

**Report n. 107**

**Vischiosità dei salari, offerta di lavoro endogena e ciclo**

**Luciano Fanti e Piero Manfredi**

**Pisa, Giugno 1996**

## Vischiosità dei salari, offerta di lavoro endogena e ciclo

Luciano Fanti, Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Pisa

Piero Manfredi, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa

**Keywords:** curva di Phillips, vischiosità dei salari, effetto scoraggiamento, dipendenza da densità, biforcazione di Hopf

### 1. Introduzione

In questo lavoro ci proponiamo l'obiettivo di indagare, all'interno di un modello alla Goodwin (1967), gli effetti su ciclo e crescita dell'ipotesi di vischiosità dei salari nell'adeguarsi ai mutamenti del mercato del lavoro.

Un problema relativo alla curva di Phillips, che è una delle relazioni chiave del modello originale di Goodwin, riguarda l'ipotesi di immediata reazione dei salari all'occupazione; la reazione infatti può richiedere un certo periodo di tempo per operare, e la lunghezza di tale periodo potrebbe essere differente in fasi diverse della situazione economica (per esempio un adeguamento dei salari più lento nelle fasi di recessione e più rapido nelle fasi di espansione) e in diverse forme di mercato sia del lavoro che dei prodotti (ad esempio in dipendenza del grado di sindacalizzazione o del grado di monopolio). Non è certo raro rilevare infatti situazioni in cui i salari continuano a crescere, almeno temporaneamente, quando la disoccupazione sta già aumentando, e viceversa continuano a scendere (o a rallentare) quando già è iniziata l'espansione. Per esempio quando i salari sono stabiliti sulla base di contrattazioni a durata fissa, come è il caso di molti contratti nell'industria italiana, evidentemente l'adeguamento non può essere né continuo né istantaneo. La nostra analisi mostrerà come in generale l'effetto della vischiosità salariale sul ciclo di Goodwin sia destabilizzante.

Introdurremo quindi una dipendenza della crescita dell'offerta di lavoro dal ciclo economico, come ampiamente ipotizzato nella letteratura (Mincer 1966), ed in particolare l'ipotesi che il tasso di partecipazione tende a diminuire quando aumenta il tasso di disoccupazione, ipotesi nota come "lavoratore scoraggiato". Rimuovendo quindi l'ipotesi dell'esogeneità della crescita dell'offerta di lavoro, osserveremo che il modello con vischiosità dei salari può generare orbite di tipo periodico. L'indagine di tali cicli limite, ci consente di stabilire in termini dei

parametri interessanti in questo lavoro, e cioè il ritardo nell'aggiustamento dei salari e il coefficiente di reattività del tasso di partecipazione al tasso di occupazione, sia l'esistenza di tali cicli che la loro stabilità. In particolare la stabilità del comportamento periodico si verifica in una specifica finestra di valori dei parametri in esame, contraddistinta da bassi valori della reattività del tasso di partecipazione e, contemporaneamente, da valori del ritardo al di sopra di una precisa soglia.

Questo lavoro è organizzato come segue: dopo l'introduzione, viene introdotta l'ipotesi di vischiosità dei salari rispetto alle variazioni dell'occupazione all'interno del modello di Goodwin e ne viene dimostrato l'effetto destabilizzante. Nel terzo paragrafo si affronta l'ipotesi di introduzione dall'esterno di una "correzione" logistica alla dinamica del tasso di occupazione, di cui un esempio risulta Farkas-Kotsis (1992)<sup>1</sup>, analizzandone gli effetti sull'equilibrio e la comparsa di cicli limite attraverso il meccanismo delle biforcazioni locali, discutendone a fondo la significatività economica e mettendo in luce, come tale correzione, per quanto empiricamente giustificabile risulti assai poco leggibile dal punto di vista della teoria economica retrostante.

Nel quarto paragrafo si sviluppa l'ipotesi di dinamica endogena dell'offerta di lavoro, e se ne studiano le implicazioni dinamiche, stabilendo le condizioni di esistenza di orbite periodiche, e della loro stabilità. Questo consente un'interessante interpretazione economica sostantiva.

Infine, nel quinto paragrafo, si provvede ad una discussione di una serie di aspetti ulteriori, connessi in particolare con i ruoli giocati dagli altri parametri economici nella dinamica e in particolare sulla stabilità, e si fornisce un'illustrazione numerica delle condizioni per l'apparizione dell'orbita periodica e sulla sua frequenza. Il nucleo dei risultati ottenuti è riassunto nelle conclusioni.

## **2. Viscosità dei salari e ciclo alla Goodwin**

Il sistema originale di Goodwin è riassunto nel seguente sistema dinamico:

---

<sup>1</sup>Questo lavoro è oggi considerato (Flaschel-Groh 1995), una delle estensioni più interessanti del modello di Goodwin, sia dal punto di vista delle sue proprietà formali e della ricchezza delle interpretazioni economiche, sia per le predizioni numeriche che consente, nettamente più realistiche di quelle ottenibili dal modello originario di Goodwin.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{V} &= -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} &= (m - n - \alpha) - mV \end{aligned} \quad (2.1)$$

nelle due variabili "pilota"  $U$  e  $V$ , ove  $U=U(t)$  è il livello del tasso di occupazione al tempo  $t$  (definito come rapporto tra la forza lavoro effettivamente occupata  $L(t)$  e l'offerta totale di lavoro  $N(t)$ , eventualmente stimabile mediante la popolazione totale presente), mentre  $V(t)$  è la quota distributiva del lavoro, data dal rapporto  $V=wL/Q$ , ove  $w$  è il saggio di salario e  $Q=aL$  è il prodotto per unità di tempo ( $a$  è ovviamente la produttività media del lavoro). Le equazioni (2.1) sussumono la dinamica di un'economia regolata dalle seguenti ipotesi:

a) una dinamica salariale dipendente unicamente dallo stato dell'occupazione "presente", secondo una relazione alla Phillips della forma:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho U \quad (\gamma > 0, \rho > 0) \quad (2.2)$$

b) una dinamica della produzione di tipo classico, in cui cioè tutto il profitto è reinvestito, sotto assunzione di rapporto capitale-prodotto ( $1/m$ ) costante:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = m(1 - V) \quad (2.3)$$

c) crescita a tasso costante nel tempo di offerta di lavoro (al tasso  $n > 0$ ) e produttività (al tasso  $\alpha > 0$ ).

Annotando la quota salari come:  $V=w/a$ , il modello (2.1) è facilmente derivato a partire dalle seguenti evidenti "identità dinamiche":

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N} \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

In particolare, assumendo che i coefficienti della formulazione (2.1):  $A=\alpha+\gamma$ ,  $B=\rho$ ,  $C=m-\alpha-n$ ,  $D=m$  siano tutti positivi (e costanti) e soddisfacenti l'ulteriore richiesta:

$$\rho > \alpha + \gamma \quad (2.5)$$

è garantita l'esistenza di un unico equilibrio non nullo del modello, di coordinate:

$$(U^*, V^*) = \left( \frac{\alpha + \gamma}{\rho}, \frac{m - \alpha - n}{m} \right) \quad (2.6)$$

che è anche significativo dal punto di vista economico (si osservi come la (2.5) implichi a maggiore ragione  $\rho > \gamma$ , condizione che assicura la non banalità del meccanismo basato sulla formulazione "lineare" (2.2) della curva di Phillips). Come noto il sistema (2.1) è, sotto tali ipotesi, un classico modello preda predatore alla Lotka-Volterra, caratterizzato dalle ben note oscillazioni conservative, avente in particolare, in virtù della definizione delle due variabili  $U, V$ , dinamica confinata nell'insieme ammissibile  $T = [0,1] \times [0,1]$ .

