

Report n.108

**Crescita con ciclo, ritardi nei piani di
investimento ed effetti di popolazione**

Luciano Fanti e Piero Manfredi

Pisa, Giugno 1996

Crescita con ciclo, gestazione dei piani di investimento ed effetti di popolazione

Luciano Fanti, Dipartimento di Scienze Economiche, Università di Pisa
Piero Manfredi*, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia,
Università di Pisa

Keywords: ritardo di gestazione, effetto scoraggiamento, dipendenza da densità, biforcazione di Hopf

Abstract

Following a Goodwin's growth cycle model, this paper investigates the effects of a time-lag between planning of new investments and the moment they become productive, as argued, in other contexts, by either traditional macroeconomics (Kalecki) or the Real Business Cycle Theory (Kydland and Prescott).

Such effects are investigated in conjunction with those of the supply of labour, which is assumed to be endogenously determined according to a positive relation with employment, as stated by various labour market theories. While the effect of gestation alone is simply destabilizing, the joint effects of these two forces is able to generate a much richer dynamics, including limit cycles as well. We have also argued that such periodic orbits are, probably, stable when the gestation lag is sufficiently short, and the reaction of the labour supply to employment changes is, in its turn, not too large.

JEL Classification: E3, J0

*Autore cui inviare la corrispondenza

Present address: Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia,
Facoltà di Economia, Università di Pisa
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa

Tel. (050)549317-549215
Telefax (050)541437
email: manfredi@ec.unipi.it

Crescita con ciclo, gestazione dei piani di investimento ed effetti di popolazione

Keywords: ritardo di gestazione, effetto scoraggiamento, dipendenza da densità, biforcazione di Hopf

1. Introduzione

In questa sede analizzeremo, nell'ambito dello schema di Goodwin, l'effetto di ritardi nella catena profitti-investimenti, attraverso una semplice ipotesi di "ritardo di gestazione", ossia una sfasatura temporale tra decisione di investimento e installazione della nuova capacità produttiva. Tale assunzione¹ è ben nota nella teoria economica, ed infatti è stata impiegata tanto nei modelli macroeconomici tradizionali (ad esempio in Kalecki 1975) quanto nei più recenti modelli "microfondati". Per quanto concerne questi ultimi è utile ricordare che anche il modello caposcuola (Kydland e Prescott 1982) della teoria del "ciclo reale di equilibrio" ("Real business cycle theory"), possiede come caratteristica principale un ritardo di gestazione².

Come vedremo l'effetto del ritardo sullo schema di riferimento di Goodwin è, in linea con altri tentativi modellistici di questo tipo, "seccamente destabilizzante". Questa instabilità rende meno interessanti altre conseguenze "non autoevidenti" dell'introduzione del ritardo, tra cui la generazione di un guadagno netto a favore della classe capitalistica nella sfera distributiva. A tale scopo nel seguito del lavoro l'effetto del ritardo viene studiato congiuntamente con un naturale effetto di tipo stabilizzante, introducendo una semplice ipotesi di dipendenza dell'offerta di lavoro dal livello dell'occupazione, nel senso di Fanti e Manfredi (1996b) e Manfredi e Fanti (1996). Questo rende ovviamente le possibili dinamiche del modello molto più interessanti, perchè, oltre a recuperare la stabilità del modello per particolari

¹ Assumiamo che l'aggiustamento di breve periodo necessario a colmare il divario fra risparmio corrente (profitto) e investimento corrente avvenga in termini di variazioni delle scorte senza ulteriori effetti di variazioni delle quantità prodotte (il rapporto prodotto-capitale non varia ed il tasso di crescita della produzione è sempre determinato dal tasso d'investimento). Le eventuali variazioni di prezzi come risposta allo squilibrio invece non sono rilevanti qui in quanto il modello è espresso in termini reali, il che equivarrebbe a dire che i salari sarebbero perfettamente indicizzati ai prezzi: quindi, per esempio, se l'investimento corrente eccedesse il risparmio corrente, l'eventuale aumento dei prezzi non farebbe variare la distribuzione.

² Come rileva Checchi (1991), in tale modello la caratteristica principale è: "...la separazione temporale tra spesa per investimenti ed installazione della nuova capacità produttiva; questa formulazione risente dell'insoddisfazione rispetto agli approcci più tradizionali che considerano come contemporanea la decisione di risparmio ed investimento (alla Jorgenson) o l'investimento come derivato dai costi di aggiustamento dello stock di capitale: in entrambi i casi manca infatti un effetto di persistenza nel tempo che viene invece qui introdotto con i ritardi nella installazione del capitale produttivo".

combinazioni di valori dei parametri, apre la porta a comportamenti di tipo ciclico, attraverso il consueto meccanismo delle biforcazioni di Hopf.

Questo lavoro è organizzato come segue: nel secondo paragrafo dopo avere passato in rassegna le principali caratteristiche del modello, ormai classico, di Goodwin (1967), si provvede alla sua estensione per tenere conto della possibilità di ritardi di gestazione di tipo distribuito, pervenendo alla formulazione del modello (2.20) del testo (che per semplicità indicheremo come modello "P"). L'analisi di statica comparata del modello e la sua stabilità locale sono affrontate nel paragrafo 3, in cui è appunto dimostrato l'effetto destabilizzante del ritardo gestazionale. Il modello allargato per introdurre l'effetto di offerta di lavoro (modello "Pde") è analizzato nel paragrafo seguente (4), in cui sono presentati i risultati centrali del lavoro, e cioè il recupero della stabilità locale dell'equilibrio significativo e l'esistenza della biforcazione di Hopf, con in più la formulazione di una congettura notevole per quanto concerne la stabilità delle orbite periodiche che emergono dalla biforcazione stessa. Le conclusioni, con indicazione di possibili allargamenti di prospettiva, sono effettuate nell'ultimo paragrafo.

