Report n.97

Sulla esistenza di elementi massimali

A. Cambini - L. Carosi

Pisa, November 1995

Sulla esistenza di elementi massimali

A. Cambini - L. Carosi[1]

Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia - Università di Pisa

1. Introduzione

La ricerca di condizioni necessarie e/o sufficienti a garantire l'esistenza di elementi massimali di un insieme ordinato da una relazione transitiva, gioca un ruolo particolarmente significativo sia nell'ambito economico (vedasi ad esempio la teoria del consumatore), sia in quelli della programmazione multiobiettivo e del Multicriteria Decision Making.

In questo lavoro verranno stabiliti vari teoremi di esistenza relativi a insiemi contenuti in spazi topologici preordinati, alcuni dei quali generalizzano recenti risultati proposti nell'ambito di spazi vettoriali topologici linearmente ordinati (A. Cambini, L.Martein [4], J. Jahn [7], D.T. Luc [10], [11], Y. Sawaragy, H. Nakayama, T. Tanino[12], P.L.Yu [15]).

Dopo aver evidenziato come è possibile caratterizzare l'insieme degli elementi massimali di un insieme preordinato tramite le catene massimali dell'insieme stesso, si introduce sia una relazione d'ordine compatibile con la struttura topologica dell'insieme (denominata R-corretta), sia una classe di insiemi (denominati R-completi che si dimostra contenere gli insiemi compatti e semicompatti) tramite i quali si stabilisce un teorema di esistenza assai generale che permette di inquadrare unitariamente molti noti risultati quali, ad esempio, l'esistenza di elementi massimali rispetto all'ordinamento lessicografico, agli ordinamenti paretiani deboli e non, agli ordinamenti completi e agli ordinamenti indotti da coni convessi.

Tra l'altro, viene investigato il ruolo della σ-transitività introdotta da vari economisti (P. Scapparone [13] , T.E.Smith [14] e viene stabilito un teorema di esistenza di elementi massimali in spazi metrici che generalizza un risutato ottenuto in T.E.Smith[14].

---

[1] Il lavoro é stato discusso congiuntamente dagli autori; in particolare i risultati relativi ai paragrafi 3, 4, 5, sono dovuti a L. Carosi.

2. Relazioni d'ordine e insieme ordinati: generalità

In questo paragrafo richiameremo alcune nozioni relative alle relazioni d'ordine, utili ai fini dei risultati che esporremo nel presente lavoro.

Sia S un insieme e R una relazione binaria su S.Scriveremo xRy in luogo di $(x,y)\in R$ e denoteremo con R(y) l'insieme $R(y) =\{x\in S: xRy\}$.

La relazione R è detta:

- **riflessiva** se $x\in R(x)$ $\forall x\in S$
- **irriflessiva** se $x\notin R(x)$ $\forall x\in S$
- **transitiva** se $x\in R(y)$, $y\in R(z) \Rightarrow x\in R(z)$
- **antisimmetrica** se $x\in R(y)$, $y\in R(x) \Rightarrow x=y$
- **asimmetrica** se $x\in R(y) \Rightarrow y\notin R(x)$
- **debolmente completa** se $\forall x,y\in S$, $x\neq y$, si ha $x\in R(y)$ oppure $y\in R(x)$
- **completa** se $\forall x,y\in S$ si ha $x\in R(y)$ oppure $y\in R(x)$.

Si osservi che:

- una relazione asimmetrica è necessariamente irriflessiva;
- una relazione irriflessiva e transitiva è necessariamente asimmetrica;
- una relazione asimmetrica è necessariamente antisimmetrica;
- Se R è transitiva allora $x\in R(y)$ implica $R(x)\subseteq R(y)$.

In corrispondenza delle proprietà di una relazione R si definiscono le seguenti relazioni d'ordine :

- R è un **preordine parziale** se verifica le proprietà di riflessività e di transitività;
- R è un **ordine parziale** se verifica le proprietà di riflessività, di antisimmetria e di transitività;
- R è un **ordine totale** se verifica le proprietà di riflessività, di antisimmetria, di transitività e di completezza .

Ad una relazione d'ordine R verranno associate le seguenti relazioni d'ordine:

- la relazione R* così definita: xR^*y se $x=y$ oppure $x\in R(y)$;
- la relazione P così definita: xPy se $x\in R(y)$ e $y\notin R(x)$.

La relazione R* é ovviamente riflessiva cosicchè se R é transitiva, oppure antisimmetrica e transitiva, oppure antisimmetrica, transitiva e debolmente completa, allora R* diviene, rispettivamente, un preordine parziale, un ordine parziale e un ordine totale.

La relazione P é ovviamente asimmetrica e irriflessiva ; se R é transitiva allora P e P* sono transitive.

Usando un linguaggio tratto dall'Economia diremo che:

- x è preferito o indifferente a y se xRy;
- x é strettamente preferito a y se xPy; l'insieme degli elementi strettamente preferiti ad y sarà denotato con P(y), ovvero $P(y)=\{x \in S: xPy\}$.

Ci si riferisce a P come alla relazione di stretta preferenza.

Una proprietà tra le relazioni R e P che sarà utilizzata in seguito, é espressa dal seguente Teorema:

Teorema 2.1

Sia R una relazione transitiva definita su un insieme S e sia P la relazione di stretta preferenza associata ad R. Vale la seguente proprietà:

$$x \in P(y),\ y \in R(z) \Rightarrow x \in P(z)$$

Dim.

La transitività di R implica $x \in R(z)$; se per assurdo $z \in R(x)$, le relazioni $y \in R(z)$, $z \in R(x)$ implicherebbero $y \in R(x)$ contro l'ipotesi $x \in P(y)$. ♦

Dato un insieme S e una relazione binaria R su esso diremo che:

- S é **parzialmente preordinato** se R è transitiva o, equivalentemente se R* è un preordine parziale;
- S é **parzialmente ordinato** se R è antisimmetrica e transitiva o, equivalentemente, se R* è un ordine parziale;
- S é **totalmente ordinato** se R è antisimmetrica, transitiva e debolmente completa o, equivalentemente, se R* è un ordine totale.

