state definite allo scopo di estendere alle funzioni a più variabili il concetto di monotonia, proprio delle funzioni ad una sola variabile, e non il concetto di funzione affine.

In questo lavoro si propone uno studio organico di tutte le possibili classi di funzioni che possono essere introdotte al fine di estendere il concetto di funzione affine a tutte le classi di funzioni concave (convesse) generalizzate introdotte in letteratura [3, 4]. Tali classi di funzioni verranno chiamate affini generalizzate e di esse verranno studiate le proprietà, le relazioni di inclusione, il comportamento sotto ipotesi di differenziabilità, il modo in cui viene da esse esteso il concetto di monotonia e le proprietà relative alle trasformazioni di funzione.

2. Definizioni e principali proprietà

Di seguito vengono introdotte possibili definizioni di funzioni affini generalizzate derivanti dalle note funzioni di tipo concavo, di tipo quasi-concavo e di tipo pseudo-concavo [4]; per completezza verranno ricordate anche le definizioni di alcune classi già note in letteratura.

Prima di introdurre nuove classi di funzioni affini generalizzate, si ricordi preliminarmente che non esistono funzioni che siano contemporaneamente sia strettamente concave sia strettamente convesse; non verranno inoltre definite funzioni che siano contemporaneamente semi concave e semi convesse ([1]) oppure semistrettamente concave e semistrettamente convesse [4], in quanto esse si riducono rispettivamente alle funzioni affini ed alle funzioni costanti, così come è dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 2.1 Sia $C \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $f: C \to \Re$.

i) f è sia semi concava sia semi convessa se e solo se è affine;

ii) f è sia semistrettamente concava sia semistrettamente convessa se e solo se è costante.

Dim. i) Si osservi inizialmente che f è sia semi concava sia semi convessa se e solo se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall\lambda\in(0,1) \qquad (2.1)$$

La sufficienza segue dalla (2.1); per la necessità si deve solamente dimostrare ([2]) che per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x))=f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

Si supponga per assurdo che esistano due punti $x,y \in C$ ed un reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)=f(x)$ ed $f(x+\bar{\lambda}(y-x))\neq f(x)$ e si supponga, senza perdita di generalità, che sia $f(x+\bar{\lambda}(y-x))=f(x)+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$. Per la (2.1) la funzione è affine nel segmento di estremi $x+\bar{\lambda}(y-x)$ ed y, di conseguenza per continuità esiste un reale $\tilde{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)$ tale

---

[1] Si consideri una funzione $f: C \to \Re$, con $C \subseteq \Re^m$ insieme convesso. La funzione f è detta:

i) *semi concava* [sm.cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

ii) *semistrettamente concava* [ss.cv] se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))>f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

[2] Si osservi che una funzione affine $f: C \to \Re$, con $C \subseteq \Re^n$ convesso, è alternativamente caratterizzabile come funzione tale che per ogni $x,y \in C$ vale la condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))=f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

che $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x+\tilde{\lambda}(y-x))>f(x)$; per la (2.1) f è affine nell'intervallo di estremi x ed $x+\tilde{\lambda}(y-x)$ cosicché $f(x+\lambda(y-x))<f(x+\tilde{\lambda}(y-x))$ $\forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda})$, condizione che contraddice la disuguaglianza $f(x+\bar{\lambda}(y-x))>f(x+\tilde{\lambda}(y-x)), \bar{\lambda}\in(0,\tilde{\lambda})$.

ii) Segue direttamente dalle definizioni di funzioni semistrettamente concave e semistrettamente convesse. ♦

Si introducono adesso le funzioni affini generalizzate di tipo quasi-affine e di tipo pseudo-affine; a tal fine si riportano in nota (3), con riferimento a [4], le definizioni delle classi di funzioni concave generalizzate meno conosciute.

Definizione 2.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ convesso e sia $f:C\rightarrow\Re$. La funzione f è detta:

quasi-affine [qfn] se è sia quasi-concava sia quasi-convessa, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

semistrettamente quasi-affine [ss.qfn] se è sia semistrettamente quasi-concava sia semistrettamente quasi-convessa, ovvero se $\forall x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

strettamente quasi-affine [s.qfn] se è sia strettamente quasi-concava sia strettamente quasi-convessa, ovvero se valgono le condizioni:

i) $\nexists x,y\in C$, $x\neq y$, tali che $f(y)=f(x)$,

ii) $\forall x,y\in C$ si ha che: $f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1)$;

semi quasi-affine [sm.qfn] se è sia semi quasi-concava sia semi quasi-convessa, ovvero se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

quasi-affine in senso esteso [e.qfn] se è sia quasi-concava in senso esteso sia quasi-convessa in senso esteso, ovvero se $\forall x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(y)=f(x+\lambda(y-x))=f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

---

3 Si consideri una funzione $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^m$ insieme convesso. La funzione f è detta:

i) *semi quasi-concava* [sm.qcv] se per ogni $x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

ii) *quasi-concava in senso esteso* [e.qcv] se $\forall x,y\in C$ vale la condizione:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))\geq f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1);$$

iii) *strettamente quasi-concava in senso esteso* [es.qcv] se $\forall x,y\in C$, $x\neq y$, si ha:

$$f(y)=f(x) \Rightarrow f(x+\lambda(y-x))>f(x) \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

strettamente quasi-affine in senso esteso [es.qfn] se è sia strettamente quasi-concava in senso esteso sia strettamente quasi-convessa in senso esteso, ovvero se vale la condizione:

$$\nexists x,y \in C,\ x \neq y, \text{ tali che } f(y)=f(x).$$

Definizione 2.3 Sia $C \subseteq \Re^n$ convesso e sia $f:C \to \Re$. La funzione f è detta:

pseudo-affine [pfn] se è sia pseudo-concava sia pseudo-convessa, ovvero se per ogni $x,y \in C$ vale la condizione (4):

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

strettamente pseudo-affine [s.pfn] se è sia strettamente pseudo-concava sia strettamente pseudo-convessa, ovvero se valgono le condizioni:

i) $\nexists x,y \in C,\ x \neq y$, tali che $f(y)=f(x)$,

ii) $\forall x,y \in C$ si ha che:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi(x,y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi(x,y) \end{cases};$$

dove $\xi(x,y)$ dipende solo da x ed y.

