

Report n.104

**Alcune osservazioni
sull'immunizzazione deterministica**

Fausto Gozzi

Pisa, Maggio 1996

Questa ricerca è stata finanziata in parte dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (già fondi 60%).

ALCUNE OSSERVAZIONI SULL'IMMUNIZZAZIONE SEMIDETERMINISTICA.

Fausto Gozzi
Facoltà di Economia, Università di Pisa

Sunto. In questa nota viene presentato un approccio unitario e compatto alle problematiche della cosiddetta “immunizzazione semideterministica”. Si considerano perturbazioni della struttura dei tassi di interesse dipendenti da una variabile “ignota” ε che può essere scalare o vettoriale (anche di dimensione infinita). Tale approccio consente di inquadrare, con lo stesso formalismo, sia le problematiche “storiche” riguardanti il caso in cui il parametro ε sia un numero reale, sia alcune problematiche recenti in cui si esamina il caso di perturbazioni “qualsiasi”. Vengono riesaminati, con una impostazione generale e con qualche doverosa precisazione, risultati noti e meno noti in letteratura.

1 Introduzione

Scopo del presente lavoro è quello di inquadrare con una formulazione unitaria la ben nota questione dell'immunizzazione finanziaria semideterministica e di evidenziarne alcuni aspetti metodologici.

Ricordiamo innanzitutto che la letteratura su questo tema è piuttosto vasta e il problema è stato analizzato sotto vari punti di vista e con tecniche diverse (si veda ad esempio Bierwag-Kaufman-Toebs [6]). Sotto il profilo finanziario il tema è stato trattato in modo ampio e approfondito, (si veda per un'ampia trattazione dell'argomento il libro di De Felice - Moriconi [7], capitolo 2); sotto l'aspetto “tecnico” tuttavia, l'argomento ci sembra suscettibile di alcune precisazioni; lo tratteremo con una impostazione unitaria e compatta che prende spunto dall'articolo di Pressacco e Liberi [17], (pur utilizzando una notazione più sintetica usata anche da Shiu [20] che descriveremo nel paragrafo 2).

Come è noto, il problema dell'immunizzazione finanziaria semideterministica, nella sua forma più semplice studia le condizioni che garantiscono come una perturbazione della struttura dei tassi di interesse

non diminuisca il valore di un portafoglio all'orizzonte temporale considerato T ; Il problema si differenzia quindi a seconda della classe di perturbazioni rispetto alla quale si chiede che il portafoglio sia immunizzato. Indicando con ε la variabile "ignota" da cui si assume dipendere la perturbazione, il problema dell'immunizzazione semideterministica si riduce a determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché un determinato valore del parametro ε_0 sia un punto di minimo (globale o almeno locale) per la funzione che determina il valore del portafoglio al variare di ε . Con questo approccio le problematiche dell'immunizzazione semideterministica possono essere raggruppate in due filoni: il caso in cui il parametro ε è un numero reale (perturbazioni semideterministiche che chiameremo *univariate*) e il caso in cui ε è un vettore di dimensione finita maggiore di uno o infinita (perturbazioni semideterministiche che chiameremo *multivariate*).

Il caso *univariate*, nell'ipotesi di perturbazioni additive, è stato il primo ad essere considerato in letteratura (vedasi [1, 2, 8, 14, 17, 18]). In tale contesto il risultato più classico è senz'altro quello di Fisher e Weil [8]: condizione necessaria perchè il portafoglio sia immunizzato all'orizzonte temporale T è che T sia uguale alla Duration (introdotta per primo da Macaulay [12]) delle scadenze del portafoglio.

L'ipotesi di perturbazioni additive è stata generalizzata in vari modi; in questo ambito il risultato più espressivo ci sembra quello dovuto a Pressacco e Liberi [17] i quali individuano come condizione necessaria affinché il portafoglio sia immunizzato all'orizzonte temporale T il fatto che T sia pari ad una media associativa (dipendente dal tipo di perturbazione ipotizzata) delle scadenze del portafoglio.

In altri lavori ([1, 2, 14, 17, 20]) sono stati poi analizzati vari tipi di condizioni sufficienti a garantire l'immunizzazione, almeno da perturbazioni "abbastanza piccole" e, in [2, 14] è stata data una stima della grandezza dell'intervallo di immunizzazione.

Altri lavori presenti in letteratura esaminano invece il problema da un punto di vista più generale che nella nostra impostazione può rientrare nel caso delle perturbazioni multivariate cioè dipendenti da un numero finito o infinito di parametri $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$. Ricordiamo alcuni lavori tra i più profondi e recenti sul tema, quelli cioè che affrontano il tema dell'immunizzazione da perturbazioni "qualsiasi" o comunque appartenenti a classi molto vaste: Fong-Vasicek [9, 10], Shiu [19, 20, 21, 22], Montrucchio-Peccati [14, 15, 16] che studiano il problema da vari punti

di vista.

In questo contesto non è in generale possibile trovare un portafoglio immunizzato (anche perchè ciò implicherebbe l'esistenza di arbitraggi). Si può però fornire una stima della massima perdita possibile e quindi, in un certo senso, della rischiosità del portafoglio rispetto ad una certa classe di perturbazioni (si veda [7, 9, 14, 15, 20]). E' invece possibile trovare un portafoglio immunizzato nel caso considerato da Shiu [19, 20, 21, 22] in cui si considerano perturbazioni convesse.