2. Profitti ritardati nel modello di Goodwin

L'ormai classico modello di Goodwin è definito da un sistema di due equazioni differenziali, la prima delle quali lega la dinamica delle quote distributive di lavoro (V) e capitale (1-V) ai loro livelli ed al tasso di occupazione (U), mentre la seconda lega la dinamica percentuale dell'occupazione a quella delle quote distributive. Definendo le seguenti relazioni tecniche fra produzione (Q) e input di lavoro (L) e capitale (K):

$$Q=aL \quad (2.1a)$$

$$Q=mK \quad (2.1b)$$

è possibile esprimere le due variabili quota salari (V) e tasso di occupazione (U) come, rispettivamente:

$$V=wL/Q=w/a \quad (2.2a)$$

$$U=L/N=Q/(aN) \quad (2.2b)$$

L'ipotesi classica secondo cui i capitalisti investono l'intero ammontare del profitto (non consumano) mentre i lavoratori consumano l'intero salario ricevuto (non risparmiano) combinata con la (2.1b) in cui m è costante, garantisce l'uguaglianza fra il tasso di crescita del prodotto e il tasso del profitto (P/K):

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = \frac{P}{K} \quad (2.3)$$

Se si moltiplicano entrambi i membri della (2.3) per il rapporto capitale-prodotto ($1/m$) possiamo ottenere la seguente relazione fra tasso di crescita della produzione e quote distributive:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} \frac{1}{m} = \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{m} = \frac{P}{K} \cdot \frac{K}{Q} = 1 - v \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{Q} = (1 - v)m \quad (2.4)$$

Assumendo poi che la produttività del lavoro e la popolazione (N : che può essere anche interpretata come l'offerta di lavoro) crescano a tasso costante nel tempo:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \alpha ; \quad \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = n \quad (2.5a,b)$$

e che la determinazione del salario si basi sulla versione lineare della nota relazione di Phillips, secondo la quale le variazioni relative dei salari dipendono linearmente dal livello del tasso di occupazione:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho U \quad (2.6)$$

si ottengono, definitivamente, le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N} \right) = m(1 - v) - (\alpha + n) = (m - \alpha - n) - mV \end{cases} \quad (2.7)$$

In particolare i coefficienti $A = \alpha + \gamma, B = \rho, C = m - \alpha - n, D = m$ sono tradizionalmente assunti tutti positivi (e costanti) e soddisfacenti l'ulteriore richiesta:

$$\rho > \alpha + \gamma \quad (2.8)$$

che garantisce che l'unico equilibrio non nullo del modello, di coordinate:

$$(U^*, V^*) = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\rho}, \frac{m - \alpha - n}{m} \right) \quad (2.9)$$

sia anche significativo dal punto di vista economico (si osservi come la (2.8) implichi a maggiore ragione $\rho > \gamma$, condizione che assicura la non banalità del meccanismo basato sulla formulazione "lineare" (2.6) della curva di Phillips). Come noto il sistema (2.7) è, sotto tali ipotesi, un classico modello preda-predatore alla Lotka-Volterra (LV) caratterizzato dalle ben note oscillazioni conservative, avente in

particolare, in virtù della definizione delle due variabili U,V dinamica confinata nell'insieme ammissibile $T=[0,1] \times [0,1]$.

Ci occuperemo qui di modellare all'interno del modello di Goodwin (indicheremo semplicemente con "G" d'ora in poi) un ritardo nella trasformazione dei profitti in investimenti produttivi; all'interno del modello di crescita ciclica ciò ha l'effetto di rendere il tasso di crescita del prodotto dipendente non solo dalla quota distributiva dei profitti corrente ma anche da quella passata.

Se l'investimento corrente è uguale ai profitti risparmiati nel periodo precedente avremo per definizione:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{P_{t-1}}{K_t} \quad (2.10)$$

Ora, grazie alla assunzione sul rapporto capitale-prodotto abbiamo:³

$$\frac{P_{t-1}}{K_t} = \frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}} \cdot \frac{Q_{t-1}}{K_t} = (1 - V_{t-1}) \cdot \frac{Q_{t-1}}{K_t} = (1 - V_{t-1}) \cdot \frac{Q_{t-1}}{K_{t-1}} \cdot \frac{K_{t-1}}{K_t} = (1 - V_{t-1}) \cdot m \cdot \frac{K_{t-1}}{K_t} \quad (2.11)$$

mentre, introducendo (2.10) nella relazione tra capitale ed investimento, si ha:

$$\frac{K_{t-1}}{K_t} = \frac{K_t - I_t}{K_t} = 1 - \frac{P_{t-1}}{K_t} \quad (2.12)$$

Quindi, combinando (2.12) e (2.11) resta, in definitiva:

$$\frac{P_{t-1}}{K_t} = m(1 - V_{t-1}) \left(1 - \frac{P_{t-1}}{K_t}\right) \quad (2.13)$$

Poichè il tasso di crescita del prodotto è uguale al tasso d'investimento dell'economia otteniamo la seguente notevole definizione per il tasso di crescita del PIL:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{I}{K} = \frac{P_{t-1}}{K_t} \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{Q} = m(1 - V_{t-1}) \left(1 - \frac{\dot{Q}}{Q}\right) \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{m(1 - V_{t-1})}{1 + m(1 - V_{t-1})} \quad (2.14)$$

che, ricordando la fondamentale identità dinamica:

$$\frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{N}}{N} \right)$$

modifica la tradizionale formulazione di Goodwin nel seguente sistema di equazioni differenziali alle differenze:

³Il valore ritardato della quota profitti è $(1-V)_{t-1}$, quantità che, d'ora in poi, annoteremo semplicemente con $(1-V_{t-1})$.