La seguente proprietà è conseguenza diretta delle definizioni date.

Proprietà 2.1 Sia f una funzione a valori reali definita su un convesso $C \subseteq \Re^n$.

i) la funzione f è quasi-affine se e solo se è sia semi quasi-affine sia quasi-affine in senso esteso;

ii) la funzione f è strettamente quasi-affine se e solo se è sia semistrettamente quasi-affine sia strettamente quasi-affine in senso esteso.

iii) la funzione f è strettamente pseudo-affine se e solo se è sia pseudo-affine sia strettamente quasi-affine in senso esteso.

---

4 Si osservi che una funzione che verifica tale condizione è sia pseudo-concava che pseudo-convessa; viceversa, direttamente dalle definizioni, si ha che una funzione sia pseudo-concava sia pseudo-convessa verifica per ogni $x,y \in C$ la condizione:

$$f(y)>f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \xi_1(x,y)>0 \text{ ed } \exists \xi_2(x,y)>0 \text{ tale che } \forall \lambda \in (0,1) \\ f(y)-\lambda(1-\lambda)\xi_1(x,y) \geq f(x+\lambda(y-x)) \geq f(x)+\lambda(1-\lambda)\xi_2(x,y) \end{cases},$$

da cui si ottiene quella data nella definizione assumendo $\xi=\min\{\xi_1, \xi_2\}$.

I risultati noti in letteratura permettono di caratterizzare le funzioni quasi-affini in termini di insiemi di livello superiore ed inferiore.

Teorema 2.2 Una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C\subseteq\Re^n$ è quasi-affine ([5]) se e solo se i suoi insiemi di livello superiore $U(f,\alpha)$ ed i suoi insiemi di livello inferiore $L(f,\alpha)$ sono convessi per ogni valore reale α.

Direttamente dalla definizione segue invece la caratterizzazione delle funzioni quasi-affini generalizzate in termini di superfici di livello.

Teorema 2.3 Una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C\subseteq\Re^n$ è quasi-affine in senso esteso se e solo se le sue superfici di livello $Y(f,\alpha)$ sono insiemi convessi per ogni valore reale α.

3. Relazioni di inclusione tra le classi

In questo sottoparagrafo verranno studiate le relazioni di inclusione intercorrenti tra le varie classi di funzioni affini generalizzate precedentemente definite.

Teorema 3.1 Se una funzione a valori reali f definita su un insieme convesso $C\subseteq\Re^n$ è semistrettamente quasi-affine allora è anche quasi-affine.

Dim. Si dimostra preliminarmente che se f è semistrettamente quasi-affine allora è anche quasi-affine in senso esteso; a tal fine si supponga per assurdo che ciò non sia vero e che quindi esistano, senza perdita di generalità, due punti $x,y\in C$ ed un valore reale $\bar{\lambda}\in(0,1)$ tali che $f(y)=f(x)>f(x+\bar{\lambda}(y-x))$; essendo f ss.qfn risulta $f(y)=f(x)>f(x+\lambda(y-x))>f(x+\bar{\lambda}(y-x))\ \forall\lambda\in(0,1),\ \lambda\neq\bar{\lambda}$. Di conseguenza preso un qualsiasi $\tilde{\lambda}\in(\bar{\lambda},1)$ risulta $f(x)>f(x+\tilde{\lambda}(y-x))$ da cui si ha, sempre per la semistretta quasi-affinità di f, $f(x)>f(x+\lambda(y-x))>f(x+\tilde{\lambda}(y-x))\ \forall\lambda\in(0,\tilde{\lambda})$, condizione assurda essendo $\bar{\lambda}\in(0,\tilde{\lambda})$.

La tesi segue pertanto direttamente dalle definizioni di funzione quasi-affine in senso esteso e semistrettamente quasi-affine. ◆

[5] Si osservi che una funzione $f:C\rightarrow\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ convesso, quasi-affine è alternativamente caratterizzabile come funzione tale che $\max\{f(x),f(y)\}\geq f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x),f(y)\}\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in C$.

Si osservi che un risultato analogo vale per le funzioni concave (convesse) generalizzate, sotto però l'ipotesi aggiuntiva della superiore (inferiore) semicontinuità della funzione [6, 13]; sotto tale ipotesi risulta infatti che una funzione semistrettamente quasi-concava (o semistrettamente quasi-convessa) è anche quasi-concava (quasi-convessa).
Il teorema seguente permette di evidenziare le differenze esistenti tra le funzioni semistrettamente quasi-affini e quelle strettamente quasi-affini.