Introduciamo adesso esplicitamente l'ipotesi che la reazione dei salari all'occupazione non sia immediata. In questa sede il ritardo nell'adeguamento del salario alle variazioni occupazionali all'interno del modello di crescita ciclica di Goodwin verrà modellato seguendo una tipica formulazione a "ritardo distribuito" (Farkas e Kotsis 1992, Chiarella 1990). Ciò ha l'effetto di rendere il tasso di crescita della quota salari dipendente non solo dal tasso di occupazione corrente ma dalla sua intera storia passata, conferendo al sistema originale struttura integro-differenziale<sup>2</sup>. Formalmente l'ipotesi del ritardo dà luogo alla sostituzione nella relazione di Phillips (2.2) del tasso di occupazione corrente  $U(t)$  con una relazione della forma:

$$S(t) = \int_{-\infty}^t U(\tau) R(t - \tau) d\tau \quad (2.7)$$

ove la funzione  $R$  è la funzione peso del "ritardo" e la sua forma diventa decisiva per la stabilità o meno del sistema (2.1). Scegliendo per  $R$  la tipica forma esponenziale:

$$R(s) = ae^{-as}, \quad a > 0 \quad (2.8)$$

è possibile, grazie al noto "linear trick" (McDonald 1978), ricondurre il sistema originale (2.1) alla forma "equivalente" descritta dal seguente sistema di tre equazioni differenziali ordinarie:

---

<sup>2</sup>La prima formulazione integro-differenziale dei sistemi preda-predatore risale come noto a Vito Volterra (1926), che già aveva ottenuto una serie di risultati molto generali su questo argomento.

$$\begin{cases} \dot{S} = a(U - S) \\ \dot{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho S \\ \dot{U} = (m - n - \alpha) - mV \end{cases} \quad (2.9)$$

Il sistema (2.9) preserva, come noto, gli equilibri del sistema originario di Goodwin. Si ha in particolare un equilibrio nullo ( $E_0$ ), e un equilibrio significativo ( $E_1$ ) di coordinate:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{\alpha + \gamma}{\rho} = S^* \\ V^* &= \frac{m - n - \alpha}{m} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vogliamo evidenziare adesso il ruolo ricoperto dall'influenza dei valori passati del tasso di occupazione sulla stabilità locale del sistema (2.9). La linearizzazione di (2.9) nel suo punto di equilibrio significativo conduce alla seguente matrice jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ \rho V^* & 0 & 0 \\ 0 & -mU^* & 0 \end{vmatrix}$$

con equazione caratteristica:

$$k^3 + ak^2 + am\rho V^*U^* = k^3 + ak^2 + a(m - \alpha - n)(\alpha + \gamma) = 0 \quad (2.11)$$

i cui coefficienti sono:

$$a_0 = 1; \quad a_1 = a; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = a(m - n - \alpha)(\alpha + \gamma) \quad (2.12)$$

La semplice ispezione del polinomio ci dice che sulla base dei segni dei coefficienti, sono escluse, in base al teorema di Cartesio, radici reali positive, e, poichè  $a_3 > 0$ , sono anche escluse radici reali nulle. Infine, dal teorema di Routh-Hurwicz, che assegna una condizione necessaria e sufficiente perchè le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa, devono valere simultaneamente le seguenti disequazioni:

$$a_1 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (2.13)$$

Come si vede immediatamente dalle (2.12) le prime due disequazioni valgono sempre, mentre la terza non è mai soddisfatta. Cioè: l'equilibrio  $E_1$  non è mai localmente stabile. Questo risultato, riassunto nella seguente proposizione, è uno dei più classici esempi in letteratura (May 1973, Farkas 1984) del ruolo "generalmente destabilizzante" dei ritardi<sup>3</sup>.

**Proposizione 1:** L'introduzione di un effetto "exponentially fading" dell'occupazione ritardata nell'equazione di Phillips rende (localmente) instabile il sistema di crescita ciclica à la Goodwin.

### 3. Crescita "logistica" dell'occupazione e stabilità dell'equilibrio

L'introduzione del ritardo può dare luogo ad effetti più importanti se si introducono alcuni ulteriori specifici ingredienti nella struttura del modello à la Goodwin analizzato nel precedente paragrafo. Se per esempio, seguendo lo studio di Farkas e Kotsis (1992), si ipotizzasse una crescita di tipo logistico dell'occupazione, ossia se si ipotizzasse che, anche mancando l'effetto depressivo che la riduzione dei profitti esercita sul tasso di occupazione, quest'ultimo da solo non tenderebbe a crescere esponenzialmente ma raggiungerebbe comunque un tetto (ipotesi realistica nella misura in cui rimane sempre una parte di disoccupazione 'frizionale' anche nella cosiddetta piena occupazione o comunque fino ad un estremo superiore pari ad uno), allora in termini formali del modello avremmo che la dinamica del tasso di occupazione sarebbe espressa dalla:

$$\frac{\dot{U}}{U} = (m - n - \alpha) \left(1 - \frac{U}{x}\right) - mV \quad (3.1)$$

ove con  $x$  abbiamo indicato il tasso massimale di occupazione (così che  $(1-x)$  rappresenti il tasso di disoccupazione frizionale "non riducibile"). Il sistema modificato assume così la forma:

---

<sup>3</sup>Questo risultato è appunto "generalmente vero" ma esistono eccezioni anche nella stessa famiglia dei modelli alla Lotka-Volterra-Goodwin (per esempio la generalizzazione del modello di Goodwin attraverso l'introduzione dei prezzi consente di verificare che il ritardo di adeguamento di questi ultimi ai costi è fattore di stabilizzazione come dimostrato in Fanti e Manfredi (1996d)), eccezioni che dipendono ovviamente dal significato affidato agli elementi strutturali del modello.

$$\begin{cases} \dot{S} = a(U - S) \\ \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho S \\ \frac{\dot{U}}{U} = (m - n - \alpha)(1 - \frac{U}{x}) - mV \end{cases} \quad (3.2)$$

Questa ipotesi può condurre, come ora mostreremo a dinamiche di tipo periodico.

Si definiscano, come in precedenza:

$$A = -(\alpha + \gamma) ; C = m - n - \alpha$$

Il sistema (3.2) possiede, oltre all'equilibrio zero ( $E_0$ ), anche un equilibrio "d'asse"  $E_2$ , a quota salari nulla, le cui proprietà non sono riportate in questa sede ed un equilibrio significativo ( $E_1$ ) di coordinate:

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{\alpha + \gamma}{\rho} = S^* \\ V^* &= \frac{C}{m} \left(1 - \frac{A}{\rho x}\right) = \frac{C}{m} \left(1 - \frac{U^*}{x}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

La significatività economica di  $E_1$  richiede quindi, mantenendo la tradizionale:  $m > \alpha + n$  del modello di Goodwin, che sia soddisfatta la:

$$1 - \frac{U^*}{x} > 0 \rightarrow U^* < x \rightarrow \alpha + \gamma < \rho x \quad (3.4)$$

il cui significato è chiaro: il valore del tasso di occupazione massimale  $x$  non può essere minore del valore di equilibrio dell'occupazione.

Per quanto concerne la significatività teorico-economica di tale formulazione, è necessario fare alcune osservazioni. Mentre appare perfettamente naturale, nell'ambito dei modelli alla Goodwin, un "atteggiamento modellistico" che parta dalle identità dinamiche fondamentali (2.4) e quindi proceda alla modellizzazione separata delle singole componenti della dinamica secondo regole desunte dalla teoria economica prescelta, l'ipotesi di Farkas-Kotsis, per quanto perfettamente accettabile dal punto di vista empirico (l'esistenza di una "carrying capacity nel tasso di occupazione" è un fatto del mondo reale), se riletta per singole componenti sembra meno convincente sul piano della teoria economica che finisce involontariamente per esprimere. In effetti non è più evidente, all'interno dell'equazione dell'occupazione quali siano i fattori corrispondenti alla dinamica del

prodotto (e quindi, a monte, dell'investimento), della produttività del lavoro e della popolazione. Se però è coerente la dichiarata adesione di Farkas e Kotsis all'ipotesi di Goodwin di produttività ed offerta di lavoro crescenti esogenamente a tasso costante, se ne deve inferire che la teoria della crescita del prodotto che è incorporata nella (3.1) è della seguente forma:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = m(1-V) - C \frac{U}{x} \quad (3.5)$$

e ciò implica una sottostante teoria dell'accumulazione assolutamente non fondata. Infatti, il tasso di investimento nella (3.5) è nettamente inferiore al tasso di profitto e lo è nella misura di una quantità che, incomprensibilmente, risulta dipendere da tutti i parametri del modello, compresi i parametri della crescita esogena; nonostante ciò il tasso di crescita di equilibrio appare identico a quello di Goodwin. Questo è però una pura conseguenza del fatto che, causa la speciale struttura delle equazioni del modello, la richiesta che offerta di lavoro e produttività crescano a tasso costante, combinata con l'identità:

$$\frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N} \right). \quad (3.6)$$

produce sempre inevitabilmente, in equilibrio, una crescita del prodotto al medesimo tasso ( $\alpha+n$ ) del modello di Goodwin.