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{m(1 - V_{t-1})}{1 + m(1 - V_{t-1})} - (\alpha + n) \end{cases} \quad (2.15)$$

che lega, come era atteso, la dinamica dell'occupazione alla distribuzione dei redditi "passata". La (2.15) costituisce una forte motivazione per l'introduzione, diretta ad un maggiore realismo di descrizione, di ritardi di forma anche più generale. Rimuovendo esplicitamente l'assunzione di ritardo puntuale a favore di una più generale assunzione di ritardo distribuito, sembra ragionevole la seguente formulazione integro-differenziale:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{mS(t)}{1 + mS(t)} - (\alpha + n) \end{cases} \quad (2.16)$$

ove:

$$S(t) = \int_{-\infty}^t (1 - V(\tau))R(t - \tau)d\tau \quad (2.17)$$

La funzione R che appare nella (2.17) è la cosiddetta funzione peso del ritardo e la sua forma diventa decisiva per la stabilità o meno del sistema (2.16). Scegliendo, come è tipico, un ritardo di tipo esponenziale⁴:

$$R(s) = ae^{-as}, a > 0 \quad (2.18)$$

da cui:

$$\int_{-\infty}^t (1 - V(\tau))R(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t ae^{-a(t-\tau)}(1 - V(\tau))d\tau \quad (2.19)$$

il sistema integro-differenziale (2.16) può essere ricondotto, grazie al cosiddetto "linear-trick" (Mc Donald 1978) al seguente sistema (del terzo ordine) di equazioni differenziali ordinarie, contenente $S(t)$ come ulteriore variabile dinamica:

$$\begin{cases} \frac{\dot{S}}{S} = a\left(\frac{1 - V}{S} - 1\right) \\ \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{mS - (\alpha + n)(1 + mS)}{1 + mS} \end{cases} \quad (2.20)$$

⁴Tale forma è compatibile con l'idea che la maggior parte degli investimenti necessita di tempo di gestazione contenuto, ma anche che vi è una parte degli investimenti (cantieri navali, industria pesante, ricerca e sviluppo) che può richiedere tempi molto lunghi.

Il sistema (2.20) costituisce l'oggetto dell'analisi del prossimo paragrafo.

3. Equilibri: statica comparata e stabilità locale; "effetto gestazione"

Il sistema (2.20) possiede, oltre all'equilibrio nullo (E0), un equilibrio positivo (E1) di coordinate:

$$(U^*, V^*, S^*) = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\rho}, 1 - \frac{n + \alpha}{m(1 - \alpha - n)}, 1 - V^* \right) \quad (3.1)$$

(come si può facilmente verificare tra l'altro l'estensione integro-differenziale preserva gli equilibri della formulazione mista differenziale alle differenze (2.15)). In particolare conviene porre $\alpha + n = g$ (quantità che tra l'altro costituisce esattamente il tasso medio di crescita di lungo periodo del PIL nel modello di Goodwin), annotando così:

$$V^* = 1 - \frac{g}{m(1 - g)} \quad (3.2)$$

Come si verifica immediatamente, la condizione banale $g < 1$ ⁵ (ricordiamo che g è per definizione positivo) è necessaria per un equilibrio economicamente significativo (ossia interno alla regione ammissibile $T = [0, 1] \times [0, 1]$). In particolare, supposto $g < 1$, la quota salari di equilibrio risulterà significativa fintantoché:

$$m > g / (1 - g) > 0 \quad (3.3)$$

che è quindi condizione sul rapporto prodotto-capitale più restrittiva di quella corrispondente ($m > g$) del modello di Goodwin (permangono ovviamente poi le condizioni ereditate dal modello LVG). Nelle illustrazioni numeriche adottate in precedenti lavori degli autori ($\alpha = n = 0.03$) si avrebbe: $m > 0.07$ (approssimativamente).

Comparando lo stato stazionario (3.1) con quello corrispondente del modello di Goodwin, rileviamo subito che il valore d'equilibrio del tasso d'occupazione rimane il medesimo, un fatto atteso visto che l'equilibrio dell'occupazione è determinato, nel modello di Goodwin dall'equazione della quota salari, che non è mutata. Viceversa è cambiata la quota salari d'equilibrio, che è minore nel modello (2.20); infatti (i suffissi G e P, ricordiamo stanno ad indicare i due differenti modelli: Goodwin e la sua estensione con ritardo di gestazione):

⁵E' empiricamente osservato che g difficilmente può eccedere soglie dell'ordine del 10-12% annuo.

$$V_G^* - V_P^* = 1 - \frac{g}{m} - \left[1 - \frac{g}{m(1-g)} \right] = \frac{g}{m} \left[\frac{1}{1-g} - 1 \right] > 0 \quad (3.4)$$

Tutte le altre grandezze “statiche” fondamentali del modello (2.20) sono uguali a quelle corrispondenti nel modello di Goodwin, in particolare il tasso di crescita di lungo periodo del prodotto che risulta sempre pari a g , come si può verificare immediatamente dalla richiesta di stazionarietà del tasso di occupazione, oppure applicando la definizione contenuta nella (2.16):

$$\left(\frac{\dot{Q}}{Q} \right)_P^* = \frac{mS^*}{1+mS^*} = \frac{m \frac{g}{m(1-g)}}{1+m \frac{g}{m(1-g)}} = g \quad (3.4')$$

Il seguente prospetto riporta i valori di stazionarietà di alcune variabili fondamentali del modello P.