Teorema 3.2 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f risulta semistrettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento $[x,y]$ contenuto in C è costante oppure strettamente quasi-affine.
Dim. La sufficienza è banale, dobbiamo quindi dimostrare che se la funzione f è ss.qfn ma in un segmento $[v,w] \subseteq C$ non è s.qfn allora deve essere costante in $[v,w]$. Per le ipotesi assunte e per la Definizione 2.2 esistono due punti $x,y \in [v,w]$, $x \neq y$, tali che $f(x)=f(y)$; si assuma inoltre, senza ledere la generalità, che sia $x=v+\lambda_1(w-v)$ ed $y=v+\lambda_2(w-v)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1), \lambda_1 < \lambda_2$. Se fosse $f(v) \neq f(y)$ allora per la semistretta quasi-affinità di f si avrebbe $f(v+\lambda(w-v)) \neq f(y)$ $\forall \lambda \in (0,\lambda_2)$, condizione assurda poiché $f(x)=f(v+\lambda_1(w-v))=f(y)$ con $\lambda_1 \in (0,\lambda_2)$; analogamente si dimostra che deve necessariamente essere $f(w)=f(x)=f(y)=f(v)$. Essendo f ss.qfn allora è anche, per il Teorema 3.1, qfn e quindi e.qfn; poiché $f(v)=f(w)$ la funzione risulta quindi costante sul segmento $[v,w]$. ♦

Il teorema seguente, analogamente al Teorema 3.2, puntualizza la differenza tra le classi di funzioni strettamente pseudo-affini e quelle pseudo-affini.

Teorema 3.3 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ e sia $[x,y]=\{z \in C: z=x+\lambda(y-x), \lambda \in (0,1)\}$ $\forall x,y \in C$.
La funzione f risulta pseudo-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento $[x,y]$ contenuto in C è costante oppure strettamente pseudo-affine.
Dim. La sufficienza è ovvia, dobbiamo quindi dimostrare che se la funzione f è pseudo-affine ma in un segmento $[v,w] \subseteq C$ non è strettamente pseudo-affine allora deve essere costante in $[v,w]$. Direttamente dalle definizioni, si ha che una funzione pseudo-affine è anche semistrettamente quasi-affine; per la Definizione 2.3 inoltre, non essendo f s.pfn in $[v,w]$, esistono due punti $x,y \in [v,w]$, $x \neq y$, tali che $f(x)=f(y)$, pertanto la funzione f non può essere neanche strettamente quasi-

affine in [v,w]. Essendo quindi la funzione f ss.qfn ma non s.qfn nel segmento [v,w] allora deve essere, per il Teorema 3.2, costante in [v,w]. ♦

Le relazioni intercorrenti tra le altre classi di funzioni affini generalizzate seguono direttamente dalle relative definizioni; le relazioni di inclusione si possono pertanto riassumere nel seguente diagramma.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \boxed{\text{sm.qfn}} & \\
 & & & \cup & \\
\boxed{\text{e.qfn}} & \supset & \multicolumn{3}{c}{\boxed{\qquad\qquad\text{qfn}\qquad\qquad}} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\text{es.qfn}} & \supset & \boxed{\text{s.qfn}} & \subset & \boxed{\text{ss.qfn}} \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \boxed{\text{s.pfn}} & \subset & \boxed{\text{pfn}} \\
 & & & & \cup \\
 & & & & \boxed{\text{fn}}
\end{array}
$$

diagramma 1

Il seguente esempio mostra che le classi di funzioni semi quasi-affini, quasi-affini in senso esteso e strettamente quasi-affini in senso esteso sono distinte tra loro e dalle altre classi analizzate.

Esempio 3.1

Si considerino le seguenti funzioni superiormente semicontinue.

i) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{per } x\in[0,1] \\ 0 & \text{per } x\notin[0,1] \end{cases}$: questa funzione è sm.qfn, non è però e.qfn e quindi neanche qfn;

ii) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{per } x=0 \\ 0 & \text{per } x\in]0,1[\\ 2 & \text{per } x=1 \end{cases}$: questa funzione è e.qfn, non è però né sm.qfn (e quindi neanche qfn) né es.qfn;

iii) $f(x)=\begin{cases} -x & \text{per } x\in[0,1[\\ x & \text{per } x\in[1,2] \end{cases}$: questa funzione è es.qfn (e quindi anche e.qfn), non è però sm.qfn e quindi neanche qfn né s.qfn.

Come è stato dimostrato in [4], sotto ipotesi di continuità le classi di funzioni semi quasi-concave e quasi-concave in senso esteso (semi quasi-convesse e quasi-convesse in senso esteso) si riducono alla classe delle funzioni quasi-concave (quasi-convesse); ciò avviene anche per la classe delle funzioni strettamente quasi-concave in senso esteso (strettamente quasi-convesse in senso esteso) che si riduce alla classe delle funzioni strettamente quasi-concave (strettamente quasi-convesse). Da tali risultati si ottiene la seguente proprietà.

Proprietà 3.1 Sia f una funzione continua a valori reali definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è quasi-affine in senso esteso;

ii) f è quasi-affine;

iii) f è semi quasi-affine.

Risulta inoltre che f è strettamente quasi-affine in senso esteso se e solo se è strettamente quasi-affine.

Dalla Proprietà 3.1 e dal Teorema 2.3 segue direttamente la proprietà successiva, dimostrata in [3] in modo più complesso.

Proprietà 3.2 Una funzione continua a valori reali f definita su un insieme convesso $C \subseteq \Re^n$ è quasi-affine se e solo se le sue superfici di livello $Y(f,\alpha)$ sono insiemi convessi per ogni valore reale α.

Le relazioni di inclusione tra le classi, sotto ipotesi di continuità, sono riassunte nel diagramma 2.