Se si cerca di correggere uno dei più evidenti difetti della (3.5), e cioè la dipendenza del tasso di investimento dai tassi esogeni di crescita della produttività e dell'offerta di lavoro, andando a separare i vari contributi dipendenti da tali tassi, i risultati sono ancora meno convincenti, perché, otterremmo, per le varie componenti della (3.6):

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = m(1-V) - m \frac{U}{x}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \alpha(1 - \frac{U}{x}); \quad \frac{\dot{N}}{N} = n(1 - \frac{U}{x}). \quad (3.7)$$

per nessuna delle quali, ci pare, è possibile fornire una chiara giustificazione economica. In particolare, con un po' di sforzo, la seconda equazione della (3.7) potrebbe incorporare implicitamente l'ipotesi, talora presente in letteratura (Glombowski-Kruger 1987) che l'intensità dello sforzo (e quindi la produttività del lavoro) sia correlata allo "effetto disciplina" della disoccupazione. L'equazione della crescita del prodotto viceversa appare più difficilmente interpretabile in quanto porge l'assurdo risultato per cui il tasso di crescita risulterebbe massimo con occupazione nulla. Infine la terza equazione della (3.7), implicherebbe addirittura che, se interpretata come tasso di crescita

della popolazione, la fertilità fosse minore in periodi di prosperità occupazionale, oppure che, se interpretata come crescita dell'offerta di lavoro, che ad occupazione crescente i lavoratori si ritirassero dal mercato (sarebbe in tal caso prevalente il cosiddetto "effetto del lavoratore addizionale" che è empiricamente poco significativo (Mincer 1966)).

Se comunque prescindiamo da questi tentativi di interpretazione, i risultati del modello (3.2) appaiono sufficientemente evidenti: se  $E_1$  fosse stabile allora la crescita di lungo periodo avverrebbe al medesimo tasso di Goodwin (per il motivo sopra citato) e il livello di equilibrio dell'occupazione non verrebbe intaccato. Le minori possibilità di espansione dell'occupazione nelle sue fasi di crescita, dovute al suo comportamento logistico, renderanno però più debole la posizione del salario sul mercato del lavoro, e quindi la quota salari: traccia visibile di questo stato delle cose essendo la perdita nella quota salari di equilibrio rispetto al modello di Goodwin.

Al di là di queste annotazioni di teoria economica sulle fondazioni dell'ipotesi logistica di Farkas-Kotsis, la conseguenza più interessante di tale assunzione è che, sovrapposta al meccanismo della vischiosità salariale (ossia del ritardo nel meccanismo di Phillips) dà luogo a risultati dinamici particolarmente interessanti. Il risultato fondamentale circa il sistema (3.2) è sintetizzato nella seguente proposizione<sup>4</sup>:

**Proposizione 2:** L'introduzione di un effetto "exponentially fading" dell'occupazione ritardata nell'equazione di Phillips in un sistema di crescita ciclica à la Goodwin in cui sia stata posta una limitazione logistica esogena alla crescita del tasso d'occupazione (secondo la (3.1)) implica l'esistenza di orbite chiuse.

La dimostrazione di questo risultato è ottenuta mediante il consueto meccanismo delle biforcazioni di Hopf.<sup>5</sup> In primo luogo si osservi che la linearizzazione di (3.2) nel suo punto di equilibrio significativo  $E_1$ , conduce alla seguente matrice jacobiana:

---

<sup>4</sup> Questo risultato è stato ottenuto già in Farkas-Kotsis (1992).

<sup>5</sup> Per le varie formulazioni del teorema di Hopf rimandiamo, tra i testi classici sull'argomento, a Marsden e McCracken (1976) oppure Guckenheimer e Holmes (1984).

$$J = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ \rho V^* & 0 & 0 \\ 0 & -mU^* & -C \frac{U^*}{x} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

cui corrisponde l'equazione caratteristica:

$$k^3 + (a + C \frac{U^*}{x})k^2 + aC \frac{U^*}{x}k + am\rho V^*U^* = 0 \quad (3.9)$$

di coefficienti:

$$a^0 = 1; a_1 = a + C \frac{U^*}{x}; a_2 = aC \frac{U^*}{x}; a_3 = am\rho V^*(\alpha + \gamma) \quad (3.10)$$

Ispezionando i segni dei coefficienti possiamo escludere sia radici reali positive che radici reali nulle, mentre dal teorema di Routh-Hurwicz avremo stabilità locale solo se:

$$(a + C \frac{U^*}{x})aC \frac{U^*}{x}k - am\rho V^*U^* > 0 \Rightarrow a > \rho x - \frac{U(C + \rho x)}{x} = \Psi(x) \quad (3.11)$$

Introducendo il parametro ausiliario  $b = (\rho x)^{-1}$ , la (3.11) assume la forma<sup>6</sup>:

$$a > \frac{1}{b} - \rho U^* - (\rho U^* C)b = \Phi(b) \quad (3.12)$$

La curva  $\Phi(b)$  definita dalla (3.12) è, almeno sull'insieme dei valori in cui l'uguaglianza:

$$a = a_0 = \Phi(b) \quad (3.13)$$

è vera in modo non banale (ossia per  $\Phi(b) > 0$  strettamente, quindi per  $0 < b < b_1$  in figura 1), luogo di punti di biforcazione di Hopf per l'equilibrio  $E_1$ . In particolare vale la seguente proposizione in merito al ruolo del parametro  $a$  ed alla stabilità/instabilità dei cicli limite che appaiono a seguito della biforcazione:

**Proposizione 3:** se, a partire da una situazione iniziale in cui il sistema (3.2) sia localmente stabile, il parametro  $a$  "decesce", il sistema stesso intraprende una biforcazione di Hopf in corrispondenza di:

<sup>6</sup>Da qui in poi seguiamo il metodo di Farkas e Kotsis (1992), Farkas (1995).

$$a_0 = \Phi(b) > 0 \quad (3.14)$$

**Corollario** (Farkas 1995, 447): Se inoltre, essendo vera la (3.13), è soddisfatta la disuguaglianza:

$$\Phi(b) - \left[ \rho U^* \cdot \frac{(m-n-\alpha)^2}{(m-n-\alpha) + 2\rho U^*} \right] b > 0 \quad (3.15)$$

allora esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $a$  appartenente all'insieme  $(a_0 - \delta, a_0)$  il sistema (3.2) possiede, in opportuno intorno di  $E_1$ , unica orbita periodica che è asintoticamente "orbitalmente stabile" (viceversa se il segno della (3.15) è invertito: negli intorni della forma  $(a_0, a_0 + \delta)$ , esisterà unica orbita periodica instabile).<sup>7</sup>

La figura 1 illustra rapidamente i risultati enunciati nelle due proposizioni 2 e 3.<sup>8</sup> Il valore  $b_d$  nella figura, che è individuato attraverso la proposizione 3, separa la regione in cui le orbite periodiche che appaiono in seguito a tale proposizione risultano essere stabili (caso cosiddetto di *biforcazione supercritica*) da quella in cui tali orbite risultano instabili (caso della *biforcazione subcritica*).<sup>9</sup>