Nella presente nota le tematiche fin qui delineate vengono ripresentate con la formulazione unitaria suaccennata. Ciò consente di rivisitare, sotto l'aspetto "tecnico" e con alcune utili precisazioni, i risultati noti.

Il caso *univariato* viene trattato nel paragrafo 3 mentre nel paragrafo 4 si fanno alcune considerazioni sul caso di perturbazioni *multivariate* sia nel caso di numero finito di parametri che nel caso infinito.

2 Definizioni e risultati preliminari

Supponiamo che la struttura (non perturbata) dei tassi di interesse sia espressa da una legge finanziaria *scindibile*¹ e *indipendente dall'istante di valutazione*. Una legge finanziaria di questo tipo si può scrivere, nella sua massima generalità (si veda ad esempio [13]), nella forma

$$\nu(t, s) = \frac{u(t)}{u(s)},$$

essendo $u(t)$ una funzione monotona crescente tale che $u(0) = 1$, ovvero nella forma equivalente

$$\nu(t, s) = u(t)v(s), \tag{1}$$

essendo $v(s) = 1/u(s)$.²

¹Tale proprietà segue dalla ipotesi di assenza di arbitraggi

²Nel caso in cui la funzione $u(t)$ sia assolutamente continua (ipotesi di cui noi non avremo bisogno), tale legge viene spesso riscritta in termini dell'intensità istantanea di interesse δ definita come

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} \log u(t)$$

cosicchè risulta

$$u(t) = e^{\int_0^t \delta(\sigma) d\sigma} \quad \nu(t, s) = e^{\int_s^t \delta(\sigma) d\sigma}$$

Consideriamo ora un portafoglio caratterizzato dal flusso (\mathbf{s}, \mathbf{x}) , essendo $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ il vettore delle scadenze e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ il vettore degli importi corrispondenti. Gli importi positivi rappresentano gli introiti, quelli negativi le uscite. In assenza di perturbazioni, denotando con $W(T, s_i, x_i)$ il valore al tempo $T \geq 0$ dell'importo x_i che scade al tempo s_i si ha

$$W(T, s_i, x_i) = x_i v(s_i) u(T), \quad (2)$$

pertanto il valore del portafoglio (\mathbf{s}, \mathbf{x}) al tempo T sarà³

$$W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v(s_i) u(T) \quad (3)$$

Assumiamo ora uguale a zero⁴ l'istante in cui una perturbazione cambia "istantaneamente" la legge $\nu(t, s)$ in una altra legge scindibile e indipendente dall'istante di valutazione $\nu^*(t, s)$ ma ignota. Anche la legge $\nu^*(t, s)$ sarà allora caratterizzata univocamente da una funzione crescente $u^*(t)$ ignota tale che $u^*(0) = 1$.

Assumeremo che si possa sempre porre $u^*(t) = u^*(\varepsilon, t)$, essendo ε una variabile "ignota" appartenente ad un sottoinsieme A di uno spazio di Banach X . Sotto tale ipotesi, posto

$$H(\varepsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u^*(\varepsilon, t)}{u(t)}$$

possiamo descrivere la struttura perturbata $u^*(\varepsilon, t)$ della legge finanziaria $u(t)$ con la relazione moltiplicativa:⁵

$$u^*(\varepsilon, t) = u(t) H(\varepsilon, t)$$

Definiamo ora come "ammissibili" le perturbazioni H tali che

³L'additività degli importi segue dall'ipotesi di assenza di arbitraggi

⁴Occorre notare che tale ipotesi non è restrittiva in quanto la legge perturbata $u^*(t)$ può essere presa uguale a u per un certo periodo di tempo (fino a $t = t_0$) e poi diversa.

⁵Si possono riscrivere in questa forma perturbazioni univariate studiate in letteratura. Ad esempio una perturbazione additiva dell'intensità istantanea di interesse si scrive $\delta^*(t) = \delta(t) + \varepsilon g(t)$ e quindi, con la nostra notazione $H(\varepsilon, t) = e^{\varepsilon \int_0^t g(s) ds}$. In particolare se $g \equiv 1$ ritroviamo il caso studiato da Fisher e Weil [8] e da Redington [18]. Se $g(t) = 1/[1 + kt]$, dove k è una costante data, si parla di perturbazione "à la Khang" ([11]). Il caso di g più generale è stato studiato in [1, 2, 7, 17]. Altro caso studiato (si veda ad esempio [4, 5]) è quello della perturbazione moltiplicativa in cui si pone $\delta^*(t) = (\varepsilon + 1)\delta(t)$ e quindi $H(\varepsilon, t) = [u(t)]^\varepsilon$.

1. $H : A \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua e differenziabile due volte rispetto alla variabile ε .
2. $H(\varepsilon, t) > 0, \forall \varepsilon \in A, t \geq 0$.
3. Esiste un $\varepsilon_0 \in A$ interno ad A^6 che dia luogo ad assenza di perturbazione, cioè tale che $H(\varepsilon_0, t) = 1$ per ogni $t \geq 0$.⁷

Come vedremo tutte le condizioni per garantire l'immunizzazione potranno porsi assumendo esclusivamente le suddette ipotesi.