Si consideri adesso un sottoinsieme $X \subseteq S$ di un insieme S parzialmente preordinato dalla relazione R. Diremo che:

- $x^* \in X$ è un elemento **massimo** (minimo) di X se $x^* \in R^*(x) \cap X\ \forall x \in X$ ($x \in R^*(x^*) \cap X\ \forall x \in X$).

Si osservi che un elemento massimo, qualora esista, non é necessariamente unico; si ha unicità se R é antisimmetrica ed, in particolare, se X é totalmente ordinato.

- $x^* \in S$ è un **maggiorante** (minorante) di X se $x^* \in R^*(x)\ \forall x \in X$ ($x \in R^*(x^*)\ \forall x \in X$).
- $x^* \in S$ è un **estremo superiore** di X se x* è un minorante dell'insieme dei maggioranti di X.

- $x^* \in X$ è un elemento **massimale** di X se $P(x^*) \cap X = \emptyset$ o, equivalentemente , se $P^*(x^*) \cap X = \{x^*\}$.
Si osservi che $x^* \in X$ è un elemento massimale di X se e solo se é verificata la seguente condizione: $y \in R(x^*) \cap X \Rightarrow x^* \in R(y) \cap X$.
Un sottoinsieme totalmente ordinato C contenuto in X è detto una **catena** di X. Una catena C é detta **massimale** se non é ulteriormente ampliabile, ovvero se non esistono catene del tipo $C \cup \{y\}$ con $y \in X$, $y \notin C$.
L'esistenza di catene massimali in un insieme parzialmente preordinato é garantita dal seguente e noto

Lemma di Kuratowsky
Ogni catena di un insieme parzialmente preordinato è contenuta in una catena massimale.

3. Esistenza di elementi massimali in insiemi parzialmente preordinati

La ricerca di condizioni atte a garantire l'esistenza di elementi massimali in un insieme ordinato da una relazione transitiva, gioca un ruolo particolarmente significativo sia nella letteratura economica (vedasi ad esempio la teoria del consumatore), che in quella matematica (si pensi ad esempio all'ottimizzazione vettoriale).
Scopo di questo lavoro é di fornire un inquadramento generale del problema ed un approccio che permetta di ottenere sia condizioni più generali di quelle note in letteratura, sia nuove condizioni .
Le condizioni di esistenza verranno stabilite dapprima su insiemi ordinati e, nei successivi paragrafi, su insiemi dotati di ulteriori strutture che si aggiungono a quella di ordine.
Come è noto dalla teoria degli insiemi, le fondamenta teoriche di riferimento per l'esistenza di elementi massimali in insiemi parzialmente preordinati sono costituite dal Lemma di Zorn e dalle sue proposizioni equivalenti tra le quali il Lemma di Kuratowsky.
Il Lemma di Zorn può essere enunciato nel seguente modo:

Lemma di Zorn:

Sia S un insieme parzialmente preordinato dalla relazione R e sia X un suo sottoinsieme, non necessariamente proprio.

Se ogni catena di X ammette un maggiorante in X, allora esiste in X un elemento massimale.

Si denoti con E(X,R) l'insieme degli elementi massimali di X rispetto alla relazione R.

Il seguente Lemma caratterizza gli elementi massimali di X come i massimi elementi delle catene massimali contenute in X.

Lemma 3.1.

Sia S un insieme parzialmente preordinato rispetto ad una relazione R e sia $X \subseteq S$.

Allora $x^* \in E(X,R)$ se e solo se x^* é l'elemento massimo di una catena massimale di X.

Dim.

Sia C una catena massimale di X avente massimo elemento x^*; se x^* non appartiene a E(X,R) esiste $y \in X$ tale che $y \in P(x^*) \cap X$ e ciò implica che l'insieme $C \cup \{y\}$ è ancora una catena in X che contiene propriamente C e questo contraddice l'ipotesi di massimalità della catena C. Ne consegue che $x^* \in E(X,R)$.

Sia ora $x^* \in E(X,R)$. Ovviamente $\{x^*\}$ è una catena in X e, per il lemma di Kuratowsky, è contenuta in una catena massimale C di X. Resta da dimostrare che x^* è l'elemento massimo di C. Se ciò non fosse, esisterebbe $y \in C$ tale che $y \in P(x^*) \cap X$, contro l'ipotesi $x^* \in E(X,R)$. Il lemma è così provato. ◆

Osservazione 3.1.

Come conseguenza immediata della definizione di maggiorante, si ha che l'insieme dei maggioranti di una catena C di X é dato dall'insieme $E_C = \bigcap_{c \in C} (R^*(c) \cap X)$.

Poiché l'esistenza di elementi massimi in catene massimali è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di elementi massimali, è importante stabilire sotto quali condizioni una catena C ha un massimo. Vale al riguardo il seguente Teorema:

Teorema 3.1.

Sia S un insieme parzialmente preordinato rispetto ad una relazione R e sia C una catena di $X \subseteq S$. Allora valgono le i), ii), iii) :

i) C ha elemento massimo c^* $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{c \in C} (P^*(c) \cap X) = \{c^*\}$;

ii) C non ha elemento massimo $\Leftrightarrow \bigcap_{c\in C} (P^*(c)\cap X) = \varnothing$;

iii) C ha elemento massimo $\Leftrightarrow$ C ha un maggiorante in X $\Leftrightarrow$ $E_C \neq \varnothing$.

Dim.

i), ii). Se c* é l'elemento massimo di C, ovviamente $c^* \in (P^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$; d'altra parte ogni elemento di $\bigcap_{c\in C}(P^*(c)\cap X)$ è, per definizione, un massimo per C. Poiché un insieme totalmente ordinato può avere al più un elemento massimo si ha la tesi.

iii)

$\Rightarrow$ Basta osservare che il massimo elemento di un insieme é anche un maggiorante per l'insieme.