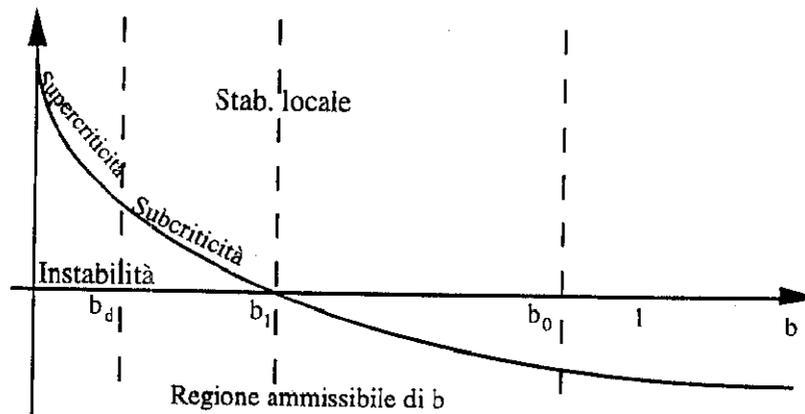
<sup>7</sup>La dimostrazione di questo risultato (Farkas 1984) richiede degli sviluppi algebrici particolarmente complessi, basati sullo studio dei termini di ordine superiore dello sviluppo in serie di Taylor del campo vettoriale definente il sistema di interesse (Marsden e McCracken 1976). In genere la complessità di questi sviluppi impedisce delle soddisfacenti interpretazioni economiche delle condizioni di stabilità orbitale. In questo caso grazie all'analisi di Farkas (1984), è possibile rintracciare condizioni interamente interpretabili in chiave economica.

<sup>8</sup>Come si può verificare sull'insieme ammissibile  $(0, b_0)$  di valori di  $b$  (definito riesplicitando opportunamente la (3.4):

$$a) \Phi(0) = +\infty \quad b) \Phi(b_0) < 0 \quad c) \Phi'(b) < 0 \text{ sempre}$$

In particolare la curva  $\Phi(b)$ , che attraversa l'asse delle ascisse in corrispondenza del punto  $b_1 < b_0$ , ha la forma rappresentata in fig. 1.

<sup>9</sup>Il caso subcritico è ovviamente non osservabile (attraverso simulazione "in avanti").



**Fig. 1** Stabilità locale dell'equilibrio significativo e regioni di super/sub-criticità per il sistema (2.15)

Facciamo adesso un semplice esempio numerico: con  $x=1$ ,  $m=0.33$ ,  $\gamma=1$ ,  $\rho=2$ ,  $\alpha=n=0.3$  (quindi  $U^*=0.51$ ) implica  $a=0.83$  cioè un ritardo  $T=1/a=1.2$  anni che corrisponde a circa quattordici mesi; per ritardi superiori ai quattordici mesi inizieranno fluttuazioni nella quota salari e nel tasso d'occupazione, per un ritardo nei dintorni dei quattordici mesi apparirà un ciclo limite di lunghezza pari a 18.5 anni<sup>10</sup>. Naturalmente non solo il parametro  $a$ , ma anche gli altri parametri influenzeranno la stabilità del sistema nel modo seguente: un incremento di  $\rho$  e di  $n$  o un decremento di  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ <sup>11</sup> può implicare che il sistema perda la sua stabilità attraverso una biforcazione di Hopf che farà apparire orbite chiuse nei dintorni dell'equilibrio. Rispetto alla frequenza del ciclo, rileviamo che valori più elevati di  $a$ ,  $m$  e  $\gamma$  riducono la frequenza, mentre valori più elevati di  $\rho$ ,  $\alpha$  ed  $n$  lo aumentano.

#### 4. Endogeneizzando la dinamica dell'offerta di lavoro

L'assunzione della dinamica occupazionale di tipo logistico incorporata nella (3.1) è, come già puntualizzato, fortemente ad hoc (per quanto empiricamente indiscutibile). Lo studio delle proprietà dell'equilibrio in tale caso costituisce però, comunque, un utile punto di partenza per

<sup>10</sup>In questo caso la formula per il calcolo del periodo è data da:

$$F = \frac{2\pi}{\sqrt{(aCU^*)/x}}$$

<sup>11</sup>Tali risultati appaiono dalla semplice statica comparata rispetto ai parametri della condizione di stabilità (3.11). In particolare l'effetto tendenzialmente destabilizzante della produttività esogena dipende dal fatto che:

$$\gamma < (m + \rho - \alpha - n) \text{ poichè } \gamma < \rho \text{ e } (m - \alpha - n) > 0.$$

formulazioni più fondate da punto di vista teorico. Affronteremo adesso una variante del modello di crescita ciclico la cui analisi consente di ottenere risultati interessanti simili al precedente. Ipotizzeremo che l'offerta di lavoro cresca in relazione diretta al tasso di occupazione:

$$\frac{\dot{N}}{N} = f(U), \quad f > 0 \quad (4.1)$$

Dietro a tale formulazione stanno almeno due ipotesi giustificatrici: i) la fertilità è più alta nei periodi di occupazione che nei periodi di disoccupazione; ii) è operante quello che la letteratura sul mercato del lavoro chiama effetto "scoraggiamento", in base al quale la partecipazione è direttamente correlata al tasso di occupazione<sup>12</sup>. In quest'ultima accezione appare del tutto naturale una formulazione del tipo<sup>13</sup>:

$$\frac{\dot{N}}{N} = nU \quad (4.2)$$

Con questa ipotesi, che come nel caso della (3.1) introduce un effetto di dipendenza da densità (e i cui effetti sul modello originale di Goodwin sono studiati in dettaglio in Manfredi e Fanti, 1996), la dinamica occupazionale del sistema originale diventa:

$$\frac{\dot{U}}{U} = m - \alpha - nU - mV \quad (4.3)$$

Il sistema che risulta dalla (4.3):

---

<sup>12</sup> Per uno studio di tale ipotesi in un modello di crescita simile a questo si veda anche Fanti-Manfredi (1996b).

<sup>13</sup> Possono essere date altre giustificazioni del termine  $nU$  (che ora rappresenta specificamente il tasso percentuale di crescita dell'offerta di lavoro), per esempio introducendo esplicitamente l'offerta di lavoro come prodotto di un tasso di attività per la popolazione totale. Una giustificazione euristica alternativa è la seguente: anche in regime di crescita stabile della popolazione al tasso  $n$  non è necessariamente detto che tutta la "nuova" popolazione presente si offra sul mercato del lavoro; anzi se l'occupazione è particolarmente bassa vi possono essere forti effetti di tipo disincentivo, che fanno sì che solo una quota  $q(U)$  di  $n$  si offra effettivamente. Nella formulazione (4.2) è stata utilizzata proprio l'occupazione effettiva quale corretto fattore di proporzionalità. Infine, la (3.2) può essere resa compatibile con un'ulteriore, alternativa, assunzione, e cioè l'esistenza di comportamenti demografici differenziali tra occupati e non. Per la discussione di queste ed altre assunzioni si faccia sempre riferimento a Manfredi e Fanti (1996).

$$\begin{cases} \dot{S} = a(U - S) \\ \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho S \\ \frac{\dot{U}}{U} = (m - \alpha) - nU - mV \end{cases} \quad (4.4)$$

possiede a sua volta, come il (3.2), l'equilibrio nullo, un equilibrio d'asse a quota salari nulla ( $E_2$ ), di cui non ci interesseremo in questa sede, e un equilibrio significativo ( $E_1$ ) di coordinate:

$$\begin{cases} U^* = \frac{\alpha + \gamma}{\rho} = S^* \\ V^* = \frac{1}{m} [m - \alpha - nU^*] = \frac{1}{m} [m - g^*(n)] \end{cases} \quad (4.5)$$

ove con  $g^*(n) = \alpha + nU^*$  ne abbiamo indicato il tasso di crescita in equilibrio di lungo periodo del prodotto che è minore del tasso di crescita esibito dal modello di Goodwin (e quindi anche dal modello di Farkas-Kotsis). Questi risultati statici sono ovviamente identici a quelli della variante al modello di Goodwin con effetto scoraggiamento, esposti in Manfredi e Fanti (1996). In particolare la richiesta:

$$n < (m - \alpha) / U^* \quad (4.6)$$

è necessaria e sufficiente per la significatività economica di  $V^*$  e definisce la soglia superiore  $n_0$  all'insieme dei valori ammissibili di  $n$ . Il sistema (4.4) possiede ovviamente la medesima struttura del (3.2), ed è quindi naturale attendersi analoghi risultati.