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\boxed{\text{e.qfn} \equiv \text{qfn} \equiv \text{sm.qfn}}} \\
\cup & & \cup \\
\boxed{\text{es.qfn} \equiv \text{s.qfn}} & \subset & \boxed{\text{ss.qfn}} \\
\cup & & \cup \\
\boxed{\text{s.pfn}} & \subset & \boxed{\text{pfn}} \\
 & & \cup \\
 & & \boxed{\text{fn}}
\end{array}
$$

diagramma 2

I seguenti esempi di funzioni continue mostrano che le classi di funzioni affini generalizzate considerate sono distinte l'una dall'altra.

Esempio 3.2

i) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x<0 \\ x & \text{per } x\in[0,1] \\ 1 & \text{per } x>1 \end{cases}$: questa funzione è qfn, non è però ss.qfn (e quindi neanche s.qfn);

ii) $f(x)=x^3$: questa funzione è s.qfn (e quindi ss.qfn), non è però pfn (e quindi neanche s.pfn);

iii) $f(x)=x^3+x$: questa funzione è s.pfn (e quindi anche pfn), non è però fn;

iv) $f(x)=k$: la funzione costante è fn (e quindi anche pfn, ss.qfn e qfn), non è però s.qfn (e quindi neanche s.pfn).

4. Funzioni affini generalizzate differenziabili

Il teorema seguente stabilisce delle caratterizzazioni per le classi di funzioni differenziabili affini, quasi-affini e pseudo-affini [1, 2, 5, 8, 11, 13].

Teorema 4.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme aperto convesso. La funzione differenziabile $f:C\rightarrow\Re$ risulta:

$$\begin{array}{rcll} \text{affine} & \Leftrightarrow & f(y)=f(x)+(y-x)^T\nabla f(x) & \forall x,y\in C \\ \text{pseudo-affine} & \Leftrightarrow & f(y)>f(x)\Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)>0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)>0 & \forall x,y\in C \\ \text{quasi-affine} & \Leftrightarrow & f(y)\geq f(x)\Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)\geq 0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)\geq 0 & \forall x,y\in C \\ & \Leftrightarrow & f(y)>f(x)\Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x)\geq 0 \text{ e } (y-x)^T\nabla f(y)\geq 0 & \forall x,y\in C \end{array}$$

Dal Teorema 4.1 si può dedurre il seguente risultato [9] relativo alle funzioni quasi-affini.

Teorema 4.2 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$. La funzione f è quasi-affine se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$f(y)\geq f(x)\Rightarrow (y-x)^T\nabla f(x+\lambda(y-x))\geq 0 \quad \forall\lambda\in(0,1)\ \forall x,y\in C.$$

E' possibile inoltre ottenere la seguente ulteriore caratterizzazione relativa alle funzioni pseudo-affini [7].

Teorema 4.3 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$ è verificata la seguente condizione:

$$f(y)=f(x) \Leftrightarrow (y-x)^T\nabla f(x)=0.$$

Un'altra utile caratterizzazione delle funzioni pseudo-affini, analoga a quella presentata in [3, 5] relativamente alle funzioni pseudo-concave, è la seguente.

Teorema 4.4 Sia f una funzione differenziabile definita sull'insieme aperto convesso $C \subseteq \Re^n$. La funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni punto $x \in C$ ed ogni vettore $v \in \Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla f(x)=0$ la funzione $g(t)=f(x+tv)$ è costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$.

Dim. Per il Teorema 4.1 la funzione f è pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y \in C$, vale la condizione:

$$(y-x)^T\nabla f(x) \leq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y) \leq 0 \;\Rightarrow\; f(y) \leq f(x);$$

si osservi preliminarmente che, per semplice ridenominazione dei punti x ed y, la precedente condizione è equivalente alla successiva:

$$(y-x)^T\nabla f(x) \geq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(y) \geq f(x).$$

Sia quindi f pseudo-affine, sia $x \in C$ e sia $v \in \Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla f(x)=0$; per ogni $y=x+tv \in C$, $t \in \Re$, si ha quindi $(y-x)^T\nabla f(x)=0$ che per le condizioni precedenti implica $f(y) \leq f(x)$ ed $f(y) \geq f(x)$, di conseguenza la funzione $g(t)=f(x+tv)$ risulta costante.

Si dimostra adesso la sufficienza supponendo per assurdo che la funzione f non sia pseudo-affine e che quindi, per il Teorema 4.1, esistano due punti $x,y \in C$ tali che $f(y)>f(x)$ ed inoltre $(y-x)^T\nabla f(x) \leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y) \leq 0$. Si osservi inizialmente che se fosse $(y-x)^T\nabla f(x)=0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)=0$ allora per ipotesi la funzione $g(t)=f(x+tv)$, con $v=\frac{y-x}{\|y-x\|}$, dovrebbe essere costante per ogni $t \in \Re$ tale che $x+tv \in C$, condizione assurda poiché $f(y) \neq f(x)$; risulta pertanto $(y-x)^T\nabla f(x)<0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)<0$. Si consideri adesso il segmento, contenuto in C, $S=\{x+\lambda(y-x), \lambda \in [0,1]\}$ e la restrizione di f su esso. Se $(y-x)^T\nabla f(x)<0$ $\exists \lambda_1 \in (0,1)$ tale che $f(x+\lambda_1(y-x))<f(x)<f(y)$; di conseguenza, essendo la funzione f differenziabile, $\exists \lambda_2 \in (0,1)$ tale che il punto $x+\lambda_2(y-x)$ è di minimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T\nabla f(x+\lambda_2(y-x))=0$. Per ipotesi la restrizione di f su S è costante, condizione assurda in quanto $f(y) \neq f(x)$. Una analoga contraddizione si ottiene se $(y-x)^T\nabla f(y)<0$, poiché in tal caso $\exists \lambda_3 \in (0,1)$

tale che il punto $x+\lambda_3(y-x)$ è di massimo assoluto per f ristretta ad S con derivata direzionale $(y-x)^T\nabla f(x+\lambda_3(y-x))=0$. Il teorema è così dimostrato. ♦

Corollario 4.1 Sia f una funzione differenziabile pseudo-affine definita sull'insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$.

i) La funzione f è costante se e solo se ammette almeno un punto critico;

ii) Se esiste almeno un punto di C che risulta di massimo o di minimo relativo allora la funzione f è costante.