$\Leftarrow$ Sia $x^* \in E_C$ ovvero $x^* \in (R^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$. Sono possibili due alternative: $x^* \in (P^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$ oppure esiste $c^* \in C$ tale che $x^* \in (R^*(c^*)\cap X)$ e $c^* \in (R^*(x^*)\cap X)$. Nel primo caso $x^* \in \bigcap_{c\in C} (P^*(c)\cap X)$ e di conseguenza x* è l'elemento massimo di C . Nel secondo caso $c^* \in C$ risulta essere l'elemento massimo di C in quanto $c^* \in (R^*(x^*)\cap X)$ e $x^* \in (R^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$ implica $c^* \in (R^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$, ed essendo C totalmente ordinato, necessariamente si ha $c^* \in (P^*(c)\cap X)$ $\forall c\in C$, cosicchè c* diviene l'elemento massimo di C. ♦

Denotiamo con $\bigcup_C E_C$ l'unione degli insiemi E_C ottenuta al variare di tutte le possibili catene massimali di X .

Il seguente Teorema fornisce una caratterizzazione degli elementi massimali di un insieme parzialmente preordinato.

Teorema 3.2

Sia X un sottoinsieme di un insieme S parzialmente preordinato rispetto ad una relazione R . Si ha:

i) $E(X,R) = \bigcup_C E_C$

ii) $E(X,R) = \varnothing$ se e solo se $E_C = \varnothing$ per ogni catena massimale C di X.

Dim.

i) Per il Lemma 3.1, $x^* \in E(X,R)$ implica che x* è l'elemento massimo di una catena massimale C di X, cosicché $x^* \in E_C$; di conseguenza $E(X,R) \subseteq E_C$. Resta da dimostrare che per ogni catena massimale C di X risulta $E_C \subseteq E(X,R)$. Per quanto dimostrato nel Teorema 3.1, se $x^* \in E_C$ allora o x* è l'elemento massimo di C, ed in tal caso per il Lemma 3.1 $x^* \in E(X,R)$, oppure C possiede elemento massimo c* necessariamente appartenente a E(X,R) per il Lemma 3.1, tale che $x^* \in (R^*(c^*)\cap X)$ e

$c^* \in (R^*(x^*) \cap X)$. Se $x^* \notin E(X,R)$, esiste z tale che $z \in (P(x^*) \cap X)$, da cui per la transitività di R, $z \in (P(c^*) \cap X)$ e ciò è assurdo in quanto $c^* \in E(X,R)$. Di conseguenza $x^* \in E(X,R)$ e $E_C \subseteq E(X,R)$.

ii) Ovvia conseguenza della i). ♦

Denotando con A' il complementare dell'insieme A e con "$\subset$" la relazione di stretto contenuto, si ha il seguente

Corollario 3.1

Sia X un sottoinsieme di un insieme S parzialmente preordinato rispetto ad una relazione R . Si ha allora:

$E(X,R) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ esiste una catena massimale $\mathcal{C}$ di X tale che $\bigcup_{c \in \mathcal{C}} (R^*(c))' \cap X) \subset X$.

Dim.

Per il Teorema 3.2 $E(X,R) \neq \emptyset$ se e solo se esiste una catena massimale $\mathcal{C}$ tale che $E_C = \bigcap_{c \in \mathcal{C}} (R^*(c) \cap X) \neq \emptyset$. Di conseguenza il complementare di E_C é contenuto propriamente in X, da cui la tesi. ♦

Allo scopo di ottenere un risultato che generalizza quello dato da Luc [10], ricordiamo (vedi ad es. Kelley [8]) che un insieme I non vuoto e detto **direzione**, oppure insieme filtrante, oppure insieme diretto se I è ordinato tramite una relazione "$\geq$" verificante le seguenti proprietà:

a) riflessiva;

b) transitiva;

c) se $i,j \in I$, esiste $k \in I$ tale che $k \geq i$ e $k \geq j$.

Si osservi che l'insieme dei numeri naturali, dei razionali, dei reali, rispetto alla consueta relazione d'ordine "maggiore od uguale" sono direzioni; in generale ogni catena di un insieme parzialmente preordinato è una direzione.

Se A è un insieme e I una direzione, ogni applicazione di I in A viene detta **I-successione** in A o **rete** in A. Una rete è denotata con $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$

Quando la direzione I è l'insieme dei numeri naturali con l'ordinamento usuale, la definizione di I-successione si riduce a quella di successione.

Una rete $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ contenuta in un insieme parzialmente preordinato dalla relazione R è detta **crescente** rispetto a R se e solo se $x_\beta \in P(x_\alpha)$ $\forall\ \alpha,\beta \in I$, $\beta > \alpha$.

Il seguente teorema evidenzia che il risultato espresso da Luc in [10] , può essere ottenuto in un insieme parzialmente preordinato senza necessità di nessuna struttura topologica e/o algebrica.

Teorema 3.3

Sia X un sottoinsieme di un insieme S parzialmente preordinato rispetto ad una relazione R. Se non esiste nessun ricoprimento di X del tipo $\bigcup_{\alpha\in I} (R^*(x_\alpha))'\cap X)$ essendo $\{x_\alpha : \alpha\in I\}$ una rete crescente in X, allora $E(X,R) \neq \emptyset$.

Dim.

L'ipotesi del Teorema, tenuto conto che una catena massimale può essere concepita come una rete crescente, equivale ad affermare che per ogni catena massimale C di X si ha

$\bigcup_{c\in C} (R^*(c))'\cap X) \subset X$. Dal Corollario 3.1 si ha la tesi. ♦

4. Relazioni d'ordine su spazi topologici

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R. La struttura topologica dello spazio consente di definire relazioni d'ordine compatibili con tale struttura.