La matrice jacobiana del sistema valutata in corrispondenza di  $E_1$  ha forma:

$$J = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ \rho V^* & 0 & 0 \\ 0 & -mU^* & -nU^* \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

con equazione caratteristica:

$$k^3 + (a + nU^*)k^2 + anU^*k + a\rho U^*V^* = 0 \quad (4.8)$$

la cui struttura è analoga a quelle precedenti e porge, come condizione di stabilità locale di Routh-Hurwicz:

$$(a + nU^*)n - \rho[m - g^*(n)] > 0 \quad (4.9)$$

ossia:

$$a > \Phi(n) = \frac{H(n)}{n} - nU^* \quad \text{ove: } H(n) = \rho[m - g^*(n)] \quad (4.10)$$

ove la funzione  $\Phi(n)$  - intesa ovviamente ora come funzione di  $n$  (il "parametro interessante") - possiede esattamente la medesima forma della funzione  $\Phi(b)$  studiata nel precedente paragrafo. In particolare nell'insieme dei valori ammissibili di  $n$ , della forma  $(0, n_0)$ <sup>14</sup> avremo, come si può facilmente verificare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi(0) &= +\infty & \text{b) } \Phi(n_0) &= \frac{H(n_0)}{n_0} - U^*n_0 = -U^*n_0 < 0 \\ \text{c) } \Phi'(n) &= \frac{H'(n)n - H(n)}{n^2} - U^* < 0 \quad \text{sempre, in quanto: } H < 0, H' < 0 \end{aligned}$$

Esiste (si vedano i calcoli in appendice A2) quindi certamente un valore  $n_1 < n_0$ , in corrispondenza del quale la curva  $\Phi(n)$  cambia segno. Possiamo così tracciare il grafico di tale curva, che è del tipo rappresentato in fig. 2.

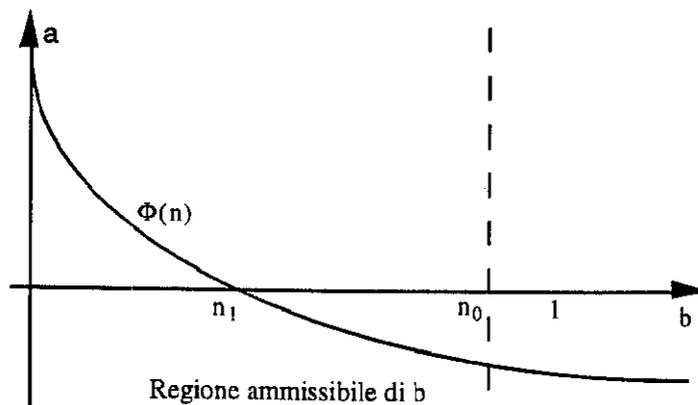


Fig. 2 Forma della curva  $\Phi$  (.) al variare del suo parametro  $n$

La completa equivalenza del problema (4.4) a quello del paragrafo precedente consente di enunciare la seguente proposizione fondamentale, di struttura analoga alla proposizione 3:

<sup>14</sup>In realtà la condizione originale di Goodwin  $m - \alpha - n > 0$  è più restrittiva della (4.6): imponendola l'insieme dei valori ammissibili di  $n$  risulterebbe meno ampio. Ciò non fa però cambiare i risultati più interessanti del lavoro.

**Proposizione 4:** L'introduzione di un effetto "exponentially fading" dell'occupazione ritardata nell'equazione di Phillips in presenza di una relazione positiva lineare fra tasso di crescita dell'offerta di lavoro e tasso di occupazione implica l'esistenza di orbite chiuse nel sistema di crescita ciclica à la Goodwin<sup>15</sup>.

In particolare, se, a partire da una situazione iniziale in cui l'equilibrio  $E_1$  sia localmente stabile, il parametro  $a$  "decrese", il sistema (4.4) intraprende una biforcazione di Hopf in corrispondenza di:

$$a_0 = \Phi(n) > 0 \quad (4.11)$$

Se inoltre, essendo vera la (4.11), è soddisfatta la disuguaglianza:

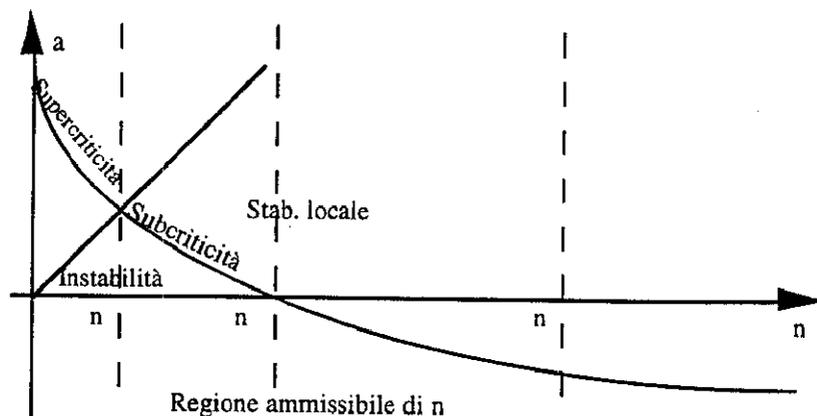
$$\Phi(n) - \left[ \frac{(m-\alpha)U^*}{(m-\alpha) + 2\rho U^*} \right] n > 0 \rightarrow \Phi(n) - rn > 0 \quad (4.12)$$

(ove  $r$  è la quantità tra parentesi nella prima espressione della (4.12)) allora esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $a(a_0 - \delta, a_0)$  il sistema (4.4) possiede, in opportuno intorno di  $E_1$ , un'unica orbita periodica che è asintoticamente "orbitalmente stabile" (viceversa per quanto concerne gli intorni della forma  $(a_0, a_0 + \delta)$ , in cui le orbite periodiche corrispondenti risulteranno instabili<sup>16</sup>).

La figura 2, di significato analogo alla figura 1, ci consente di chiarire il significato di questi risultati e di fornirne un'importante interpretazione economica sostantiva. L'enunciato della proposizione 4 per quanto concerne la super/subcriticità dei cicli limite afferma in sostanza che avremo cicli limite stabili nella sola regione in cui, essendo vera la (4.11), la curva  $\Phi(n)$  giace al di sopra alla retta  $rn$  determinata dalla (4.12)

<sup>15</sup>Come dimostrato in appendice, la condizione del teorema di Hopf di attraversamento dell'asse immaginario da parte degli autovalori complessi con velocità nonnulla, è verificata.

<sup>16</sup>E quindi, di fatto, non "osservabili".



**Fig. 3** Stabilità locale dell'equilibrio significativo e regioni di super/sub-criticità per il sistema (4.4)

Seguono quindi le seguenti notevoli osservazioni:

a) esiste, nell'ambito delle regione ammissibile  $R_A$  ( $n < n_0$ ) una regione di valori di  $n$  ( $n_1 < n < n_0$ ) in cui l'effetto di offerta di lavoro è così alto che il suo effetto stabilizzante risulta talmente importante da sterilizzare il ruolo destabilizzante del ritardo: l'equilibrio  $E_1$  risulta sempre localmente asintoticamente stabile. Si indichi tale regione con  $R_S$ .

b) all'opposto se  $n$  non è troppo alto ( $0 < n < n_1$ ) allora l'effetto di dipendenza da densità è meno importante e tende a bilanciarsi con, quello, di segno opposto sulla stabilità, dovuto al ritardo nella determinazione dei salari: questo consente al sistema di sperimentare eventuali transizioni da stabilità ad instabilità attraverso il meccanismo della biforcazione di Hopf. In particolare la regione di instabilità corrisponde alla regione caratterizzata genericamente da "ritardi ampi" (ossia piccoli valori di  $a$ ) che si situa al di sotto della curva di equazione  $\Phi(n)$ . Bisogna allora distinguere ulteriormente:

b1) vi è una regione di supercriticità ( $0 < n < n_d$ )<sup>17</sup>, caratterizzata da bassissimo effetto di dipendenza da densità, in cui l'attrazione dell'equilibrio  $E_1$  è minimale: ciò permette la stabilità delle orbite periodiche che ne emergono. Si indichi tale regione con  $R_{Super}$ .

b2) vi è infine una regione, caratterizzata da valori intermedi di  $n$  ( $n_d < n < n_1$ ), in cui le orbite periodiche sono instabili (subcriticità), che associa valori intermedi di  $n$  con valori molto elevati del parametro di ritardo. Si indichi tale regione con  $R_{Sub}$ .