Tasso di occupazione	Quota salari	Tasso di crescita del PIL	Tasso di crescita del salario	Tasso di crescita di K/L	Tasso di crescita del lavoro (L)
$\frac{\gamma + \alpha}{\rho}$	$1 - \frac{g}{m(1-g)}$	$n + \alpha$	α	α	n

Come detto sopra l'unica differenza comparativa con il modello di Goodwin risiede nella quota salari di equilibrio. Questo è un fatto invero notevole: il ritardo nella gestazione dei piani di investimento ha quale unico effetto (come vedremo tutte le altre grandezze “statiche” fondamentali sono uguali a quelle corrispondenti nel modello di Goodwin) un guadagno “secco” a favore del capitale nella sfera distributiva senza che, si badi bene, questo abbia effetti benefici sull'accumulazione e crescita di lungo periodo (e infatti il tasso di crescita è il medesimo). Di questo fatto è possibile rintracciare una interessante giustificazione economica, legata alle peculiarità del modello di Goodwin, in particolare alla relazione di Phillips regolante il mercato del lavoro.

A tale scopo si confrontino le tre formulazioni per il tasso di crescita del prodotto, e cioè quella tipica del modello di Goodwin e quelle tipiche delle nostre formulazioni ritardate⁶:

⁶Si noti: il fatto che le formulazioni IDE e DDE possiedano comunque i medesimi stati di equilibrio, indipendentemente dalla dinamica, sembra rendere sostanzialmente indifferente il ricorso all'una od all'altra per considerazioni di tipo statico.

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Q}}{Q} &= m(1-V) \quad (\text{"Goodwin"}) \\ \frac{\dot{Q}}{Q} &= \frac{m(1-V_{t-1})}{1+m(1-V_{t-1})} \quad (\text{modello alle DDE}) \quad (3.5a,b,c) \\ \frac{\dot{Q}}{Q} &= \frac{mS(t)}{1+mS(t)} \quad (\text{modello IDE})\end{aligned}$$

Operiamo per comodità su (3.5a) e (3.5b). Se costringessimo entrambi i modelli a partire dalle medesime condizioni iniziali e con identici valori dei parametri economici fondamentali, è chiaro che il ritardo di gestazione dell'investimento, e quindi dell'attività produttiva, del modello P, lo costringerebbe a partire con un periodo "secco" di ritardo rispetto a Goodwin. Tenendo conto della sfasatura temporale, il modello P sperimenterebbe una dinamica più rallentata della produzione, come si vede dalle relazioni⁷:

$$g_{t=1}^P = \left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)_{t=1}^P = \frac{m(1-V_0)}{1+m(1-V_0)} \leq m(1-V_0) = \left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)_{t=0}^G \quad (3.6)$$

Questo svantaggio nella crescita, completamente indotto dal ritardo, tende a riflettersi, in virtù delle peculiari assunzioni del modello di Goodwin, essenzialmente nella sfera dell'occupazione. Alla (3.6) seguirebbe la:

$$\left(\frac{\dot{U}}{U}\right)_{t=1}^P = \left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)_{t=1}^P - (\alpha+n) \leq \left(\frac{\dot{Q}}{Q}\right)_{t=0}^G - (\alpha+n) = \left(\frac{\dot{U}}{U}\right)_{t=0}^G \quad (3.7)$$

(si noti che queste equazioni varrebbero per ogni t se i due pattern dinamici si trovassero, alla data precedente, nelle medesime condizioni). Usando un criterio di confronto di velocità possiamo rilevare che il ritardo di gestazione dell'investimento tende a mettere in moto delle forze che sfavoriscono "dinamicamente" l'occupazione, la quale tenderà ad essere quindi mediamente minore nel lungo periodo nel modello P rispetto al modello di Goodwin, inibendo la capacità dell'occupazione nel sostenere la quota salari attraverso il meccanismo di Phillips, e quindi riducendo nel complesso la forza "di lungo periodo" della classe operaia sul fronte della distribuzione. La classe imprenditrice, e l'economia nel suo complesso, non riesce però a sfruttare questo guadagno a favore del profitto in termini di crescita di lungo periodo.

Vogliamo analizzare adesso il ruolo ricoperto dal ritardo nella relazione fra risparmio e investimento sulla stabilità locale del sistema (2.20). La linearizzazione

⁷Per rendere omogeneo il confronto tra i due processi, che sono temporalmente sfasati l'uno rispetto all'altro, è chiaramente necessario omogeneizzarli: questa è una possibile strada.

del sistema (2.20) nel suo punto di equilibrio nonnullo conduce al seguente jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} -a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \rho V^* \\ m(1-\alpha-n)^2 U^* & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \rho V^* \\ m(1-g)^2 U^* & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

L'ispezione dei coefficienti della corrispondente equazione caratteristica ci consente di accertare che il sistema P è sempre localmente instabile nel suo punto di equilibrio non nullo $E1=(U^*,S^*,V^*)$ come enunciato nella seguente:

Proposizione 1: L'introduzione dell'ipotesi che l'investimento corrente a causa del tempo di gestazione è uguale al profitto ritardato, e che il ritardo assuma la forma esponenziale distribuita, rende instabile il sistema di crescita ciclica à la Goodwin.