3 Immunizzazione da perturbazioni univariate

3.1 Immunizzazione da uscita singola

Consideriamo un portafoglio costituito da n poste positive x_1, \dots, x_n con scadenze s_1, \dots, s_n e da un unico esborso y alla scadenza T che sia inizialmente (cioè in assenza di perturbazione) in equilibrio

$$W(0, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = W(0, T, y).$$

⁶Nel seguito, per semplicità assumeremo che ε_0 sia uguale all'origine dello spazio di Banach X (che indicheremo d'ora in poi con 0), il che non fa perdere generalità alla trattazione in quanto ci si può facilmente ricondurre al caso in cui $\varepsilon_0 \neq 0$ usando una traslazione. Notiamo anche che l'ipotesi ε_0 interno ad A non è essenziale.

⁷Osserviamo che forma della perturbazione H comprende il caso classico e studiato in vari lavori in cui la perturbazione va a toccare l'intensità istantanea di interesse $\delta(t)$. Infatti, ricordando la relazione tra la funzione u e l'intensità istantanea di interesse δ espressa nella nota 3 possiamo scrivere il valore al tempo $T \geq 0$ del portafoglio (\mathbf{s}, \mathbf{x}) come

$$W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i e^{\int_{s_i}^T \delta(\sigma) d\sigma}$$

Se supponiamo che all'istante $t = 0$ una perturbazione cambia l'intensità istantanea di interesse $\delta(t)$ in $\delta(\varepsilon, t)$ avremo che

$$u^*(\varepsilon, t) = e^{\int_0^t \delta(\varepsilon, \sigma) d\sigma} = u(t) \cdot e^{\int_0^t [\delta(\varepsilon, \sigma) - \delta(\sigma)] d\sigma}$$

in tal caso dunque

$$H(\varepsilon, t) = e^{\int_0^t [\delta(\varepsilon, \sigma) - \delta(\sigma)] d\sigma}$$

e, in particolare, la funzione $H(\varepsilon, t)$ risulta assolutamente continua rispetto alla variabile t . Tale ipotesi si ritrova ad esempio in tutti i lavori in cui vengono considerate perturbazioni univariate (ad esempio [1, 2, 17]). In questo lavoro l'assoluta continuità di H rispetto al tempo non sarà necessaria per lo studio delle condizioni di immunizzazione.

Definiamo tale portafoglio immunizzato se vi è la garanzia che dopo una qualsiasi perturbazione “ammissibile”, l'importo realizzabile in T tramite il portafoglio introiti sarà sufficiente a coprire y .

Essendo ben noto che l'immunizzazione da uscita singola equivale alla immunizzazione del portafoglio introiti all'orizzonte T dell'esborso, studieremo solo il caso di un portafoglio di soli introiti.

Sia $W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x})$ il valore del portafoglio introiti all'orizzonte T in assenza di perturbazione e sia $W(\varepsilon, T, \mathbf{s}, \mathbf{x})$ il suo valore perturbato. Supporremo nel seguito, per semplicità, che il parametro ignoto ε vari in tutto l'insieme \mathbb{R} . Si ha, da (2), (3)

$$W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = u(T) \sum_{i=1}^n x_i v(s_i)$$

$$W(\varepsilon, T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = u^*(\varepsilon, T) \sum_{i=1}^n x_i v^*(\varepsilon, s_i) = u(T) H(\varepsilon, T) \sum_{i=1}^n x_i v(s_i) \frac{1}{H(\varepsilon, s_i)}$$

Il portafoglio di introiti si dirà dunque immunizzato “in grande” all'orizzonte temporale T dalla perturbazione H se e solo se

$$W(\varepsilon, T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) \geq W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Se la disuguaglianza precedente non vale per tutti gli $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ma solo per ε in un opportuno intorno di $\varepsilon = 0$ parleremo allora di immunizzazione “in piccolo”.⁸

Definiamo ora, come in [7, 17] i pesi relativi dei singoli introiti rispetto al valore globale del portafoglio come:

$$p_i = \frac{W(T, s_i, x_i)}{W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x})} = \frac{x_i v(s_i)}{\sum_{i=1}^n x_i v(s_i)}$$

(notiamo che i p_i sono indipendenti da T) e definiamo anche la funzione

$$q(\varepsilon, T) \stackrel{def}{=} \frac{W(\varepsilon, T, \mathbf{s}, \mathbf{x})}{W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x})} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{H(\varepsilon, T)}{H(\varepsilon, s_i)}$$

Allora condizione necessaria (del primo ordine) per l'immunizzazione “in grande” e “in piccolo” è

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} q(\varepsilon, T)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (5)$$

⁸Il caso di immunizzazione “in piccolo” si ritrova già nel lavoro di Redington [18] nel caso di perturbazioni additive ma con uscite multiple.

mentre condizione sufficiente (del secondo ordine) per l'immunizzazione "in piccolo" è

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} q(\varepsilon, T)|_{\varepsilon=0} > 0 \quad (6)$$

Condizione sufficiente (del secondo ordine) per l'immunizzazione "in grande" è infine

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} q(\varepsilon, T) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Occupiamoci ora di esplicitare la condizione necessaria del primo ordine assumendo che la funzione $H(\varepsilon, T)$ sia differenziabile rispetto alla variabile ε .