<sup>17</sup>Si veda l'appendice A3.

Detto in altre parole: l'aspetto più rilevante della dinamica è ovviamente il trade-off istituito tra i due parametri.  $T=1/a$  (che, come ricordiamo rappresenta il ritardo medio con cui le variazioni di  $U$  influenzano quelle dei salari) ed  $n$ , aventi effetti diametralmente opposti sulla stabilità del sistema. Attraverso le soglie  $n_d, n_1, n_0$ , è, in particolare, possibile suddividere la regione ammissibile  $R_A$ , con esplicito riferimento al comportamento delle orbite di tipo periodico, nella seguente successione di "finestre" dinamiche:

a)  $R_{Super}$ : orbite periodiche (quando esistono e cioè: "localmente") asintoticamente stabili

b)  $R_{Sub}$  : orbite periodiche (quando esistono) instabili

c)  $R_S$ : assenza di orbite periodiche

Tra questi risultati ve ne è in particolare uno che appare assolutamente centrale, sia per la sua interpretazione economica, sia per le sue eventuali conseguenze in termini di politiche, davvero non evidenti.

E' illuminante una comparazione dei risultati del modello base di questo lavoro, il modello (4.4), con la sua controparte non ritardata, e cioè l'estensione del modello di Goodwin con solo effetto di offerta di lavoro (Manfredi e Fanti 1996). In quest'ultimo modello l'effetto dovuto alla endogeneizzazione dell'offerta è chiaramente stabilizzante, questo non è altro che il tipico effetto di dipendenza da densità nei modelli alla Lotka-Volterra. Viceversa nel nostro modello, di dimensione superiore, a causa della presenza del ritardo di gestazione, l'effetto scoraggiamento può essere responsabile di una serie di conseguenze non immediatamente autoevidenti. Se infatti è troppo intenso sterilizza completamente l'effetto destabilizzante del ritardo, generando una "normale" dinamica di equilibrio. Se però, all'opposto, è più contenuto, può dar luogo a cicli limite, che però risulteranno instabili; ma se, infine, è sufficientemente contenuto, allora può dare luogo a orbite periodiche stabili se associato a ritardi a loro volta "piccoli". Questo ha una chiara interpretazione in termini dinamici: per avere cicli limite stabili abbiamo bisogno da un lato di ritardi contenuti, in cui cioè l'effetto destabilizzante non sia troppo marcato, ma contemporaneamente degli effetti di stabilizzazione (dovuti in questo caso particolare proprio all'effetto scoraggiamento) deboli abbastanza da impedire la attrattività dell'equilibrio, ma al tempo stesso tali da definire un effetto di attrazione, dovuto questa volta all'orbita periodica, "lontano dall'equilibrio".

Una situazione piuttosto notevole si verifica se assumiamo esplicitamente che, come nel modello di Goodwin,  $n$  sia limitato superiormente dalla soglia  $(m-\alpha)$  (un fatto empiricamente realistico). In questo caso ovviamente la finestra dei valori ammissibili di  $n$  si ridurrà notevolmente: sotto certe condizioni la soglia superiore di tale finestra

risulterà anche inferiore ad  $n_1$ . Si può allora dimostrare che, sotto condizioni relativamente "normali", così che risulta  $R_A = R_{\text{Super}}$ <sup>18</sup> In altre parole, esistono orbite periodiche in tutta la finestra dei valori ammissibili di  $n$  e queste (quando esistono) sono sempre stabili. Ciò suggerisce la seguente notevole osservazione e cioè che in un mondo in cui esistano contemporaneamente l'effetto del "lavoratore scoraggiato" ed una contenuta *vischiosità salariale*, difficilmente<sup>19</sup> potranno aversi comportamenti di instabilità: l'economia tenderà cioè in generale o ad uno stato stazionario<sup>20</sup> o a manifestare un comportamento di oscillazioni sostenute. Per esempio se l'economia è fortemente 'capitalizzata' ( $m$  basso) e l'effetto scoraggiamento è importante ( $n$  alto) (cosa che sembra indicata da fenomeni come l'elevata crescita degli iscritti al Collocamento nei momenti di ripresa economica), allora la stabilità diviene il comportamento più probabile per salari non eccessivamente vischiosi.

Appare particolarmente interessante fornire informazioni sulla dinamica delle finestre fondamentali del modello al variare dei suoi parametri. Ciò implica studiare come evolvono le loro soglie in termini dei parametri di interesse. Una semplice ispezione delle varie soglie evidenzia una complicata dipendenza dai parametri. Si tratta di studiare come variano  $\Phi(n)$  e  $rn$  al variare dello stesso parametro. Se i parametri sono pochi, il metodo consente un'analisi ben definita delle relazioni fra un parametro e la stabilità dell'equilibrio o dell'orbita periodica che lo contiene. Solo nel caso di  $m$  è possibile dimostrare facilmente che una riduzione dell'intensità capitalistica dell'economia (cioè del rapporto capitale-prodotto) aumenta tutte le soglie fondamentali ma con effetti non lineari. Si può dimostrare che in particolare ne risulta ampliata maggiormente la finestra di subcriticità rispetto a quella di supercriticità,<sup>21</sup> e che inoltre, sebbene si ampli la finestra di instabilità, dato l'ampliamento anche della regione ammissibile, adesso la finestra di stabilità risulta "relativamente" aumentata.

Quindi l'effetto dei parametri economici sulla finestra sia in termini relativi che assoluti richiede l'analisi delle variazioni del grafico in figura 3, cosa che in genere risulta algebricamente complicata.

<sup>18</sup>Queste condizioni sono facilmente ottenibili da confronti tra le varie soglie.

<sup>19</sup>Questo "difficilmente" è da intendersi in senso relativo: vi possono ovviamente essere configurazioni parametriche, specie quando  $n$  è molto piccolo in cui saranno sufficienti ritardi poco importanti per generare situazioni di instabilità.

<sup>20</sup>Ovviamente nelle variabili  $U$  e  $V$ : le variabili assolute esibirebbero tutte un comportamento di crescita bilanciata.

<sup>21</sup>Per una giustificazione di queste affermazioni si veda in appendice.