In questo paragrafo introdurremo una relazione d'ordine che chiameremo **corretta** in quanto, come vedremo successivamente, estende una definizione data su spazi topologici lineari (Luc [10]) ; una tale relazione sarà confrontata con due tipiche relazioni d'ordine usate in Economia: quella relativa alla semicontinuità superiore (C.D.Aliprantis, D.J. Brown, O.Burkinshaw [1]) e quella relativa alla **σ-transitività** (Scapparone [13], Smith [14]) .

La scelta di queste relazioni va ricercata nel fatto che esse permetteranno di ottenere risultati di esistenza di elementi massimali assai generali.

Ricordiamo che una relazione R è detta:

- **semicontinua superiormente** se per ogni $x\in S$, l'insieme $R^*(x)$ è chiuso.

Un esempio di relazione semicontinua superiormente è data dall'ordinamento Paretiano, mentre l'ordinamento lessicografico fornisce un esempio di relazione non semicontinua superiormente;

- **σ-transitiva** se per ogni successione crescente $\{x_n\} \subset S$ (cioé tale che $x_{n+1} \in P(x_n)$, $n=1,2,..$) e convergente a z si ha $z \in P(x_n)$ $\forall n$.

La definizione data di σ-transitività (vedi ad.es. Scapparone [13]) corrisponde alla σ-transitività debole introdotta da Smith [14] in corrispondenza di una relazione totale; essa esprime una condizione di "regolarità" tra la relazione d'ordine R e la topologia dello spazio. Si richiede che se in una successione un elemento è "migliore" del suo precedente, allora anche il punto a cui eventualmente la successione converge, deve essere "migliore" di ogni elemento della stessa.

Sono relazioni σ-transitive quelle relative agli ordinamenti paretiano e lessicografico; non é una relazione transitiva quella di cui al seguente esempio:

<u>Esempio 4.1</u>

Si consideri l'intervallo [0,1] rispetto alla topologia dei numeri reali e la relazione R così definita: R coincide con l'usuale ordinamento dei numeri reali nell'intervallo [0,1) e risulta inoltre $R(1)=\{1\}$.

La relazione R non è σ-transitiva in quanto ogni successione crescente convergente a 1 non verifica la definizione.

Diremo che la relazione R è **corretta** se verifica la seguente proprietà:

$$z \in P(y)\,,\ y \in clR^*(x) \ \Rightarrow\ z \in P(x)$$

Osservazione 4.1

A norma del Teorema 2.1, ogni relazione semicontinua superiormente è corretta.

Osservazione 4.2

E' facile verificare che la relazione di cui all'Esempio 4.1 è corretta; ne consegue che una relazione corretta non é necessariamente σ-transitiva. D'altra parte anche una relazione σ-transitiva non é necessariamente corretta in quanto l'ordinamento lessicografico, che é σ-transitivo, non è corretto: si considerino nello spazio topologico euclideo $\mathbf{R}^2$ i punti , $z=(6,6)$, $y=(6,5)$, $x=(6,8)$; risulta $z \in P(y)$, $y \in clRx$ ma $z \notin P(x)$.

Dimostreremo adesso che la semicontinuità superiore di una relazione implica sia la correttezza che la σ-transitività. Si osservi in particolare che la i) del seguente Teorema generalizza un risultato dato da Smith [14] per un ordinamento totale.

Teorema 4.1.

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R.

i) Se R è semicontinua superiormente, allora R è σ-transitiva;

ii) Se R è semicontinua superiormente, allora R è corretta.

Dim.

i) Sia $\{x_n\}$una successione crescente e convergente a z. Si deve dimostrare che $z \in P(x_n) \forall n$. Dimostriamo dapprima che $z \in R^*(x_n)\ \forall n$. Per ogni $k \geq 1$ si ha $x_s \in P(x_k)$ $\forall s > k$ e, in particolare, $x_s \in R^*(x_k)\ \forall s \geq k$, da cui $\{x_s\} \subset R^*(x_k)$. Poichè la successione converge a z, essendo per ipotesi $R^*(x_k)$ un insieme chiuso, si ha $z \in R^*(x_k)\ \forall k$.

Dimostriamo ora che $z \in P(x_n)\ \forall n$. Se così non è, esiste un indice n^* tale che $z = x_{n^*}$ oppure $z \in R(x_{n^*})$ e $x_{n^*} \in R(z)$. Nel primo caso, essendo $x_{n^*+1} \in P(x_{n^*}) = P(z)$ e $z \in R^*(x_k)\ \forall k$, cosicchè $z \in R^*(x_{n^*+1})$, si ha per il Teorema 2.1, $x_{n^*+1} \in P(x_{n^*+1})$ e ciò è assurdo. Nel secondo caso, dalle relazioni $x_{n^*+1} \in P(x_{n^*})$, $x_{n^*} \in R(z)$ si ha $x_{n^*+1} \in P(z)$ e poichè $z \in R^*(x_{n^*+1})$, si avrebbe nuovamente $x_{n^*+1} \in P(x_{n^*+1})$, il che è assurdo.

ii) Segue dal Teorema 2.1, tenuto conto che l'ipotesi equivale alla chiusura degli insiemi $R^*(x)\ \forall x \in S$. ♦

5. Esistenza di elementi massimali in spazi topologici parzialmente preordinati

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S. L' esistenza di elementi massimali di X dipende sia dal tipo di relazione d'ordine considerato, sia dalle proprietà topologiche dell'insieme X. A quest'ultimo riguardo, introdurremo tre tipologie di insiemi di seguito definite:

Definizione 5.1

X è detto **R-completo** se non ha nessun ricoprimento di aperti della forma $\{(\mathrm{cl}R^*(c))' \cap X)\}_{c \in C}$ essendo C una catena massimale di X.

Definizione 5.2

X è detto **R-semicompatto** se ogni ricoprimento di X del tipo $\{(\mathrm{cl}R^*(x_i))' \cap X)\}_{i \in I}$ ammette un sottoricoprimento finito di X, ove I è un qualsiasi insieme di indici e $x_i \in X$ per ogni $i \in I$.