Dimostrazione: l'equazione caratteristica ha forma:

$$P(k) = k^3 + ak^2 + amV^*(\alpha + \gamma)(1-g)^2 = k^3 + ak^2 + am\rho U^*V^*(1-g)^2 = 0$$

Definiamo i coefficienti del polinomio come:

$$a_0 = 1 ; a_1 = a ; a_2 = 0 ; a_3 = am\rho V^*U^*(1-g)^2$$

La semplice ispezione del polinomio ci dice che, in base ai segni dei suoi coefficienti, sono escluse radici reali positive, e, poichè $a_3 > 0$, sono anche escluse radici reali nulle. Infine, un'applicazione immediata del teorema di Routh-Hurwicz (che, lo ricordiamo assegna una condizione necessaria e sufficiente perchè le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa) porge le seguenti richieste, necessarie e sufficienti per la stabilità locale:

$$a_1 > 0 ; a_3 > 0 ; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Le prime due disequazioni valgono sempre, mentre viceversa, come è evidente, la terza non può mai essere soddisfatta in situazioni economicamente significative. Ne concludiamo che l'equilibrio significativo del sistema P è sempre (cioè: per qualunque combinazione significativa di valori dei parametri) localmente instabile (LAS).

Questo risultato di instabilità locale, per quanto potesse essere effettivamente atteso⁸, è fastidioso perchè rende chiaramente molto meno interessante tutta la nostra interpretazione sul ruolo dei ritardi di gestazione a favore del capitale nella sfera distributiva. Al fine di recuperare il nostro risultato sembra quindi ragionevole considerare delle formulazioni che attraverso per esempio meccanismi di tipo "dipendenze da densità" recuperino il requisito della stabilità del modello, rendono quindi interessante lo studio di eventuali processi di biforcazione.

4. Effetti di scoraggiamento e ritardi di gestazione

Un candidato molto naturale allo scopo è costituito, per esempio, da una modellizzazione della dinamica demografica e dell'offerta di lavoro basata sulla nozione di effetto scoraggiamento (DE), che come mostrato in Manfredi e Fanti (1996), introduceva un debole effetto di dipendenza da densità nell'equazione dell'occupazione, che però era sufficiente a generare un effetto stabilizzante sul ciclo di Goodwin⁹. Assumendo la definizione per l'effetto scoraggiamento utilizzata in Manfredi-Fanti 1996, in cui, semplicemente $n(t)=nU$, il modello (2.20) assume la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{S}}{S} &= a\left(\frac{1-V}{S} - 1\right) \\ \frac{\dot{V}}{V} &= -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} &= \frac{mS - (\alpha + nU)(1 + mS)}{1 + mS}\end{aligned}\quad (4.1)$$

in cui la giustificazione del termine nU , che ora rappresenta specificamente l'offerta di lavoro, può essere di varia natura, ma fondamentalmente deriva da due ipotesi giustificatrici: i) la fertilità è più alta nei periodi di occupazione che nei periodi di disoccupazione; ii) è operante quello che la letteratura sul mercato del lavoro chiama effetto "scoraggiamento", in base al quale la partecipazione è direttamente correlata al tasso di occupazione.¹⁰

⁸Almeno nell'ambito dei modelli alla Volterra, che comunque ricordiamo, sono strutturalmente instabili, questo è un risultato invero frequente.

⁹Vi sono altre strade possibili per ottenere effetti simili. Una di queste è quella basata sulla nozione di salario di efficienza (Fanti e Manfredi 1995), che però introduce effetti più ricchi e complessi e sarà quindi oggetto di esplorazione in un lavoro separato (Fanti e Manfredi, 1996a).

¹⁰Possono essere date altre giustificazione del termine nU (che ora rappresenta specificamente il tasso percentuale di crescita dell'offerta di lavoro), per esempio introducendo esplicitamente l'offerta di lavoro come prodotto di un tasso di attività per la popolazione totale. Una giustificazione euristica alternativa è la seguente: anche in regime di crescita stabile della popolazione al tasso n non è necessariamente detto che tutta la "nuova" popolazione presente si offra sul mercato del lavoro; anzi se l'occupazione è particolarmente bassa vi possono essere forti effetti di tipo disincentivo, che fanno sì che solo una quota $q(U)$ di n si offra effettivamente. Nella

Il sistema (4.1) possiede l'equilibrio nullo (E_0). Possiede poi l'equilibrio positivo E_1 di coordinate:

$$\begin{cases} U^* = \frac{\alpha + \gamma}{\rho} \\ S^* = \frac{1}{m} \left[\frac{(\alpha + nU^*)}{(1 - (\alpha + nU^*))} \right] \\ V^* = 1 - S^* = 1 - \frac{\gamma n + \alpha(n + \rho)}{m[\rho(1 - \alpha) - n(\alpha + \gamma)]} \end{cases} \quad (4.2)$$

e possiede anche, come era naturale attendersi, un'equilibrio d'asse (E_2) a quota salari nulla (causato dalla presenza del termine nU), di coordinate:

$$U^* = \frac{m(1 - \alpha) - \alpha}{1 + m} ; S^* = 1 ; V^* = 0 \quad (4.3)$$

Rimandiamo la discussione sulle condizioni relative all comparsa/scomparsa dei due equilibri E_1 ed E_2 ed al ruolo dell'equilibrio E_2 ad altra sede; qui ci concentreremo essenzialmente delle proprietà dell'equilibrio "importante" E_1 . Annotiamo subito che, come era ovvio, l'introduzione dell'effetto scoraggiamento non ha effetti sul livello di equilibrio dell'occupazione. Per quanto concerne la quota salari di equilibrio ci attendiamo, avendo l'effetto scoraggiamento un effetto di direzione opposta a quello del ritardo di gestazione, almeno un parziale effetto di compensazione. Questo effetto è facilmente intuibile (Manfredi e Fanti 1996) per il fatto che non tutto il "potenziale aggressivo" della crescita della popolazione sull'occupazione è in grado di dispiegarsi: ciò consente all'occupazione di sostenere in maniera più "solida" la battaglia della quota salari sul mercato del lavoro.