Svolgendo i calcoli dalla (5) si ottiene, indicando con H_ε la derivata prima di H rispetto alla variabile ε :

$$H_\varepsilon(0, T) = \sum_{i=1}^n p_i H_\varepsilon(0, s_i) \quad (8)$$

Ponendo $G(t) \stackrel{def}{=} H_\varepsilon(0, t)$, $t \geq 0$ si riottiene⁹ la ben nota condizione formulata e discussa da Pressacco e Liberi [17]

$$G(T) = \sum_{i=1}^n p_i G(s_i). \quad (9)$$

che, se G è strettamente monotona si può scrivere come

$$T = G^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i G(s_i) \right). \quad (10)$$

cioè condizione necessaria perchè il portafoglio introiti sia immunizzato all'orizzonte T è che tale orizzonte sia uguale alla G -media associativa (la cosiddetta G -duration) delle scadenze.

Vale la pena di osservare che

- (i) la condizione del primo ordine (5) si può anche formulare nel caso in cui H (e quindi q) non sia differenziabile in $\varepsilon = 0$. In tal caso la (5) si scrive

$$0 \in D_\varepsilon^- q(\varepsilon, T)|_{\varepsilon=0}$$

⁹Nel nostro caso non si assume assoluta continuità della perturbazione rispetto a t .

dove $D_\varepsilon^- q(\varepsilon, T)|_{\varepsilon=0}$ indica il sottodifferenziale rispetto a ε della funzione q in $\varepsilon = 0$. Tale condizione è ovviamente meno trattabile di quella trovata nel caso differenziabile.

- (ii) La condizione (5) non è in generale sufficiente a garantire l'immunizzazione, nemmeno nel caso delle perturbazioni regolari, come si ricava dal seguente esempio. Poniamo $n = 2$ (caso di due sole entrate), siano $0 < s_1 < s_2 < T$ fissati e consideriamo

$$H(\varepsilon, t) = e^{G(\varepsilon, t)} \quad \text{dove} \quad G(\varepsilon, t) = \varepsilon[1 + (t - s_1)(t - s_2)(t - T)] - \varepsilon^2 t$$

Derivando rispetto a ε si ottiene che

$$H_\varepsilon(0, t) = G_\varepsilon(0, t) = 1 + (t - s_1)(t - s_2)(t - T)$$

e che

$$H_{\varepsilon\varepsilon}(0, t) = G_{\varepsilon\varepsilon}(0, t) + [G_\varepsilon(0, t)]^2 = -2t + [1 + (t - s_1)(t - s_2)(t - T)]^2$$

Ne segue che la (8) soddisfatta in quanto

$$H_\varepsilon(0, s_1) = H_\varepsilon(0, s_2) = H_\varepsilon(0, T) = 1$$

e inoltre,

$$H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) = 1 - 2T < 1 - 2s_i = H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i) \quad i = 1, 2.$$

il che implica (si veda la (11) piú sotto) che $q_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) < 0$ e quindi che non si ha nemmeno un minimo locale per $\varepsilon = 0$ (si ha anzi un massimo).

Indaghiamo ora le condizioni del secondo ordine (6) e (7) indicando con $H_{\varepsilon\varepsilon}$ la derivata seconda di H rispetto a ε . La derivata seconda di q rispetto a ε per $\varepsilon = 0$ si scrive

$$q_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) = H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) - 2H_\varepsilon(0, T) \sum_{i=1}^n p_i H_\varepsilon(0, s_i) + \sum_{i=1}^n p_i [-H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i) + 2H_\varepsilon^2(0, s_i)]$$

e, tenuto conto della (8),

$$q_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) = \sum_{i=1}^n p_i [(H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) - H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i)) + 2(H_\varepsilon^2(0, s_i) - H_\varepsilon^2(0, T))].$$

Dunque la condizione sufficiente di immunizzazione "in piccolo" diventa

$$\sum_{i=1}^n p_i \left[(H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) - H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i)) + 2 \left(H_{\varepsilon}^2(0, s_i) - H_{\varepsilon}^2(0, T) \right) \right] > 0 \quad (11)$$

Poichè con facili calcoli¹⁰ si trova che la condizione del primo ordine implica¹¹

$$\sum_{i=1}^n p_i \left(H_{\varepsilon}^2(0, s_i) - H_{\varepsilon}^2(0, T) \right) \geq 0$$

ne segue che la condizione (11) è sicuramente verificata se risulta

$$\sum_{i=1}^n p_i (H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) - H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i)) > 0$$

In questo caso diventa interessante dare una stima della grandezza dell'intervallo di immunizzazione: una tale stima, ottenuta usando la formula di Taylor e valutando l'intervallo in cui la funzione $q_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, T)$ rimane positiva si può trovare in [1, 2, 14].