Definizione 5.3

X è detto **R-compatto** se per ogni $x \in X$ l'insieme $clR^*(x) \cap X$ è compatto.

Osservazione 5.1

La definizione 5.1 é, rispetto a quella riportata da Luc in [10], più generale per il fatto che é espressa nell'ambito di spazi topologici non necessariamente lineari ed é meno restrittiva in quanto pone condizioni sulle sole catene massimali di X e non su tutte le reti crescenti di X.

Le definizioni 5.2 e 5.3 estendono a spazi topologici alcune note definizioni espresse in spazi vettoriali topologici (Luc [10], Sawaragy..[12], Jahn [7], Cambini - Martein [4])

I legami intercorrenti tra i vari insiemi introdotti sono evidenziati nel seguente teorema.

Teorema 5.1.

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S.

Allora se X é compatto $\Rightarrow$ X è R-compatto $\Rightarrow$ X é R-semicompatto $\Rightarrow$ X è R-completo.

Dim.

La prima implicazione è conseguenza diretta del fatto che un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Per dimostrare la seconda implicazione, si consideri un ricoprimento aperto di X del tipo $\{(clR^*(x_i))' \cap X)\}_{i \in I}$. Scelto un arbitrario $x_k \in X$, la sottofamiglia $\{(clR^*(x_i))' \cap X)\}_{i \in I}$, $i \neq k$, forma un ricoprimento aperto per l'insieme $\{(clR^*(x_k)) \cap X)\}$ che, essendo compatto per l'ipotesi di R-compattezza, ammette un sottoricoprimento finito della forma $\{(clR^*(x_i))' \cap X)\}_{i \in J}$, con J finito; tale sottoricoprimento, unitamente all'insieme $\{(clR^*(x_k))' \cap X)\}$ costituisce un ricoprimento finito di X che risulta essere così R-semicompatto.

Per dimostrare la terza implicazione supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento di X con $X = \bigcup_{c \in C} (clR^*(c))' \cap X)$, essendo C una catena massimale di X. Per ipotesi X ammette un ricoprimento finito di X, ovvero esistono n elementi $c_1, c_2, ..., c_n$ della catena C tali che $X = (clR^*(c_1))' \cap X) \cup (clR^*(c_2))' \cap X) ..... \cup (clR^*(c_n))' \cap X)$.

Gli elementi $c_1, c_2, ..., c_n$ sono tra loro ordinati totalmente in quanto elementi di una catena. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $c_k \in P(c_{k-1})$, $k=2,...,n$. Per la transitività di P si ha $c_n \in P(c_k)$ per $k=1,\dots,n-1$, cosicché $c_n \in clR^*(c_k)$ per $k=1,\dots,n$. Di conseguenza $c_n \notin clR^*(c_k)$ per $k=1,\dots,n$, e ciò contrasta l'ipotesi che $\{(clR^*(c_k))' \cap X)\}, k=1,\dots,n$, sia un ricoprimento di X. ♦

A norma del Teorema 5.1, gli insiemi R-completi sono quelli che assicurano la maggiore generalità. Il seguente Teorema esprime una condizione sufficiente affinché un insieme sia R-completo:

Teorema 5.2

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S. Se ogni catena massimale di X ha un estremo superiore in X, allora X è R-completo.

Dim.

Sia C una catena massimale e sia $z \in X$ un estremo superiore per C.

Risulta $z \in \bigcap_{c \in C} (clR^*(c)) \cap X)$, da cui $\bigcap_{c \in C} (clR^*(c)) \cap X) \neq \varnothing$ e, conseguentemente, $\bigcup_{c \in C} (clR^*(c))' \cap X) \subset X$. Ne consegue la non esistenza di ricoprimenti in X del tipo $\{(clR^*(c))' \cap X)\}_{c \in C}$ con C catena massimale di X. ♦

I seguenti esempi dimostrano che un insieme R-compatto non é necessariamente compatto, un insieme R-semicompatto non é necessariamente R-compatto e che un insieme R-completo non é necessariamente R-semicompatto.

Esempio 5.1:

Sia $X = \{(x_1,x_2) \in \Re^2 : x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1\}$ e sia R l'ordinamento paretiano. X é ovviamente R-conpatto ma non é compatto.

Esempio 5.2:

Sia $X = \{(x_1,x_2) \in \Re^2 : x_1 \leq 1,\ -1 < x_2 < 1\} \cup \{(1,1)\ ,\ (1,-1)\}$. Posto $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, si consideri in X il preordine R definito da : $xRy \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$.

E' facile verificare che X non e' R-compatto ma e' R-semicompatto.

Esempio 5.3:

Si consideri la seguente unione numerabile di intervalli a due a due disgiunti $X = \bigcup I_k$, $k= 0, 1, \dots$, con $I_k = \{x \in \Re : 2k \leq x \leq 2k+1\}$. X é parzialmente preordinato dalla relazione R cosi' definita: se $x \in I_i$ e $x \in I_j$ con $i \neq j$, allora x e y non sono confrontabili fra loro; se invece $x,y \in I_i$, allora $xRy \Leftrightarrow x \geq y$.

X é R-completo in quantoche' le catene massimali di X sono gli intervalli I_k, cosicché $\bigcap_{c\in I_k}$ $(clR^*(c))\cap X) = \{2k+1\}$e, conseguentemente non esiste nessun ricoprimento di aperti della forma $\{clR^*(c)'\cap X\}_{c\in C}$ con C catena massimale di X. D'altra parte X non e' R-semicompatto: si consideri infatti la successione $x_n=\{2n+\frac{1}{2}\}$; esiste un ricoprimento di X della forma $(clR^*(x_n))'\cap X$, ma questo non ammette un sottoricoprimento finito.

Siamo ora in grado di stabilire alcuni teoremi di esistenza di elementi massimali.