Come si verifica immediatamente il modello (4.1) possiede il medesimo tasso di crescita di equilibrio di lungo periodo del modello DE (Manfredi e Fanti 1996). Se viene mantenuta l'interpretazione della nota 9, per cui n rappresenti nel nostro modello lo stesso tasso di crescita esogeno della popolazione in Goodwin, allora vale la :

$$g^* = \alpha + nU^* < g = \left(\frac{\dot{Q}}{Q} \right)_E^G \quad (4.4)$$

(inferiore, come annotato, al tasso di crescita medio del modello di Goodwin) che ci consente di annotare per V^* :

formulazione qui seguita è stata utilizzata proprio l'occupazione effettiva quale corretto fattore di proporzionalità. Infine, la presente formulazione può essere resa compatibile con un ulteriore, alternativa, assunzione, e cioè l'esistenza di comportamenti demografici differenziali tra occupati e non. Per la discussione di queste ed altre assunzioni si faccia sempre riferimento a Manfredi e Fanti (1996).

$$V^* = 1 - \frac{1}{m} \left[\frac{(\alpha + nU^*)}{(1 - (\alpha + nU^*))} \right] = 1 - \frac{g^*}{m(1-g^*)} \quad (4.5)$$

In particolare, la condizione (banale dal punto di vista conomico) $g^* < 1$ (certamente soddisfatta se $g < 1$) è necessaria per un equilibrio economicamente significativo; supposto $g^* < 1$, la quota salari di equilibrio risulterà significativa fintantoché:

$$m > g^*/(1-g^*) > 0 \quad (4.6)$$

che è quindi condizione meno restrittiva di quella corrispondente (3.3) apparsa per il modello "P".¹¹

Comparando lo stato stazionario della quota (4.2) con il valore corrispondente nel modello "P", otteniamo (il suffisso Pde indica il modello (4.1)):

$$V_{Pde}^* - V_P^* = 1 - \frac{g^*}{m(1-g^*)} - \left[1 - \frac{g}{m(1-g)} \right] = \frac{1}{m} \left[\frac{g}{1-g} - \frac{g^*}{1-g^*} \right] > 0 \quad (4.7)$$

che ovviamente conferma la congettura di cui sopra: l'effetto scoraggiamento riesce a compensare, almeno parzialmente, la caduta nella quota salari dovuta all'effetto di gestazione. Dal confronto con il corrispondente valore nel modello di Goodwin:

$$V_{Pde}^* - V_G^* = 1 - \frac{g^*}{m(1-g^*)} - \left[1 - \frac{g}{m} \right] = \frac{1}{m} \left[g - \frac{g^*}{1-g^*} \right] = \frac{(g-g^*) - g \cdot g^*}{1-g^*} \quad (4.8)$$

il cui segno è incerto. Se però assumiamo, come sopra, che $g > g^*$, essendo il prodotto gg^* effettivamente trascurabile, allora è lecito attendersi che la quota salari sia superiore a quella di Goodwin, nonostante l'effetto riduttivo operato dal ritardo di gestazione.

E' utile, per completezza, controllare l'impatto relativo delle variabili del modello sulla quota salari di lungo periodo attraverso i vari modelli finora considerati; dalla tabella 1 si ricavano le seguenti osservazioni: 1) ciascuna componente del trend esogeno dell'economia riduce dell'uguale ammontare la quota salari in entrambi i modelli *G* e *P*, e la riduzione aumenta con il rapporto capitale-prodotto; nel modello *P* la riduzione è sempre maggiore, e tale differenza dipende in modo crescente dal trend esogeno; 2) in entrambi i modelli un più alto rapporto capitale-prodotto fa diminuire la quota salari, ma nel modello *P* la riduzione è superiore; inoltre in entrambi i modelli l'effetto dipende positivamente dal trend

¹¹ Per fare un esempio numerico 'standard' ($\gamma=1, \rho=2, \alpha=.03, n=.03$) si richiede che tale rapporto ecceda 0.079 che è appena un po' più stringente di quanto sarebbe stato richiesto nel modello di Goodwin, cioè $m > .06$.

esogeno, che nel nostro modello ha quindi un effetto positivo ancora maggiore sulla relazione fra quota salari e rapporto capitale-prodotto.

Quindi nel modello con il solo ritardo di gestazione, il progresso tecnico, la crescita della popolazione e una maggiore 'capitalizzazione' operano tutti nella direzioni di ridurre la quota salari di equilibrio ad un tasso maggiore che nel modello di Goodwin. Nel modello con l'aggiunta dell'ipotesi del lavoratore 'scoraggiato', invece, la riduzione dipende anche dagli elementi del mercato del lavoro e sarà superiore rispetto al precedente modello quanto più elevato è ρ e più piccolo è γ . Mentre comparando sia rispetto al modello precedente che a quello di Goodwin, la riduzione operata da un identico aumento del rapporto capitale prodotto è sempre minore¹².