La condizione sufficiente per l'immunizzazione in grande è più complicata e difficile da maneggiare:

$$q_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, T) = \sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, T)}{H(\varepsilon, s_i)} - 2 \frac{H_{\varepsilon}(\varepsilon, T) H_{\varepsilon}(\varepsilon, s_i)}{H^2(\varepsilon, s_i)} + \frac{H(\varepsilon, T) [-H(\varepsilon, s_i) H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, s_i) + 2H_{\varepsilon}^2(\varepsilon, s_i)]}{H^3(\varepsilon, s_i)} \right] \geq 0; \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Risulta comunque trattabile in alcuni significativi casi

A) Nell'ipotesi di perturbazioni additive si ha $H(\varepsilon, t) = e^{\varepsilon \int_0^t g(s) ds}$ e quindi, ponendo $G(t) = \int_0^t g(s) ds$,

$$H_{\varepsilon}(\varepsilon, t) = G(t) e^{\varepsilon G(t)}; \quad H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, t) = [G(t)]^2 e^{\varepsilon G(t)}$$

¹⁰Se h_1, \dots, h_n e h_0 sono numeri positivi tali che $\sum_{i=1}^n p_i h_i = h_0$ si ha

$$0 \leq \sum_{i=1}^n p_i (h_i - h_0)^2 = \sum_{i=1}^n p_i h_i^2 - 2h_0 \sum_{i=1}^n p_i h_i + \sum_{i=1}^n p_i h_0^2 = \sum_{i=1}^n p_i [h_i^2 - h_0^2].$$

¹¹vale = solo se tutti i coefficienti $H_{\varepsilon}^2(0, s_i)$ sono uguali tra loro.

La condizione del primo ordine diventa quindi, come in (9)

$$G(T) = \sum_{i=1}^n p_i G(s_i).$$

La condizione del secondo ordine “in piccolo” diviene

$$\sum_{i=1}^n p_i \left([G(s_i)]^2 - [G(T)]^2 \right) > 0$$

mentre quella “in grande” diviene

$$\sum_{i=1}^n p_i e^{\varepsilon(G(T)-G(s_i))} \left[[G(T)]^2 - 2G(T)G(s_i) + [G(s_i)]^2 \right] \geq 0; \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

che risulta sempre verificata. In particolare se $g \equiv 1$ ritroviamo il caso studiato da Fisher e Weil [8] e da Redington [18]. Se $g(t) = 1/[1 + kt]$ quello studiato da Khang [11].

- B) Nell'ipotesi di perturbazione moltiplicativa [4, 5] si ha $H(\varepsilon, t) = u(t)^\varepsilon$ e quindi

$$H_\varepsilon(\varepsilon, t) = u(t)^\varepsilon \log u(t); \quad H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, t) = u(t)^\varepsilon \log^2 u(t)$$

da cui si ricavano facilmente le condizioni necessarie e sufficienti per l'immunizzazione.

- C) Nel caso¹² in cui

$$H(\varepsilon, t) = e^{f(\varepsilon)t}$$

con

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(0) = 0 \quad f'(0) \neq 0$$

La condizione del primo ordine risulta quella classica sulla Duration

$$T = \sum_{i=1}^n p_i s_i.$$

mentre quella di secondo ordine risulta “in piccolo”

$$[f'(0)]^2 \sum_{i=1}^n p_i [T - s_i]^2 > 0$$

¹²segnalato dal prof. P.Manca (Università di Pisa).

(sempre verificata) e quella di secondo ordine “in grande”

$$f''(\varepsilon) \sum_{i=1}^n p_i e^{f(\varepsilon)(T-s_i)} (T-s_i) + [f'(\varepsilon)]^2 \sum_{i=1}^n p_i e^{f(\varepsilon)(T-s_i)} (T-s_i)^2 \geq 0; \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Dato che $e^{f(\varepsilon)(T-s_i)} \geq 1 + f(\varepsilon)(T-s_i)$, si ha in particolare che, se è soddisfatto il vincolo di duration, e $f''(\varepsilon)f(\varepsilon) \geq 0$ vale l'immunizzazione “in grande” (ad esempio se $f(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$, $\alpha \geq 1$).

- D) Infine nel caso in cui la funzione $1/H(\varepsilon, t)$ sia convessa in t per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ la condizione di immunizzazione “in grande” è automaticamente verificata quando è soddisfatto il vincolo di Duration:

$$\sum_{i=1}^n p_i s_i = T \quad (12)$$

(si vedano a proposito il lavoro di Shiu [20] e quello di Montrucchio-Peccati [14]). Infatti la condizione di immunizzazione $q(\varepsilon, T) \geq 1$ si può scrivere

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{H(\varepsilon, s_i)} \geq \frac{1}{H(\varepsilon, T)}.$$

Grazie alla convessità di $1/H(\varepsilon, t)$ tale condizione è sempre verificata quando $\sum_{i=1}^n p_i s_i = T$.

Facciamo notare che

- (a) Questa osservazione è valida anche nel caso generale in cui $\varepsilon \in A$ con A sottoinsieme di uno spazio di Banach.
- (b) La condizione del primo ordine (8) stabilisce che l'orizzonte T deve necessariamente soddisfare la seguente equazione

$$\sum_{i=1}^n p_i H_\varepsilon(0, s_i) = H_\varepsilon(0, T) \quad (13)$$

Essendo però, grazie alla convessità di $1/H(\varepsilon, t)$ $T = \sum_{i=1}^n p_i s_i$ ne segue che tale valore di T deve obbligatoriamente soddisfare la (13), cosa non ovvia a priori.

- (c) Anche nel caso più generale in cui la funzione $1/H(\varepsilon, t)$ sia α -convessa è possibile ritrovare in questa formulazione un risultato di Montrucchio-Peccati [14] che dà una stima della massima perdita possibile $W(T, \mathbf{s}, \mathbf{x}) - W(\varepsilon, T, \mathbf{s}, \mathbf{x})$ dipendente

solo dal “grado di convessità” della perturbazione, quando sia soddisfatto il vincolo di Duration (12). Si veda anche la discussione al paragrafo 4.