Teorema 5.3.

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S. Se la relazione R è corretta e l'insieme X è R-completo, allora $E(X,R)\neq\emptyset$.

Dim.

Supponiamo per assurdo che $E(X,R)=\emptyset$. A norma del Lemma 3.1 e delle i) e ii) del Teorema 3.1, si ha

$$\bigcap_{c\in C} (P^*(c))\cap X)=\emptyset \text{ per ogni catena massimale } C. \tag{5.1}$$

Essendo X un insieme R-compatto, si ha $\bigcap_{c\in C}$ $(clR^*(c))\cap X)\neq\emptyset$; sia $z\in(clR^*(c))\cap X)$ $\forall c\in C$. Poiché $E(X,R)=\emptyset$, esiste $y\in X\cap P(z)$, cosicché la correttezza della relazione R implica $y\in\bigcap_{c\in C}$ $(P^*(c))\cap X)$, in contraddizione con la (5.1). ♦

Considereremo adesso due esempi relativi a insiemi R-completi. Il primo esempio mostra che la correttezza della relazione d'ordine é una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di elementi massimali; il secondo esempio mette in evidenza che la non correttezza della relazione d'ordine non implica la non esistenza di elementi massimali.

Esempio 5.4.

Si consideri $\mathbf{R}^2$ rispetto alla usuale topologia euclidea e lo si ordini rispetto all'ordinamento lessicografico R. Il sottoinsieme $X=\{x=(x_1,x_2\}\in\mathbf{R}^2: x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ é compatto e quindi, per il Teorema 5.1, é R-completo. D'altra parte R non é una relazione corretta (vedi Oss. 4.2) e risulta $(1,0)\in E(X,R)\neq\emptyset$.

Esempio 5.5.

Si consideri il sottoinsieme $X=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2: x_1^2+x_2^2=1\}$ rispetto alla topologia indotta dalla metrica euclidea. Ad ogni elemento $y\in X$ si associ l'angolo orientato, rispetto all'usuale verso antiorario, $\alpha = x^*\hat{O}y$ con $\alpha\in[0, 2\pi)$, essendo $x^*=(1,0)$ e $O=(0,0)$.

Si definisca in X la seguente relazione d'ordine R: xRy se e solo se $x^*\hat{O}x \geq x^*\hat{O}y$.

E' facile verificare che R è una relazione d'ordine totale e che l'unica catena massimale di X , che é l'insieme X stesso , ha x^* come elemento minimo ma non ha elemento massimo; di conseguenza , a norma del Lemma 3.1, $E(X,R)=\emptyset$. D'altra parte, risultando $\bigcap_{x\in X} clR^*(x))=\{x^*\}$, X è R-completo , mentre R non é corretta: siano infatti y e z tali che $z\in P(y)$, $y\neq x^*$; se R fosse corretta, essendo $y\in P(x^*)$, $x^*\in clR^*(z)$, risulterebbe $y\in P(z)$ e ciò é assurdo.

In modo analogo, gli esempi 5.6, 5.7, mostrano che, in corrispondenza di una relazione corretta, la R-completezza di un insieme é una condizione non necessaria per l'esistenza di elementi massimali, mentre la non R-completezza non implica che $E(X,R)=\emptyset$.

Esempio 5.6.

Si consideri $\mathbf{R}^2$ rispetto alla usuale topologia euclidea e lo si ordini rispetto all'ordinamento paretiano R; sia $X=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2: x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$. Per la ii) del Teorema 4.1, R è corretta, mentre é facile verificare che X non é R-completo e che $E(X,R)=\emptyset$.

Esempio 5.7.

Si consideri $\mathbf{R}^2$ rispetto alla usuale topologia euclidea e lo si ordini rispetto all'ordinamento paretiano R; sia $X=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2: x_1^2+x_2^2< 1\}\cup\{(1,0)\}$. R è corretta, X non é R-completo, ma risulta $(1,0)\in E(X,R)$.

Il seguente Teorema individua, in corrispondenza di relazioni corrette, classi di insiemi per le quali esistono elementi massimali.

Teorema 5.4

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S. Se la relazione R è corretta allora $E(X,R)\neq\emptyset$ se vale uno dei seguenti casi:

i) X è compatto

ii) X è R-compatto

iii) X è R-semicompatto.

iv) ogni catena massimale di X ha un estremo superiore in X.

Dim.

Conseguenza diretta dei Teoremi 5.1 e 5.2. ♦

Il seguente Teorema individua , in corrispondenza di insiemi R-completi (e quindi, per il Teorema 5.1, anche per insiemi compatti, R-compatti, R-semicompatti) una proprietà della relazione d'ordine che assicura l'esistenza di elementi massimali.

Teorema 5.5

Sia S uno spazio topologico di Hausdorff, parzialmente preordinato da una relazione R e sia X un sottoinsieme di S. Se X è R-completo allora $E(X,R)\neq\emptyset$ se l'insieme $R^*(x)$ è chiuso per ogni $x\in X$.

Dim.

Conseguenza diretta del Teorema 5.1. ♦

Metteremo adesso in evidenza il ruolo delle relazioni σ-transitive nello stabilire una condizione di esistenza di elementi massimali in spazi metrici.

Premettiamo dapprima il seguente

Lemma 5.1

Sia S uno spazio metrico, parzialmente preordinato da una relazione σ-transitiva R.

Per ogni catena massimale C si ha $\bigcap_{c\in C} clP^*(c))= \bigcap_{c\in C} P^*(c)$.

Dim.

Ovviamente risulta $\bigcap_{c\in C} P^*(c)) \subseteq \bigcap_{c\in C} clP^*(c)$, per cui resta da dimostrare l'inclusione opposta, ovvero che se $z \in \bigcap_{c\in C} clP^*(c))$, allora $z \in P^*(c)\ \forall\ c\in C$.