Dim. i) La necessità è ovvia; per la sufficienza si osservi che se $x\in C$ è un punto critico per f allora risulta $(y-x)^T\nabla f(x)=(x-y)^T\nabla f(x)=0$ $\forall y\in C$, condizione che, per la pseudo-affinità di f, implica $f(y)=f(x)$ $\forall y\in C$.

ii) Segue direttamente dal punto i) essendo C un insieme aperto. ♦

Altre caratterizzazioni per le classi di funzioni quasi-affini si possono ottenere direttamente dalla definizione e dai teoremi dimostrati da Diewert, Avriel e Zang in [5]. Si ricorda infine la seguente proprietà.

Proprietà 4.1 Sia $f:\Re^n_{++}\to\Re_{++}$ una funzione differenziabile omogenea di grado $\alpha\in(0,1]$. La funzione f è affine se e solo se è quasi-affine.

Si osservi infine che è possibile ottenere una caratterizzazione al primo ordine anche per la classe delle funzioni strettamente pseudo-affini, classe che però è composta solamente da funzioni ad una sola variabile, così come è dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 4.5 Non esiste alcuna funzione differenziabile strettamente pseudo-affine definita su un insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$ con $n\geq 2$.

Dim. Si supponga per assurdo che $f:C\to\Re$, con $C\subseteq\Re^n$ aperto convesso tale che $n\geq 2$, sia strettamente pseudo-affine. La caratterizzazione delle funzioni strettamente pseudo-concave e strettamente pseudo-convesse implica che la funzione f è strettamente pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y\in C$, $x\neq y$, vale la seguente condizione:

$$(y-x)^T\nabla f(x)\leq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y)\leq 0 \Rightarrow f(y)<f(x);$$

si osservi inoltre che, per semplice ridenominazione dei punti x ed y, la precedente condizione è equivalente alla successiva:

$$(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0 \text{ oppure } (y-x)^T\nabla f(y)\geq 0 \Rightarrow f(y)>f(x).$$

Sia $x\in C$; essendo C un aperto esiste un punto $y\in C$, $y\neq x$, tale che $(y-x)^T\nabla f(x)=0$, per le condizioni precedenti si ha quindi $f(y)<f(x)$ ed $f(y)>f(x)$ e ciò è assurdo. ♦

Per le funzioni strettamente pseudo-affini ad una variabile vale la caratterizzazione espressa dal seguente teorema.

Teorema 4.6 Sia $I\subseteq\Re$ un intervallo aperto dei numeri reali ed $f:I\rightarrow\Re$ una funzione derivabile in I. La funzione f risulta strettamente pseudo-affine se e solo se per ogni $x,y\in I$, $x\neq y$, vale la seguente condizione:

$$f(y)\geq f(x) \Rightarrow (y-x)f'(x)>0 \text{ e } (y-x)f'(y)>0.$$

5. Funzioni affini generalizzate e monotonia

E' stato già osservato che in letteratura le funzioni pseudo-affini e quasi-affini sono talvolta chiamate pseudo-monotone e quasi-monotone; tali denominazioni hanno origine dalle proprietà di monotonia che hanno le restrizioni di tali funzioni su un segmento di $\Re^n$. In quanto segue verranno stabilite dette proprietà per le varie classi di funzioni affini generalizzate introdotte in precedenza.

Teorema 5.1 Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$. Allora:

i) f è quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è monotona;
ii) f è strettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è strettamente monotona;
iii) f è semistrettamente quasi-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento contenuto in C è costante o strettamente monotona.

Dim. i) Per la sufficienza si considerino due punti qualsiasi $x,y\in I$; se $f(y)=f(x)$ allora, essendo f monotona nel segmento $[x,y]$, risulta $f(x+\lambda(y-x))=f(x)=f(y)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi la funzione f verifica in $[x,y]$ la definizione di quasi-affinità. Sia adesso $f(y)\neq f(x)$ e si consideri la restrizione $g(\lambda)=f(x+\lambda(y-x))$, $\lambda\in[0,1]$, della funzione f sul segmento di estremi x ed y; se g è nondecrescente allora risulta $g(1)\geq g(\lambda)\geq g(0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, ovvero $f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$; se g è noncrescente allora risulta $g(1)\leq g(\lambda)\leq g(0)$ $\forall\lambda\in(0,1)$, ovvero $f(y)\leq f(x+\lambda(y-x))\leq f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$; in ogni caso quindi se f è monotona è anche quasi-affine.