## 5. Ritardo dei salari come parametro di biforcazione: analisi ed illustrazione numerica

Abbiamo visto nel paragrafo precedente come una discussione completa del problema al variare dei valori di tutti i suoi parametri è estremamente complessa. Utili informazioni parziali sono però già ottenibili dall'utilizzo della sola relazione di biforcazione, implicita nel criterio di stabilità. Riesplicitando tale condizione in termini di tutti i parametri, abbiamo la relazione:

$$a > a_0(n) = \Phi(n) = \frac{\rho}{n}(m - \alpha) - (\alpha + \gamma) \frac{\rho + n}{\rho} \quad (5.1)$$

che evidenzia l'effetto di tutti gli altri parametri del modello sulla curva di biforcazione  $\Phi(n)$  (che, lo si può facilmente verificare hanno l'effetto di traslare verso l'alto o verso il basso la curva stessa) e quindi traslare a destra od a sinistra la soglia  $n_1$

Quindi quando  $a > a_0$  (ovvero quando il ritardo non è troppo ampio) il sistema è in una regione di stabilità locale. Un esempio numerico facilita l'interpretazione dei risultati del modello: con  $m=0.33$ ,  $\gamma=1$ ,  $\rho=2$ ,  $\alpha=n=0.03$  (quindi  $U^*=0.51$ ) implica  $a=18.6$  cioè un ritardo  $T=1/a=0.054$  anni che corrisponde a circa tre settimane; per ritardi superiori alle tre settimane inizieranno fluttuazioni esplosive nella quota salari e nel tasso d'occupazione, per un ritardo nei dintorni delle tre settimane apparirà un ciclo limite di lunghezza pari a 12 anni. Naturalmente non solo il parametro  $a$ , ma anche gli altri parametri influenzeranno la stabilità del sistema nel modo seguente: un *incremento di  $\rho$  e di  $m$  o un decremento di  $\gamma$  ed  $\alpha$  può implicare che il sistema perda la sua stabilità attraverso una biforcazione di Hopf* che farà apparire orbite chiuse nei dintorni dell'equilibrio. Se confrontiamo questi risultati con l'effetto che i parametri economici avevano sulla stabilità del modello ad hoc discusso nel paragrafo 3, evidenziamo come nel caso delle variazioni di  $n$  e di  $m$  gli effetti sulla stabilità siano differenti nei due modelli

Rispetto alla scelta del parametro di biforcazione in questo modello possiamo rilevare una sostanziale equivalenza dei risultati dinamici per qualsiasi parametro avessimo candidato a variare: infatti se  $a_h = \Gamma(\alpha, \gamma, \rho, m, n)$  è funzione monotona di ogni singolo argomento allora la scelta del parametro di biforcazione è indifferente perchè la condizione di Routh-Hurwicz è riesplicitabile univocamente rispetto a qualunque parametro del modello. Analoga considerazione può essere svolta in merito alla scelta della relazione  $a = \Phi(n)$ , quale relazione pilota della discussione, piuttosto che altre. Tale scelta era però motivata dal fatto che questi erano i parametri chiave nella nostra formulazione.

Sappiamo che l'introduzione di una relazione positiva fra il tasso di crescita dell'offerta di lavoro e il tasso di occupazione trasforma l'equilibrio da un centro come in Goodwin ad un fuoco (od ad un nodo) stabile.

In sintonia con tale effetto stabilizzatore, anche qui più alto è il parametro  $n$  (cioè più sensibile è l'offerta di lavoro all'andamento dell'occupazione) meno probabile è - a parità di ritardo nei salari - il verificarsi dell'instabilità (e quindi del ciclo limite).<sup>22</sup> Quindi, se a partire da una situazione iniziale di stabilità, si verifica, a seguito di fatti esterni, una riduzione dell'effetto "scoraggiamento" e/o una riduzione della differenza della fertilità delle famiglie 'occupate' rispetto alle famiglie 'disoccupate', se la reazione dei salari allo stato del mercato del lavoro, anziché essere immediata è caratterizzata da un ritardo medio non eccessivo, questo può essere fattore di innesco di un andamento ciclico strutturalmente stabile di un'economia à la Goodwin.

Eguale il parametro  $\gamma$  - che possiamo identificare come la forza autonoma della rivendicazione salariale - ha un effetto 'stabilizzante', e quindi una riduzione di tale autonomia rivendicativa in un'economia precedentemente stabile (convergente ciclicamente o meno all'equilibrio) può essere responsabile dell'instaurarsi di un ciclo limite (o dell'instabilità). La medesima considerazione può essere ripetuta per quanto riguarda una riduzione del tasso di crescita esogeno della produttività, sia per quanto concerne una riduzione del rapporto capitale prodotto; mentre considerazioni esattamente inverse possono farsi in seguito a variazioni del parametro  $\rho$  - che possiamo interpretare come il grado di sensibilità della rivendicazione salariale allo stato del mercato del lavoro. Naturalmente la scelta del parametro di biforcazione deve essere guidata dall'individuazione di quel parametro che è più idoneo e libero di variare nel tempo, in seguito a mutamenti esterni al modello (ambientali, culturali, storici), e che quindi è meno legato alle assunzioni sui comportamenti e sulla struttura del modello economico; in questo senso candidato ideale appare il ritardo salariale, nella misura in cui è legato a regole istituzionali contrattuali, come pure i parametri dei tassi esogeni di crescita  $\alpha$  ed  $n$ , quest'ultimo nella misura in cui riflette anche mutamenti culturali quali la partecipazione femminile al lavoro. Infine, anche il parametro  $\gamma$ , per la sua 'storicità' ci sembra un possibile candidato.

---

<sup>22</sup>Per esempio con i precedenti valori numerici dei parametri sarebbe sufficiente un valore di  $n=0.4$  (certo implausibilmente alto) per rendere  $a_0=\Phi(n)=0$  e quindi nessun ritardo per quanto elevato nei salari sarebbe comunque in grado di provocare instabilità.

Mentre nulla possiamo dire sull'ampiezza delle oscillazioni in assenza della soluzione per l'orbita tendente al ciclo limite, possiamo però studiare la frequenza delle oscillazioni di tale ciclo, che è pari a  $F=2\pi/[(anU^*)^{1/2}]$ . Questo consente la seguente:

**Proposizione 5:** più elevati valori di  $a, \alpha, n, \gamma$  riducono<sup>23</sup> la frequenza del ciclo, mentre la aumentano più elevati valori di  $\rho$ ; il rapporto capitale-prodotto non influisce sulla frequenza del ciclo.

Anche rispetto alla frequenza del ciclo si può osservare che gli effetti qualitativi e quantitativi dei parametri economici sono diversi qui rispetto al modello di Farkas-Kotsis.

## 6. Conclusioni

L'obiettivo del presente lavoro era quello di indagare che cosa accade in un modello classico di crescita con ciclo quale Goodwin (1967) quando sul mercato del lavoro i salari si adeguano con ritardo ai mutamenti dell'occupazione e l'offerta di lavoro varia, nel breve periodo, con l'occupazione secondo l'ipotesi del lavoratore scoraggiato.

Queste ipotesi economiche consentono di dimostrare l'esistenza di orbite periodiche strutturalmente stabili. In particolare la discussione della dinamica rispetto ai due parametri chiave, il ritardo dovuto all'effetto vischiosità e la reattività dell'offerta di lavoro all'occupazione mostra come il regime ciclico stabile sia a tutti gli effetti un fatto frequente nella nostra economia ed appare, attraverso il meccanismo delle biforcazioni di Hopf, fintantochè la reattività dell'offerta di lavoro all'occupazione non assume valori abnormalmente elevati e il regime dei ritardi sia circoscritto ad una banda di valori non troppo elevati.

E' a questo punto essenziale risottolineare la caratteristiche salienti dei nostri risultati, in primo luogo il fatto che l'effetto scoraggiamento può essere responsabile di una importante serie di conseguenze assolutamente non autoevidenti. Se infatti tale effetto è troppo intenso sterilizza completamente l'impatto destabilizzante del ritardo. Se all'opposto, è più contenuto, può essere responsabile della comparsa di orbite periodiche, che però risulteranno instabili. Se invece è sufficientemente contenuto, e ovviamente associato a ritardi a loro volta "piccoli", può dare luogo a cicli limite che questa volta

---

<sup>23</sup> Tale affermazione ovviamente vale solo e soltanto finchè le variazioni dei parametri coinvolti sono tali da preservare l'esistenza del ciclo

risulteranno stabili. L'interpretazione dinamica ci dice dunque che per avere cicli limite stabili abbiamo bisogno da un lato di ritardi contenuti, ma contemporaneamente degli effetti di stabilizzazione deboli abbastanza da impedire la attrattività dell'equilibrio e nel contempo tali da generare un effetto di attrazione "lontano dall'equilibrio". Appare evidente quali potrebbero essere le conseguenze in termini di prescrizioni di politica economica, qualora, per esempio, l'effetto scoraggiamento fosse sensibile ad interventi di "policy".