Nel modello *Pde* la riduzione dovuta ai tassi di crescita esogeni dipende dal valore di ρ ; esiste un valore di ρ , diciamo vicino all'unità, al di sopra del quale la riduzione è maggiore e al di sotto del quale è minore. Cioè, anche a parità di tasso di occupazione di equilibrio, ossia a parità del rapporto γ/ρ , è il valore assoluto¹³ di ρ che conta maggiormente: se vi è capacità di profittare delle fasi di miglioramento occupazionale, la quota salari di equilibrio viene mantenuta meglio anche di fronte a crescite di produttività.

¹²Infatti, dalla semplice ispezione si rileva che la differenza in dV^*/dm fra il modello P e il Pde è sempre positiva in quanto per esserlo richiede che $\rho > (\alpha + \gamma)$, ovvero che $U^* < 1$.

¹³A parità del rapporto γ/ρ , ovvero a parità del tasso di occupazione che equilibra il mercato del lavoro, più elevati valori assoluti dei parametri significano più 'accelerate' dinamiche salariali: significano cioè maggiore incapacità dei salariati nel resistere a situazioni di debolezza occupazionale tanto quanto maggiore capacità di profittare delle situazioni di forza occupazionale

Tabella 1 - Variazione della quota salari di lungo periodo rispetto alle variabili del modello

	G	P	Pde
Quota salari di equilibrio	$1 - \frac{\alpha + n}{m}$	$1 - \frac{\alpha + n}{m(1 - (\alpha + n))}$	$1 - \frac{i}{m} \frac{\alpha + n(1 - b)}{(1 - b)(1 - n) - \alpha}$
$\frac{\partial V^*}{\partial \alpha}$	$-1/m$	$-\frac{1}{[m(1 - (\alpha + n))]^2}$	$\frac{-\rho(n + \rho)}{m[\alpha(n + \rho) + \gamma n - \rho]^2}$
$\frac{\partial V^*}{\partial n}$	$-1/m$	$-\frac{1}{[m(1 - (\alpha + n))]^2}$	$\frac{-\rho(\alpha + \gamma)}{m[\alpha(n + \rho) + \gamma n - \rho]^2}$
$\frac{\partial V^*}{\partial m}$	$\frac{(\alpha + n)/m}{2}$	$\frac{\alpha + n}{m^2(1 - (\alpha + n))}$	$\frac{-[\alpha(n + \rho) + \gamma n]}{m^2[\alpha(n + \rho) + \gamma n - \rho]}$
$\frac{\partial V^*}{\partial \gamma}$		-	$\frac{-\rho n}{m[\alpha(n + \rho) + \gamma n - \rho]^2}$
$\frac{\partial V^*}{\partial \rho}$			$\frac{n(\alpha + \gamma)}{m[\alpha(n + \rho) + \gamma n - \rho]^2}$

Come prima accennato l'aspetto più interessante legato all'introduzione di un termine ad effetti genericamente stabilizzanti sul ciclo di Goodwin, come per esempio l'effetto scoraggiamento sull'offerta di lavoro, è ovviamente legato alla possibilità di rigenerare la stabilità locale del modello, perché ciò ne rende più interessanti le interpretazioni economiche e soprattutto apre la porta a possibili comportamenti di tipo ciclico. La questione è non banale dato che in effetti il nostro effetto sull'offerta di lavoro è un effetto tutto sommato debole: sufficiente a stabilizzare il ciclo di Goodwin- causa la sua cronica instabilità strutturale, ma non necessariamente sufficiente a stabilizzare il modello *P*. Come ora mostreremo anche il "debole" effetto di offerta di lavoro può raggiungere lo scopo. Il principale risultato è riassunto nella seguente proposizione:

Proposizione 2: L'introduzione dell'ipotesi che l'investimento corrente a causa del tempo di gestazione sia uguale al profitto ritardato, e che il ritardo assuma la forma esponenziale distribuita in un sistema di crescita ciclica à la Goodwin con la crescita della popolazione influenzata linearmente dal tasso d'occupazione implica l'esistenza di orbite chiuse.

Dimostrazione: annotato il sistema (4.1) nella forma:

$$\begin{cases} \dot{S}=b(S,V) & \text{ove: } b(S,V)=a[(1-V)-S] \\ \dot{V}=V \cdot f(U) & \text{ove: } f(U)=-(\alpha+\gamma)+\rho U \\ \dot{U}=U \cdot g(U,S) & \text{ove: } g(U,S)=\frac{mS}{1+mS}-(\alpha+nU)=g_1(s)+g_2(U) \end{cases}$$

la consueta procedura di linearizzazione conduce, in corrispondenza del punto di equilibrio significativo E1, alla seguente matrice jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} -a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \rho V^* \\ m\left(\frac{\rho(1-\alpha)-n(\alpha+\gamma)}{\rho}\right)^2 U^* & 0 & -nU^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \rho V^* \\ m(1-g^*)^2 U^* & 0 & -nU^* \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

con equazione caratteristica:

$$k^3 + (a+nU^*)k^2 + (anU^*)k + am\rho U^* V^* (1-g^*)^2 = 0 \quad (4.11)$$

Definiamo nuovamente i coefficienti del polinomio caratteristico come:

$$a_0 = 1 ; \quad a_1 = a+nU^* ; \quad a_2 = anU^* ; \quad a_3 = am\rho U^* V^* (1-g^*)^2$$