Per dimostrare la necessità si considerino due punti $x,y \in C$ e la restrizione di f sul segmento $[x,y]$ $g(\lambda)=f(x+\lambda(y-x)), \lambda \in [0,1]$. Se $f(y)=f(x)$ la restrizione di f sul segmento $[x,y]$ risulta, per la definizione di quasi-affinità, costante e quindi monotona; si supponga quindi in seguito, senza perdita di generalità, che sia $f(y)>f(x)$ ovvero $g(1)>g(0)$. Per la quasi-affinità di f risulta $g(1) \geq g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in (0,1)$; si supponga adesso per assurdo che g non sia monotona e che quindi esistano λ_1 $\lambda_2 \in (0,1), \lambda_1 < \lambda_2$, tali che $g(1) \geq g(\lambda_1) > g(\lambda_2) \geq g(0)$; per la quasi-affinità di f risulta $g(1) \geq g(\lambda) \geq g(\lambda_1)$ $\forall \lambda \in (\lambda_1, 1)$ e $g(\lambda_2) \geq g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_2)$, condizioni entrambe assurde poiché $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1)$ e $\lambda_1 \in (0, \lambda_2)$.

ii) La necessità si verifica considerando che la stretta quasi-affinità di f ne implica la quasi-affinità e quindi, per il punto i), la monotonia di ogni restrizione su un segmento di C; la tesi segue quindi osservando che per la definizione di funzione strettamente quasi-affine si ha $f(y) \neq f(x)$ $\forall x,y \in C$, $x \neq y$.

Per la sufficienza si osservi che per il punto i) la stretta monotonia di ogni restrizione di f su un segmento di C ne implica la quasi-affinità; la tesi segue quindi dal fatto che la stretta monotonia implica anche che $f(y) \neq f(x)$ $\forall x,y \in C$, $x \neq y$.

iii) Segue direttamente dal Teorema 3.2 e dal punto ii). ◆

Di seguito verranno analizzate le due classi di funzioni di tipo pseudo-affine sotto ipotesi di differenziabilità. A tal fine si ricordi che la classe delle funzioni strettamente pseudo-affini contiene solamente funzioni ad una variabile.

Teorema 5.2 Sia $f: I \to \Re$ una funzione derivabile nell'intervallo aperto $I \subseteq \Re$. La funzione f è strettamente pseudo-affine se e solo se è strettamente monotona ed $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

Dim. Se f è s.pfn allora è anche s.qfn e quindi, per il punto ii) del Teorema 5.1, è strettamente monotona; se inoltre per assurdo esiste un punto $x \in I$ tale che $f'(x)=0$ esso risulta sia punto di massimo globale (per la stretta pseudo-concavità di f) sia punto di minimo globale (per la stretta pseudo-convessità di f), il che implica che la funzione è costante si I, condizione banalmente assurda.

Per la sufficienza si considerino due punti $x,y \in I$, $x \neq y$; per la stretta monotonia di f si ha $f(y) \neq f(x)$; si supponga adesso, senza perdita di generalità, che sia $f(y)>f(x)$: se f è crescente con $f'(z)>0$ $\forall z \in I$ allora $y>x$ e quindi $(y-x)f'(x)>0$ e $(y-x)f'(y)>0$; se f è decrescente con $f'(z)<0$ $\forall z \in I$ allora $y<x$ e quindi $(y-x)f'(x)>0$ e $(y-x)f'(y)>0$; in ogni caso f è, per il Teorema 4.6, strettamente pseudo-affine. ◆

Teorema 5.3 Sia f una funzione differenziabile a valori reali definita sullo insieme aperto convesso $C\subseteq\Re^n$. Allora la funzione f è pseudo-affine se e solo se la sua restrizione su ogni segmento $[x,y]\subseteq C$ è costante o strettamente monotona con $(y-x)^T\nabla f(x+\lambda(y-x))\neq 0\ \forall\lambda\in(0,1)$.

Dim. Segue direttamente dal Teorema 3.3 e dal Teorema 5.2. ♦

6. Trasformazioni di funzioni affini generalizzate

In questo paragrafo verrà studiato il prodotto di composizione tra i vari tipi di funzioni affini generalizzate introdotte precedentemente, ritrovando come casi particolari alcuni risultati noti in letteratura.
Valgono al riguardo i seguenti teoremi.

Teorema 6.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione quasi-affine ed $F=g\circ f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è quasi-affine oppure semi quasi-affine allora F è rispettivamente quasi-affine oppure semi quasi-affine.

Dim. Se f è quasi-affine allora $\max\{f(x),f(y)\}\geq f(x+\lambda(y-x))\geq\min\{f(x),f(y)\}$ $\forall\lambda\in(0,1), \forall x,y\in C$; poiché per il Teorema 5.1 g è monotona, se g è nondecrescente [noncrescente] risulta:

$$g(\max\{f(x),f(y)\})\geq g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(\min\{f(x),f(y)\})$$
$$[g(\max\{f(x),f(y)\})\leq g(f(x+\lambda(y-x)))\leq g(\min\{f(x),f(y)\})]$$

da cui $\max\{g(f(x)),g(f(y))\}\geq g(f(x+\lambda(y-x)))\geq\min\{g(f(x)),g(f(y))\}$, ovvero F è quasi-affine.
Si supponga adesso f semi quasi-affine e siano $x,y\in C$ tali che $g(f(y))>g(f(x))$; per la nondecrescenza [noncrescenza] di g risulta $f(y)>f(x)$ [$f(y)<f(x)$]; poiché f è sm.qfn segue che $f(y)\geq f(x+\lambda(y-x))\geq f(x)$ [$f(y)\leq f(x+\lambda(y-x))\leq f(x)$] da cui, sempre per la nondecrescenza [noncrescenza] di g, si ha $g(f(y))\geq g(f(x+\lambda(y-x)))\geq g(f(x))$; la F è pertanto sm.qfn. ♦

Teorema 6.2 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C)\rightarrow\Re$ una funzione semistrettamente quasi-affine ed $F=g\circ f:C\rightarrow\Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è semistrettamente quasi-affine oppure quasi-affine in senso esteso allora F è rispettivamente semistrettamente quasi-affine oppure quasi-affine in senso esteso.