3.2 Immunizzazione da uscite multiple

Il caso di immunizzazione da uscite multiple è più delicato perchè le condizioni sufficienti sono più difficili da ottenere. Consideriamo un portafoglio costituito da un flusso di attività x_1, \dots, x_{n_x} e da un flusso di passività y_1, \dots, y_{n_y} con scadenze rispettivi $s^x = (s_1^x, \dots, s_{n_x}^x)$ e $s^y = (s_1^y, \dots, s_{n_y}^y)$. Assumiamo anche che, in assenza di perturbazioni, valga il vincolo di bilancio

$$W(0, s^x, x) = W(0, s^y, y).$$

Studiamo sotto quali condizioni risulta¹³

$$W(\varepsilon, 0, s^x, x) \geq W(\varepsilon, 0, s^y, y) \quad (14)$$

Per scrivere in modo compatto il problema possiamo, analogamente a quanto fatto in precedenza, definire due funzioni q^x e q^y e due serie di pesi p^x e p^y come segue

$$p_i^x = \frac{W(0, s_i^x, x_i)}{W(0, s^x, x)} = \frac{x_i v(s_i^x)}{\sum_{i=1}^{n_x} x_i v(s_i^x)}; \quad p_j^y = \frac{W(0, s_j^y, y_j)}{W(0, s^y, y)} = \frac{y_j v(s_j^y)}{\sum_{j=1}^{n_y} y_j v(s_j^y)};$$

$$q^x(\varepsilon, T) \stackrel{def}{=} \frac{W(\varepsilon, T, s^x, x)}{W(T, s^x, x)} = \sum_{i=1}^{n_x} p_i^x \frac{H(\varepsilon, T)}{H(\varepsilon, s_i^x)}$$

$$q^y(\varepsilon, T) \stackrel{def}{=} \frac{W(\varepsilon, T, s, y)}{W(T, s^y, y)} = \sum_{j=1}^{n_y} p_j^y \frac{H(\varepsilon, T)}{H(\varepsilon, s_j^y)}$$

La condizione di immunizzazione diventa allora

$$q^x(\varepsilon, 0) - q^y(\varepsilon, 0) \geq 0$$

e la condizione necessaria del primo ordine

$$q_\varepsilon^x(0, 0) - q_\varepsilon^y(0, 0) = 0$$

¹³Osserviamo che se tale relazione è vera nell'istante $t = 0$, allora, in virtù della trasferibilità nel tempo delle relazioni tra portafogli è vera per ogni t .

e le condizioni sufficienti

$$q_{\varepsilon\varepsilon}^x(0,0) - q_{\varepsilon\varepsilon}^y(0,0) > 0$$

$$q_{\varepsilon\varepsilon}^x(\varepsilon,0) - q_{\varepsilon\varepsilon}^y(\varepsilon,0) \geq 0; \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Si riscrive così, avendo posto $G(t) \stackrel{def}{=} H_\varepsilon(0,t)$, la condizione necessaria del primo ordine come

$$\sum_{i=1}^{n_x} p_i^x G(s_i^x) = \sum_{j=1}^{n_y} p_j^y G(s_j^y). \quad (15)$$

che stabilisce che la G -duration degli introiti deve essere uguale alla G -duration degli esborsi (vedasi [17])

Le condizioni del secondo ordine si riscrivono come

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_x} p_i^x \left[-H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i^x) + 2H_\varepsilon^2(0, s_i^x) \right] &> \sum_{j=1}^{n_y} p_j^y \left[-H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_j^y) + 2H_\varepsilon^2(0, s_j^y) \right] \\ \sum_{i=1}^{n_x} p_i^x \left[\frac{H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, 0)}{H(\varepsilon, s_i^x)} - 2 \frac{H_\varepsilon(\varepsilon, 0)H_\varepsilon(\varepsilon, s_i^x)}{H^2(\varepsilon, s_i^x)} + H(\varepsilon, 0) \frac{-H(\varepsilon, s_i^x)H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, s_i^x) + 2H_\varepsilon^2(\varepsilon, s_i^x)}{H^3(\varepsilon, s_i^x)} \right] \\ &\geq \sum_{j=1}^{n_y} p_j^y \left[\frac{H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, 0)}{H(\varepsilon, s_j^y)} - 2 \frac{H_\varepsilon(\varepsilon, 0)H_\varepsilon(\varepsilon, s_j^y)}{H^2(\varepsilon, s_j^y)} + H(\varepsilon, 0) \frac{-H(\varepsilon, s_j^y)H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, s_j^y) + 2H_\varepsilon^2(\varepsilon, s_j^y)}{H^3(\varepsilon, s_j^y)} \right] \end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Tali condizioni, il cui significato finanziario è stato ampiamente discusso in letteratura (si veda per tutti [7]) sono una generalizzazione delle condizioni citate ad esempio in [1, 2, 7, 17].