Sia $c\in C$ e si ponga $z_1=c$; risulta $z \in clP^*(z_1)$ e, di conseguenza, esiste una successione $\{y_{1,n}\}\subseteq P^*(z_1)$ tale che $y_{1,n} \to z$. Denotata con d la metrica di S, esiste $y_{1,n_1}\in\{y_{1,n}\}$

tale che $d(y_{1,n_1}, z) < \frac{1}{2}$. Posto $z_2 = y_{1,n_1}$, si ha allora $z_2 \in P^*(z_1)$, $z \in clP^*(z_2)$ e $d(z_2, z) < \frac{1}{2}$. Sia ora $\{y_{2,n}\} \subseteq P^*(z_2)$ tale che $y_{2,n} \to z$; esisterà un elemento $y_{2,n_2} \in \{y_{2,n}\}$ tale che $d(y_{2,n_2}, z) < \frac{1}{3}$. Posto $z_3 = y_{2,n_2}$, si ha allora $z_3 \in P^*(z_2)$, $z \in clP^*(z_3)$ e $d(z_3, z) < \frac{1}{3}$. Iterando il procedimento si genera una successione $\{z_n\}$ tale che $z_{k+1} \in P^*(z_k)$, $k=1, \dots, n-1$, $z \in clP^*(z_k)$ per ogni k, $d(z_n, z) < \frac{1}{n}$; di conseguenza $z_n \to z$ e, per la σ-transitività di R., si ha $z \in P^*(z_k)$ per ogni k; in particolare $z \in P^*(z_1) = P^*(c)$. Il Lemma é così dimostrato. ◆

Il Lemma 4.1 permette di ritrovare in uno spazio metrico, un risultato di Scapparone [13] espresso in uno spazio topologico che soddisfa al primo assioma di numerabilità.

Teorema 5.6

Sia S uno spazio metrico, parzialmente preordinato da una relazione σ-transitiva R. Allora, per ogni insieme compatto X si ha $E(X,R) \neq \emptyset$.

Dim.

Sia C una catena massimale di X e supponiamo che C non abbia massimo elemento, ovvero , a norma della ii) del Teorema 3.1, che $\bigcap_{c \in C}(P^*(c) \cap X) = \emptyset$. Per il Lemma 4.1 risulta $\bigcap_{c \in C}(clP^*(c) \cap X) = \emptyset$ ed essendo X compatto esistono un numero finito di elementi $c_1, \dots, c_n$ della catena (senza ledere la generalità possiamo supporre che $c_{k+1} \in P^*(c_k)$, $k=1, \dots, n-1$,), tali che $P^*(c_1) \cap \dots \cap P^*(c_n) = P^*(c_n) = \emptyset$, e ciò é assurdo in quanto $c_n \in P^*(c_n)$. ne consegue che ogni catena massimale ha massimo elemento e quindi, per il Lemma 3.1, oppure per la ii) del Teorema 3.2, si ha $E(X,R) \neq \emptyset$. ◆

6. Esistenza di elementi massimali in spazi topologici vettoriali

In questo paragrafo specificheremo i risultati precedentemente ottenuti per stabilire l'esistenza di elementi massimali relativi ad insiemi contenuti in uno spazio vettoriale topologico, rispetto a relazioni d'ordine transitivre compatibili con la struttura lineare e topologica dello spazio; ritroveremo così vari risultati apparsi, di recente, nella letteratura (Per tutti si veda Luc . [10].)

Sia S uno spazio vettoriale topologico sui numeri reali e sia R un preordine parziale tale che:

$$xRy,\ zRw \Rightarrow (x+z)R(y+w) \tag{6.1}$$

$$xRy,\ k\geq 0 \Rightarrow (kx)\,R(ky) \tag{6.2}$$

Sia O il vettore nullo di S.

E' noto (Jahn [7].), ed e' di facile verifica, che ogni cono convesso $C \subseteq S$ di vertice $O \in C$

induce un preordine parziale verificante (6.1) e (6.2), tramite la seguente definizione:

xRy se e solo se $x \in y+C$.

La relazione R é inoltre antisimmetrica se il cono C è puntato, cioè se $C \cap (-C) =\{O\}$ ($C \cap (-C)=l(C)$ é detto spazio di linealità del cono).

Viceversa, ogni preordine parziale R che verifica (6.1) e (6.2), individua il cono $C=R(O)$ detto <u>cono ordinante</u> o <u>positivo</u>, tale che la relazione d'ordine da esso indotta coincide con R; se R è antisimmetrica, il cono positivo é puntato.

Per quanto precede, nel seguito considereremo relazioni d'ordine indotte da un cono convesso.

Un cono convesso C è detto **corretto** (Luc [10] se $\mathrm{cl}C + (C/l(C)) \subseteq C/l(C)$, ove con A/B si intende la differenza insiemistica tra gli insiemi A e B.

Esempi di coni corretti sono i cono convessi chiusi, i coni convessi per i quali l'insieme $C/l(C)$ è aperto, i coni che sono intersezione di semispazi aperti o chiusi, i coni poliedrici.

Il seguente Teorema mostra la relazione esistente tra relazioni corrette e relazioni indotte da un cono corretto.

Teorema 6.1

Sia S uno spazio vettoriale topologico.

i) Se R è una relazione d'ordine corretta verificante (6.1) e (6.2), allora il cono positivo è corretto;

ii) se C è un cono corretto, allora la relazione d'ordine R da esso indotta è corretta.

Dim.

Dimostriamo preliminarmente che rispetto ad una relazione R indotta da un cono convesso C si ha $z \in P(y)$ se e solo se $z \in y+(C/l(C))$. Si ha infatti:

$z \in P(y) \Leftrightarrow z \in R(y),\ y \notin R(z) \Leftrightarrow z=y+c,\ c \in C,\ y \neq z+c^* \quad \forall c^* \in C \Leftrightarrow z-c \neq z+c^*$
$\forall c^* \in C$

$\Leftrightarrow c \neq -c^* \quad \forall c^* \in C \Leftrightarrow c \in (C/l(C))$.