Dim. Per il Teorema 5.1, g è costante o strettamente monotona; se g è costante tale rimane anche la funzione F e quindi le tesi sono ovvie; si supponga quindi che g sia strettamente monotona. Sia $g(f(y))>g(f(x))$, ciò implica per la crescenza [decrescenza] di g che $f(y)>f(x)$ [$f(y)<f(x)$]; se f è ss.qfn si ha $f(y)>f(x+\lambda(y-x))>f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ [$f(y)<f(x+\lambda(y-x))<f(x)$] e perciò, per la crescenza [decrescenza] di g, $g(f(y))>g(f(x+\lambda(y-x)))>g(f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$ ovvero F è ss.qfn.
Sia adesso f e.qfn; se $g(f(y))=g(f(x))$, ciò implica per la stretta monotonicità di g che $f(y)=f(x)$; poiché f è e.qfn si ha $f(y)=f(x+\lambda(y-x))=f(x)$ $\forall\lambda\in(0,1)$ e quindi $g(f(y))=g(f(x+\lambda(y-x)))=g(f(x))$ $\forall\lambda\in(0,1)$, da cui la tesi. ♦

Teorema 6.3 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\to\Re$ una funzione a valori reali, $g:f(C)\to\Re$ una funzione strettamente quasi-affine ed $F=g\circ f:C\to\Re$ la corrispondente funzione composta. Se f è strettamente quasi-affine oppure strettamente quasi-lineare in senso esteso allora F è rispettivamente strettamente quasi-affine oppure strettamente quasi-affine in senso esteso.
Dim. Per il Teorema 5.1, g è strettamente monotona.
Se f è es.qfn, per la stretta monotonia di g, risulta $g(f(y))\neq g(f(x))$ $\forall x,y\in C$, $x\neq y$, e quindi F è es.qfn. Se f è s.qfn, allora è sia ss.qfn sia es.qfn e quindi, per il caso precedente ed il Teorema 6.2, F è sia ss.qfn sia es.qfn ovvero, per la Proprietà 2.1, F è s.qfn.. ♦

Si osservi che risultati analoghi ai precedenti non valgono per le funzioni affini le quali necessitano di una trasformazione affine per ottenerne un'altra affine; ad esempio la funzione $g(y)=y^3$ è strettamente monotona e la funzione $f(x)=x$ è affine ma la funzione $g(f(x))=x^3$ non è affine. I risultati precedenti possono però essere estesi alle funzioni differenziabili pseudo-affini.

Teorema 6.4 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme aperto convesso, $f:C\to\Re$ una funzione a valori reali differenziabile in C, $g:f(C)\to\Re$ una funzione derivabile pseudo-affine ed $F=g\circ f:C\to\Re$ la corrispondente funzione composta.

i) Se f e g sono pseudo-affini allora F è pseudo-affine;
ii) se f e g sono strettamente pseudo-affini ad una variabile allora F è strettamente pseudo-affine.

Dim. Per il Teorema 5.2 la funzione g è s.pfn se e solo se è strettamente monotona ed $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in I$, mentre per il Teorema 3.2 la funzione ad una variabile g è pfn se e solo se in ogni segmento $[x,y]\subseteq C$ è costante oppure s.pfn.

Se g è costante tale risulta anche la F che è quindi pfn, si supponga quindi che g sia strettamente monotona con $f'(x)\neq 0\ \forall x\in I$.
Siano $x,y\in C$ tali che $(y-x)^T\nabla F(x)\leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla F(y)\leq 0$; poiché $\nabla F(x)=g'(x)\nabla f(x)$ ed essendo $g'(x)>0$ [$g'(x)<0$] segue che $(y-x)^T\nabla f(x)\leq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)\leq 0$ [$(y-x)^T\nabla f(x)\geq 0$ oppure $(y-x)^T\nabla f(y)\geq 0$]. Se f è pfn allora risulta $f(y)\leq f(x)$ [$f(y)\geq f(x)$] da cui si ottiene per la crescenza [decrescenza] di g $g(f(y))\leq g(f(x))$; se invece f è s.pfn allora risulta $f(y)<f(x)$ [$f(y)>f(x)$] da cui si ottiene, sempre per la crescenza [decrescenza] di g, $g(f(y))<g(f(x))$. ♦

I teoremi precedenti permettono di ottenere il seguente corollario.

Corollario 6.1 Sia $C\subseteq\Re^n$ un insieme convesso, $f:C\rightarrow\Re$ una funzione a valori negativi od a valori positivi ed $1/f:C\rightarrow\Re$ la funzione reciproca di f.
Se f verifica una delle definizioni date nelle Definizioni 2.2 e 2.3 allora $1/f$ verifica la stessa definizione.
Dim. Si osservi che la funzione $g(y)=1/y$ è strettamente pseudo-affine in quanto, per il Teorema 5.2, è decrescente e tale che $g'(y)<0$ per ogni $y\neq 0$.
La tesi segue dai Teoremi 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 in quanto $1/f=g\circ f$. ♦

Si dimostra infine il seguente teorema di composizione per funzioni affini.