Osserviamo che nel contesto di uscite multiple è piú difficile che siano verificate le condizioni sufficienti perchè la presenza delle due serie di pesi p^x e p^y complica la situazione. In particolare ricordiamo che nel caso di perturbazione convessa, la condizione del primo ordine

$$\sum_{i=1}^{n_x} p_i^x s_i^x = \sum_{j=1}^{n_y} p_j^y s_j^y,$$

al contrario di quanto accade per l'uscita singola, non è sufficiente a garantire l'immunizzazione. Si veda a proposito l'articolo di Shiu [21] dove si osserva che condizione necessaria e sufficiente affinché un portafoglio

con uscite multiple sia immunizzato da perturbazioni convesse è la condizione di scomponibilità in n_y sottoportafogli, tali che il j -esimo sottoportafoglio soddisfi la condizione del primo ordine rispetto all'uscita singola y_j per ogni $j = 1, \dots, n_y$.

Ricordiamo infine che la condizione necessaria del primo ordine non diviene sufficiente nemmeno nel caso di perturbazione additiva e moltiplicativa; anche in questi casi si ha solo immunizzazione "in piccolo" (si veda [1, 2, 7, 17, 18]).

4 Considerazioni sul caso multivariato

In virtù della formulazione esposta al paragrafo 2, la trattazione formale del problema non cambia anche nel caso di perturbazioni multivariate. Si riottengono quindi le condizioni già esposte nel caso univariato seppur riscritte in notazione vettoriale. Considerando per brevità solo il caso di di orizzonte temporale fissato T e indicando con H_ε e $H_{\varepsilon\varepsilon}$ rispettivamente il gradiente e l'Hessiano di H rispetto alla variabile vettoriale ε , si ha

1. Condizione necessaria del primo ordine

$$H_\varepsilon(0, T) = \sum_{i=1}^n p_i H_\varepsilon(0, s_i) \quad (16)$$

2. Condizione sufficiente del secondo ordine "in piccolo"

$$\sum_{i=1}^n p_i \left[(H_{\varepsilon\varepsilon}(0, T) - H_{\varepsilon\varepsilon}(0, s_i)) + 2(H_\varepsilon(0, s_i) \otimes H_\varepsilon(0, s_i) - H_\varepsilon(0, T) \otimes H_\varepsilon(0, T)) \right] > 0$$

3. Condizione sufficiente del secondo ordine "in grande"

$$\sum_{i=1}^n p_i \left[\frac{H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, T)}{H(\varepsilon, s_i)} - 2 \frac{H_\varepsilon(\varepsilon, T) \otimes H_\varepsilon(\varepsilon, s_i)}{H^2(\varepsilon, s_i)} + \frac{H(\varepsilon, T) [-H(\varepsilon, s_i) H_{\varepsilon\varepsilon}(\varepsilon, s_i) + 2H_\varepsilon(\varepsilon, s_i) \otimes H_\varepsilon(\varepsilon, s_i)]}{H^3(\varepsilon, s_i)} \right] \geq 0;$$

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$

dove le ultime due disuguaglianze vanno considerate nel senso della positività di operatori lineari autoaggiunti. Analogamente si possono ricavare le condizioni necessarie e sufficienti per il caso di uscite multiple.

Tuttavia, pur nell'apparente identità formale, le problematiche del caso multivariato si diversificano notevolmente da quelle del caso univariato, sia sotto il profilo finanziario che "tecnico". Infatti l'approccio classico dell'immunizzazione semideterministica, che è poi quello usato nel caso univariato, prevede di cercare per quale valore dell'orizzonte temporale T un portafoglio dato risulta minimizzato. E' quindi chiaro che un tal approccio, in cui si minimizza rispetto a una sola variabile reale positiva T non si adatta al caso multivariato in quanto già le condizioni necessarie sono più di una e solo eccezionalmente possono essere risolte tutte per lo stesso valore di T .

Considerato l'aspetto finanziario del problema una strada percorribile è allora quella di trovare il valore di T che minimizza la massima perdita possibile (si vedano ad esempio gli articoli di Fong-Vasicek [9] e di Montrucchio-Peccati[14, 15]). Un'altra possibilità ragionevole è invece quella di considerare anche gli importi x_i come variabili su cui "giocare" in modo da aumentare il numero di gradi di libertà del problema (in questo contesto ricordiamo ad esempio il lavoro di Montrucchio-Peccati [16] che considera gli importi indicizzati in funzione dell'intensità istantanea di interesse δ). In tal modo risulta possibile, quando il numero dei parametri sia finito e più piccolo dei gradi di libertà del sistema, soddisfare le condizioni necessarie per l'immunizzazione. In questa direzione ci sembra interessante considerare il problema di modificare un portafoglio dato (s, x) ricercando il portafoglio immunizzato (s, x') che meno si discosta dal portafoglio di partenza. Ipotizzando ad esempio che i costi di ricomposizione del portafoglio siano proporzionali alla variazione delle poste possiamo formulare il problema come

$$\min \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

con i vincoli di bilancio e

$$H_\varepsilon(0, T) = \sum_{i=1}^n p'_i H_\varepsilon(0, s_i); \quad x'_i \geq 0$$

che si può trattare come un problema di Programmazione Matematica NonLineare.

Quando invece il numero dei parametri è troppo alto si può comunque ricercare, come in precedenza, la configurazione del portafoglio che minimizzi la massima perdita possibile.