Di conseguenza la definizione di correttezza di una relazione diviene equivalente a :

$z \in y+(C/l(C)),\ y \in x+\mathrm{cl}C \Rightarrow z \in x+(C/l(C))$

ovvero a:

$$z=y+c_1,\ y=x+c_2,\ c_1 \in (C/l(C)),\ c_2 \in \mathrm{cl}C \Rightarrow z=x+c_3,\ c_3 = c_1+c_2 \in (C/l(C)) \qquad (6.3)$$

i) Sia $C=R(O)$; si deve dimostrare che $c_1 \in (C/l(C)),\ c_2 \in \mathrm{cl}C \Rightarrow c_1+c_2 \in (C/l(C))$.

Scelto $x \in S$, sia $z=y+c_1$ e $y=x+c_2$; risulta allora $z=x+c_1+c_2$ e l'asserto segue dalla (6.3).

ii) Il primo membro della (6.3) implica $z=x+c_1+c_2$. Poiché C é corretto $c_1+c_2 \in (C/l(C))$ e, di conseguenza, $z \in P(x)$ da cui la correttezza di R. ♦

Allo scopo di specificre i risultati stabiliti nel precedente paragrafo relativi all'esistenza di elementi massimali, osserviamo che le definizioni di insiemi R-completi, R-semicompatti e R-compatti rispetto a relazioni d'ordine indotte da coni convessi divengono rispettivamente:

Definizione 6.1

Un sottoinsieme X è detto **C-completo** se non ha nessun ricoprimento di aperti della forma $\{(x+\mathrm{cl}C)' \cap X)\}_{x \in M}$ essendo M una catena massimale di X.

Definizione 6.2

X è detto **C-semicompatto** se ogni ricoprimento di X del tipo $\{(x_i+\mathrm{cl}C)' \cap X)\}_{i \in I}$ ammette un sottoricoprimento finito di X, ove I è un qualsiasi insieme di indici e $x_i \in X$ per ogni $i \in I$.

Definizione 6.3
X è detto **C-compatto** se per ogni $x \in X$ l'insieme $(x+\mathrm{cl}C) \cap X$ è compatto.

Come conseguenza immediata dei Teoremi 5.1, 5.3, 5.4 e del Teorema 6.1 si hanno i seguenti Corollari.

Corollario 6.1.
Sia S uno spazio vettoriale topologico parzialmente preordinato da un cono convesso C e sia X un sottoinsieme di S.
Allora se X é compatto $\Rightarrow$ X è C-compatto $\Rightarrow$ X é C-semicompatto $\Rightarrow$ X è C-completo.

Corollario 6.2.
Sia S uno spazio vettoriale topologico parzialmente preordinato da un cono convesso C e sia X un sottoinsieme di S. Se C è corretto e l'insieme X è C-completo, allora $E(X,R) \neq \emptyset$.

Corollario 6.3
Sia S uno spazio vettoriale topologico parzialmente preordinato da un cono convesso C e sia X un sottoinsieme di S. Se C è corretto allora $E(X,R) \neq \emptyset$ se vale uno dei seguenti casi:
i) X è compatto
ii) X è C-compatto
iii) X è C-semicompatto.
iv) ogni catena massimale di X ha un estremo superiore in X.

Corollario 6.4
Sia S uno spazio vettoriale topologico parzialmente preordinato da un cono convesso C e sia X un sottoinsieme di S. Se X è C-completo allora $E(X,R) \neq \emptyset$ se si verifica uno dei seguenti casi :
i) C è chiuso.
ii) $C \setminus l(C)$ é aperto .
iii) C è acuto .

BIBLIOGRAFIA

[1] -C.D. Aliprantis, D.J. Brown, O. Burkinshaw
Existence and Optimality of Competitive Equilibria.
Springer-Verlag, Berlin 1990.

[2] -C. Berge
Espaces Topologiques, functions multivoques.
Dunod, Paris 1966.

[3] -C.R. Birchenhall
"***Conditions for the Existence of Maximal Elements in Compact Sets***", su *Journal of Economic Theory* N°16 1977, pag 111-115.

[4] -A. Cambini, L.Martein.
"***On the Existence of Efficent Points***", su *Optimization* N°28 1994 pag.283-290

[5] -E.D. Campbell, M.Walker.
"***Maximal Elements of Weakly Continuous Relations***", su *Journal of Economic Theory* N°50 1990, pag 459-464.

[6] - L. Carosi
"***Relazioni d'oedine in spazi topologici: esistenza di elementi massimali***". Tesi di laurea . Aprile 1994. Università degli studi di Pisa. Dipartimento di statistica e matematica applicata all'economia.

[7] -J. Jahn.
Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear spaces.
Verlag Peter lang, Frankfurt 1986.

[8] -J.L. Kelley
General Topology.
Van Nostrand, Princestone, New York 1955.

[9] - Kreps M.
A Course in Microeconomic Theory.
Harvester Wheatsheat University Press Cambridge, Cambridge 1990.

[10] - D. T. Luc.

Theory of Vector Optimization.

Springer-Verlag, Berlin 1988.

[11] -D. T. Luc .

"***An Existence Theorem in Vector Optimization***",su *Mathematical of operations Research* Vol.14 N°4 1989, pag. 693-699.

[12] -Y. Sawaragi, H.Nakayama,T Tanino.

Theory of Multiobjective Optimization.

Academic Press, Orlando 1985.

[13] -P. Scapparone.

" ***Una nota sulle economie di baratto*** "

estratto da *Giornale degli economisti e annali di economia,* marzo-Aprile 1981.

[14] -T.E. Smith.

"***On the Existence of Most-Preferred Alternatives***", su *International Economic Review* Vol.15 N°1 1974, pag. 184-194.

[15] -P.L. Yu.

Multiple-Criteria Decision Making, *concepts, Techniques, and extensions.*

Plenum Press, New York and London 1985.