Rileva qui una importante osservazione: la nostra analisi basata su assunzioni comportamentali fondate su ipotesi teoriche per quanto concerne la dinamica della popolazione, mostra come ipotesi ad hoc sulla dinamica del tasso occupazionale come quelle di Farkas-Kotsis (1992), per quanto dal punto di vista matematico conducono alla similarità del comportamento qualitativo generale, possono condurre ad inferenze erronee l'economista o il demografo, come per esempio in relazione al fatto che aumenti del parametro che guida il tasso di crescita della popolazione o del rapporto capitale-prodotto possano implicare maggiore stabilità anziché destabilizzare il sistema economico.

Inoltre, a parità di parametri che descrivono l'economia, il ciclo di 12 anni che risulta dal nostro modello è inferiore a quello (18 anni) che risulta in Farkas-Kotsis. Sempre rispetto al periodo del ciclo, merita rilevare che il periodo da noi individuato è decisamente inferiore anche a quello ottenuto dando simili contenuti empirici nel modello originario di Goodwin, che infatti, come Solow (1990) ha rilevato, sembrava fornire periodi troppo lunghi per essere compatibili col normale ciclo economico (trade cycle).

Per concludere, ulteriori ricerche dovrebbero procedere almeno lungo tre linee: 1) l'analisi della stabilità globale per individuare eventualmente l'operato di altri stabilizzatori nelle regioni più esterne (Alexander-Yorke, 1978); 2) l'introduzione dei prezzi, e di una loro vischiosità relativamente ai salari, che può modificare ampiamente le regioni di stabilità e aumentare il realismo del modello; 3) una più completa definizione dell'offerta di lavoro che tenga anche conto degli effetti di popolazione.

## Riferimenti

- Alexander J.C.-Yorke J.A., Global bifurcations of periodic orbits, *American Journal of Mathematics*, 100, 1978.
- Chiarella C. (1990), *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*, Springer Verlag, New York, Berlin, Tokyo

- Fanti L., Manfredi P. (1995), Salari di efficienza e crescita con ciclo, accettato per la pubblicazione su *Studi Economici*
- Fanti L., Manfredi P. (1996a), Salari di efficienza, ritardi nei piani di investimento e crescita con ciclo, Università di Pisa, Mimeo
- Fanti L., Manfredi P. (1996b), Crescita con ciclo, ritardi nei piani di investimento ed effetti di popolazione, Università di Pisa, Mimeo
- Fanti L., Manfredi P. (1996c), Proprietà dinamiche di alcuni modelli con ritardo, Università di Pisa, Mimeo
- Fanti e Manfredi (1996d), Stickiness of prices and wages in a Goodwin's model, Università di Pisa, Mimeo
- Farkas M. (1984), Stable Oscillations in a Predator-Prey Model with Time Lag, *Journal of Math. Analysis and Applications*, 10, 175-188
- Farkas M., Kotsis M. (1992), Modelling Prey-Predator and Wage-Employment Dynamics, in Feichtinger G. (Ed.), *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, Elsevier, New York, 513-526
- Farkas M. (1995), *Periodic Motions*, Springer Verlag, New York Tokio Berlin
- Flaschel P.-Groh G. (1995), The classical growth cycle: reformulation, simulation and some facts, *Economic Notes*, 2
- Glombowski J.-Kruger M. (1987), Generalizations on Goodwin 's growth cycle model, in Batten D.-Casti J.-Johansson B., (Eds), *Economic Evolution and Structural Adjustment*, Springer Verlag, Berlin
- Guckenheimer J., Holmes P. (1984), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer Verlag, New York, Tokio, Berlin
- Manfredi P., Fanti L. (1996), *Population Dynamics and Goodwin's Model*, Università di Pisa, Mimeo
- Marsden e McCracken (1976), *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Springer Verlag, New York, Tokio, Berlin
- May R.M. (1973), *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, Princeton
- McDonald N. (1978), *Time Lags in Biological Systems*, Lecture Notes Biomath. 29, Springer Verlag, New York, Tokio, Berlin
- Mincer J. (1966), Labor force participation and unemployment: a review of recent evidence, in Gordon R.A., Gordon M.S. (ed.), *Prosperity and unemployment*, Wiley, New York
- Solow R. (1990), Goodwin's growth cycle: Reminiscence and Ruminations, in Velupillai K. (Ed.), *Nonlinear and multisectoral macrodynamics. Essays in Honour of Richard Goodwin*, Macmillan, London
- Volterra V. (1926), *Variazioni e fluttuazioni nel numero di specie animali conviventi*, Memorie del Regio Comitato Talassografico Italiano, Ristampato in: V. Volterra, *Opere Complete*, a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1960,

## Appendice

### A.1 Velocità di attraversamento dell'asse immaginario

Come sappiamo tra le richieste del teorema di Hopf vi è la:

$$\left[ \frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right]_{a=a_0} \neq 0 \quad (1)$$

Ora, come noto, dato il polinomio caratteristico corrispondente, e cioè:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A(a)\lambda^2 + B(a)\lambda + C(a) \quad (2)$$

(con i coefficienti riguardati in quanto funzioni del parametro di biforcazione), la derivata al primo membro della (1) è data da:

$$\left[ \frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right] = (-1) \frac{B'(a)A(a) + B(a)A'(a) - C'(a)}{2[A^2(a) + B(a)]} = (-1) \frac{\Theta(a)}{\Psi(a)} \quad (3)$$

Nel caso specifico del nostro modello abbiamo:

$$\begin{aligned} A(a) &= a + nU^*; & A'(a) &= 1 \\ B(a) &= anU^*; & B'(a) &= nU^*; \\ C(a) &= \text{amp}U^*V^*; & C'(a) &= \text{mp}U^*V^* \end{aligned} \quad (4)$$

per cui, essendo  $B(a) > 0$  sempre, il segno della derivata (3) dipende soltanto dal segno della quantità  $Q(a)$ . Abbiamo:

$$\Theta(a) = nU^*(a + nU^*) + anU^* - \text{mp}U^*V^* = U^*[(a - \Phi(n)) + an] \quad (5)$$

Ne segue che, in corrispondenza del valore di biforcazione  $a = a_0 = \Phi(n)$  avremo:

$$\Theta(a_0) = U^* \{ n[(a_0 - \Phi(n)) + a_0 n] \} = U^* a_0 n > 0 \text{ sempre} \quad (7)$$

e quindi, definitivamente:

$$\left[ \frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right]_{a=a_0} < 0 \text{ sempre} \quad (1)$$

## A.2 Determinazione della soglia $n_1$

Il valore  $n_1$  è soluzione dell'equazione:

$$\Phi(n) = 0 \quad \text{ossia: } \frac{H(n)}{n} - nU^* = 0 \quad \text{ove: } H(n) = \rho[m - g^*(n)] \quad (1)$$

Otteniamo così l'equazione quadratica:

$$U^*n^2 + \rho U^*n - \rho(m - \alpha) = 0 \quad (2)$$

di soluzione:

$$n = \frac{1}{2U^*} \cdot \left[ -\rho U^* \pm \sqrt{(\rho U^*)^2 + 4\rho U^*(m - \alpha)} \right] = \frac{\rho}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{m - \alpha}{\rho U^*}} \right] \quad (3)$$

Siccome per ipotesi  $m > \alpha$ , una sola soluzione della (3) è sempre significativa dal punto di vista economico, e cioè quella positiva.

## A.3. Determinazione della soglia di separazione tra comportamenti super/subcritici

Tale soglia è ottenuta, come visto nel testo, come soluzione dell'equazione:

$$\Phi(n) = rn \quad \text{ossia: } \frac{H(n)}{n} - nU^* = rn \quad \text{ove: } H(n) = \rho[m - g^*(n)] \quad (1)$$

Otteniamo così l'equazione quadratica:

$$(r + U^*)n^2 + \rho U^*n - \rho(m - \alpha) = 0 \quad (2)$$

di soluzione:

$$n = \frac{1}{2(r + U^*)} \cdot \left[ -\rho U^* \pm \sqrt{(\rho U^*)^2 + 4\rho(r + U^*)(m - \alpha)} \right] \quad (3)$$

E' di nuovo facile verificare che la sola soluzione della (3) avente significato economico, e cioè il valore  $n_d$  del testo, è quella di segno positivo.