Se il numero di parametri è infinito le condizioni trovate in precedenza diventano equazioni funzionali che sono in generale molto complesse e non risolvibili. Si può dire qualcosa solo considerando opportuni casi. Se ad esempio consideriamo la perturbazione

$$H : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad H(\varepsilon, t) = \frac{1}{1 + \delta_t \varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon(t)}$$

dove A indica l'insieme delle funzioni convesse maggiori di -1 , allora la funzione $1/H(\varepsilon, t)$ è convessa in t per ogni $\varepsilon \in A$. Usando la funzione Lagrangiana

$$\sum_{i=1}^n p_i [H(\varepsilon, s_i) - H(\varepsilon, T)] + \lambda \left[\sum_{i=1}^n p_i H(\varepsilon, s_i) - H \left(\varepsilon, \sum_{i=1}^n p_i s_i \right) \right]$$

possiamo dimostrare allora con alcuni calcoli che la condizione di immunizzazione “in grande” è automaticamente verificata se vale il vincolo di Duration $T = \sum_{i=1}^n p_i s_i$. Si riottengono così in questa formulazione alcuni risultati di Shiu [20] (cfr. fine paragrafo 2). Anche nel caso più generale in cui la funzione $1/H(\varepsilon, t)$ sia α -convessa con lo stesso metodo si possono riottenere, nella formulazione vista sopra, alcuni risultati di Montrucchio-Peccati [14] (cfr. fine paragrafo 2).

Notiamo che nel caso in cui X sia lo spazio delle funzioni continue su $[0, +\infty[$ e A un sottoinsieme di X possiamo ancora considerare la perturbazione “ammissibile”

$$H : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad H(\varepsilon, t) = 1 + \delta_t \varepsilon = 1 + \varepsilon(t)$$

ma in questo caso la condizione necessaria del primo ordine (16)

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta_{s_i} = \delta_T$$

che non è mai verificata salvo casi degeneri.

Ricordiamo infine che questo approccio potrebbe essere studiato nel caso (formalizzato in Montrucchio-Peccati[15]) in cui lo scadenziario del portafoglio sia un intervallo di \mathbb{R} e il portafoglio quindi individuato da una misura.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P.Amato, *Sulle perturbazioni Maturity dependent: una estensione del teorema di Redington*, Atti del convegno AMASES 1995.
- [2] P.Amato, *Qualche osservazione sui teoremi d'immunizzazione semideterministica*, Sottoposto per la pubblicazione, 1994.
- [3] G.O.Bierwag, *DURATION ANALYSIS*, Ballinger Publ., Cambridge, 1987.
- [4] G.O.Bierwag, *Immunization, Duration and the term structure of interest rates*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1977, 725-742.
- [5] G.O.Bierwag, G.G.Kaufman, *Coping with the risk of interest-rate fluctuations: a note*, Journal of Business, July 1977, 364-370.
- [6] G.O.Bierwag, G.G.Kaufman, A.Toebs *INNOVATION IN BOND PORTFOLIO MANAGEMENT: DURATION ANALYSIS AND IMMUNIZATION*, JAI Press, 1984, London.
- [7] M.De Felice, F.Moriconi, *LA TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA*, Il Mulino, Bologna, 1991.
- [8] L.Fisher, R.L Weil, *Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholders from naive and optimal strategies*, Journal of Business, 44, 1971, 408-431.
- [9] H. Fong & O. Vasicek, *A risk minimizing strategy for portfolio immunization*, Journal of Finance, 39, 1984, 1541-1546.
- [10] H. Fong & O. Vasicek, *A risk minimizing strategy for multiple liability immunization*, Preprint, 1982.
- [11] C. Khang, *Bond immunization when short-term rates fluctuate more than long-term rates*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 14, 5, December 1979, 1085-1090.

- [12] F. Macaulay *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in U.S. since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York, 1938.
- [13] P. Manca *Equazioni funzionali e leggi di interesse finanziario* G.I.I.A., 1969, 1-5.
- [14] L. Montrucchio & L. Peccati, *A note on Shiu-Fisher-Weil immunization theorem*, Insurance: Mathematics and Economics, 1991, 10, 125-131.
- [15] L. Montrucchio & L. Peccati, *Log convexity and global portfolio immunization*, Proceedings of the "International Workshop on Generalized Concavity, Fractional Programming and Economic Applications" held in Pisa, 1988.
- [16] L. Montrucchio & L. Peccati, *The immunization of indexed cash-flows*, Preprint, Feb. 1990.
- [17] F. Pressacco & F. Liberi, *Immunizzazione semideterministica e medie associative*, Atti del XVI convegno AMASES, Treviso, 10-13 Settembre 1992, 591-604.
- [18] F.M. Redington, *Review of the principles of Life-office Valuations*, (with discussion), Journal of the Institute of Actuaries, 78, 1952, 286-315.
- [19] E.S.W. Shiu, *A generalization of Redington's theory of immunization*, Actuarial Research Clearing House, 2, 1986, 69-81.
- [20] E.S.W. Shiu, *On Fisher-Weil immunization theorem*, Insurance: Mathematics and Economics, 6, 1987, 259-266.
- [21] E.S.W. Shiu, *Immunization of multiple liabilities*, Insurance: Mathematics and Economics, 7, 1988, 219-224.
- [22] E.S.W. Shiu, *On Redington's theory of immunization*, Insurance: Mathematics and Economics, 9, 1990, 1-5.