Teorema 6.5 Si consideri una funzione a valori reali $f:D\rightarrow\Re$, con $D\subseteq\Re^m$ insieme convesso, e la funzione affine vettoriale $\Phi:C\rightarrow D$, con $C\subseteq\Re^n$ insieme convesso, tale che $\Phi(x)=Ax+b$ dove $A\in\Re^{m\times n}$ e $b\in\Re^m$; si consideri inoltre la funzione composta $F(x)=f(Ax+b)$, $F:C\rightarrow\Re$.
Se f è fn, ss.fn, qfn, ss.qfn, e.qfn, sm.qfn oppure pfn allora F gode della stessa proprietà, ovvero è rispettivamente fn, ss.fn, qfn, ss.qfn, e.qfn, sm.qfn oppure pfn.
Se inoltre la matrice A è quadrata di ordine n ed invertibile allora se f è s.qfn, es.qfn, oppure s.pfn allora F gode della stessa proprietà, ovvero è rispettivamente s.qfn, es.qfn, oppure s.pfn.
Dim. Le tesi seguono direttamente dalle definizioni osservando che essendo Φ affine risulta $f(\Phi(\lambda x+(1-\lambda)y))=f(\lambda\Phi(x)+(1-\lambda)\Phi(y))\ \forall x,y\in C\ \forall\lambda\in(0,1)$ e che, nel caso in cui la matrice A sia quadrata ed invertibile, si ha necessariamente $\Phi(x)=Ax+b\neq Ay+b=\Phi(y)\ \forall x,y\in C\ x\neq y$. ♦

Si osservi che il precedente teorema può essere utilizzato per dimostrare che la funzione lineare frazionaria $f(x)=\frac{c_0+c^T x}{d_0+d^T x}$ è pseudo-affine.

Teorema 6.6 La funzione $h:\Re^2_{++}\to\Re, h(z_1,z_2)=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\alpha$, è pseudo affine per ogni valore del parametro reale α.

Dim. Se $\alpha=0$ la tesi è ovvia essendo h costante; per $\alpha\neq0$ si dimostra la pseudo-affinità di h per mezzo del Teorema 4.5.

Si osservi inizialmente che risulta $\nabla h(z_1,z_2)=\alpha\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{z_2}\right)^2\begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1\end{bmatrix}$. Sia adesso $(z_1,z_2)\in\Re^2_{++}$ e sia $v\in\Re^n$ tale che $v^Tv=1$ e $v^T\nabla h(z_1,z_2)=0$, ovvero tale che $v_1z_2=v_2z_1$ dal momento che $\alpha\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{z_2}\right)^2\neq0$; la funzione $g(t)=\left(\frac{z_1+tv_1}{z_2+tv_2}\right)^\alpha$ risulta tale che $g'(t)=\alpha\left(\frac{z_1+tv_1}{z_2+tv_2}\right)^{\alpha-1}(v_1z_2+tv_1v_2-v_2z_1-tv_1v_2)=0$ per ogni reale t ed è quindi costante, implicando così la pseudo-affinità di h. ♦

Corollario 6.2 Siano f_1 ed f_2 due funzioni affini positive definite sull'insieme convesso $C\subseteq\Re^n$. Allora la funzione $g=(f_1/f_2)^\alpha, \alpha\in\Re$, è pseudo-affine.

Dim. Segue dal Teorema 6.6 e dal Teorema di composizione 6.5. ♦

Si osservi che la proprietà per la quale una qualsiasi combinazione affine di funzioni affini (o costanti) è ancora affine (o costante) non vale per le altre classi di funzioni affini generalizzate, come è mostrato nel seguente esempio 6.1 i); così pure il prodotto di due funzioni affini generalizzate non è, in generale, affine generalizzato, come è evidenziato nell'esempio 6.1 ii).

Esempio 6.1

Si considerino le seguenti funzioni derivabili, definite su tutta la retta dei reali.

i) $f_1(x)=x^3+x$ ed $f_2(x)=-x^3+x^2-x$: risulta $f_1'(x)=3x^2+1>0$ e $f_2'(x)=-3x^2+2x-1<0$ $\forall x\in\Re$, di conseguenza per il Teorema 5.2 entrambe le funzioni sono strettamente pseudo-affini; la loro somma però, data dalla funzione $g(x)=x^2$, è strettamente convessa e non è quindi neanche quasi-concava.

ii) $f_1(x)=f_2(x)=x$: le due funzioni identità sono affini, ma il loro prodotto è ancora dato dalla funzione $g(x)=x^2$.

Generalized affine scalar functions

SUMMARY

In this paper some different classes of functions, generalizing the concept of affine function, are introduced and studied. Properties and relationships among the classes are given and their monotone behaviour is also stressed.
Also some properties about functions transformation are provided.

BIBLIOGRAFIA

[1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, Quasi-concave programming, Econometrica 29 (1961) 779-800.

[2] M. Avriel, Nonlinear programming: analysis and methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] M. Avriel, W.E. Diewert, *et al.*, Generalized concavity, Mathematical concepts and methods in science and engineering 36, edited by A. Miele, Plenum Press, New York, 1988.

[4] R. Cambini, Nuove classi di funzioni scalari concave generalizzate, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali 1 (1994) 1-18.

[5] W.E. Diewert, M. Avriel, and I. Zang, Nine kinds of quasiconcavity and concavity, J. Econ. Theory 25 (1981) 397-420.

[6] S. Karamardian, Duality in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. 20 (1967) 344-358.

[7] K.O. Kortanek and J.P. Evans, Pseudo-concave programming and Lagrange regularity, Operations Research 15 (1967) 882-891.

[8] O.L. Mangasarian, Nonlinear programming, McGraw-Hill, New York, 1969.

[9] B. Martos, The direct power of adjacent vertex programming methods, Manage. Sci. 12 (1965) 241-252.

[10] B. Martos, Nonlinear programming theory and methods, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[11] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York, 1970.

[12] J. Stoer and C. Witzgall, Convexity and optimization in finite dimensions, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[13] W.A. Thompson and D.W. Parke, Some properties of generalized concave functions, Operation Research 21 (1973) 305-313.