Di nuovo la regola di Cartesio esclude radici reali positive o nulle (queste ultime grazie al fatto che $a_3 > 0$). Applicando sempre il teorema di Routh-Hurwitz, abbiamo che delle disequaglianze:

$$a_1 > 0 ; \quad a_3 > 0 ; \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

le prime due sono sempre verificate, mentre la terza disequazione richiede che:

$$(a+nU^*)anU^* - am\rho U^* V^* (1-g^*)^2 > 0 \quad \rightarrow \quad (a+nU^*)n - m\rho V^* (1-g^*)^2 > 0 \quad (4.12)$$

Semplici manipolazioni del primo membro della (4.12) porgono:

$$\begin{aligned} (a+nU^*)n - m\rho \frac{m(1-g^*)-g^*}{m(1-g^*)} (1-g^*)^2 &= (a+nU^*)n - \rho(1-g^*)[m(1-g^*)-g^*] = \\ &= (a+nU^*)n - H(n) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ove:

$$H(n) = \rho(1 - g^*(n)) [m(1 - g^*(n)) - g^*(n)] \quad (4.14)$$

che è una forma particolarmente conveniente (abbiamo in particolare sottolineato la dipendenza di g^* da n). Come si può verificare facilmente (ricordando la relazione tra g^* ed n), la funzione $H(n)$ che appare nell'espressione (4.13) è, nell'insieme dei valori "ammissibili" di n , che è ovviamente della forma $0 < n < n_0$ ¹⁴, funzione positiva e decrescente di n stesso. Ciò implica che, rispetto ai parametri di interesse primario in questa sede, a ed n , potremo avere stabilità locale del modello (4.1) se:

a) il coefficiente a della funzione peso del ritardo è "grande", ossia se il ritardo medio $T = 1/a$ è piccolo.

b) n è "grande", rendendo così più intenso l'effetto di dipendenza da densità generato dall'effetto scoraggiamento sull'offerta di lavoro.

In altre parole la stabilità locale, che nel modello (2.20) veniva meno causa l'effetto "seccamente" destabilizzante del ritardo nella catena profitti-investimenti, può essere recuperata quando l'effetto del ritardo è contenuto e bilanciato da un effetto (stabilizzante) sull'offerta di lavoro sufficientemente importante. Tutto ciò appare particolarmente coerente con quanto trovato in Manfredi e Fanti (1996).

5. Comparsa di dinamiche di tipo periodico

Alla luce di quanto detto nel paragrafo precedente è chiaro che, allentando i due vincoli sopra indicati, potranno verificarsi, al dilatarsi del ritardo (cioè al diminuire di a) e/o al decrescere dell'effetto stabilizzante dovuto all'effetto scoraggiamento (cioè al decrescere di n) perdite locali di stabilità, con eventuale apparizione di dinamiche tipo periodico attraverso il consueto meccanismo delle biforcazioni di Hopf. Per precisare le condizioni sotto cui questo può verificarsi, conviene trascrivere la disuguaglianza fondamentale (4.13) di Routh-Hurwicz come:

$$a > \frac{H(n)}{n} - nU^* = \Phi(n) \quad (5.1)$$

¹⁴Tale insieme è ottenibile riesplicitando in termini di n le richieste di significatività economica del livello di equilibrio della quota salari:

$$a) g^* < 1 \rightarrow \alpha + nU^* < 1 \rightarrow n < \frac{1 - \alpha}{U^*} = S_0$$

$$b) m > \frac{g^*}{1 - g^*} \rightarrow g^* < \frac{m}{1 + m} \rightarrow \alpha + nU^* < \frac{m}{1 + m} \rightarrow n < \frac{1}{U^*} \left[\frac{m}{1 + m} - \alpha \right] = S_1$$

con $S_1 < S_0$, così che $n_0 = S_1$. In termini degli esempi numerici utilizzati in precedenti lavori degli stessi autori ($m=0.5$ oppure $m=0.33$, $\alpha=0.03$, $\rho=2, \gamma=1$) la soglia S_1 porge rispettivamente i valori di circa 0.58 e di 0.43.

La (4.1) va ovviamente considerata sul solo insieme $(0, n_0)$ dei valori ammissibili di n . Possiamo annotare:

a) se il secondo membro della (4.1) è negativo allora la (4.1) stessa è sempre verificata in modo automatico in virtù della natura del parametro a , e quindi non potranno mai verificarsi perdite di stabilità.

b) se il secondo membro della (4.1) è positivo allora la (4.1) stessa diventa non banale e sarà soddisfatta per valori del parametro a giacenti al disopra della curva $\Phi(n)$. In particolare, come noto, lungo i punti della linea:

$$a = \Phi(n) \quad (5.2)$$

in cui le radici complesse dell'equazione caratteristica attraversano, al decrescere del parametro a , l'asse immaginario, il sistema (2.15) sperimenterà una biforcazione di Hopf¹⁵.

Come si può facilmente verificare:

$$\text{a) } \Phi(0) = +\infty \quad \text{b) } \Phi(n_0) = \frac{H(n_0)}{n_0} - U^* n_0 = -U^* n_0 < 0$$

$$\text{c) } \Phi'(n) = \frac{H'(n)n - H(n)}{n^2} - U^* < 0 \text{ sempre, in quanto: } H < 0, H' < 0$$

Esiste quindi certamente un valore $n_1 < n_0$, in corrispondenza del quale la curva $\Phi(n)$ cambia segno. Possiamo così tracciare il grafico della curva $\Phi(n)$, che è del tipo rappresentato in fig. 1.

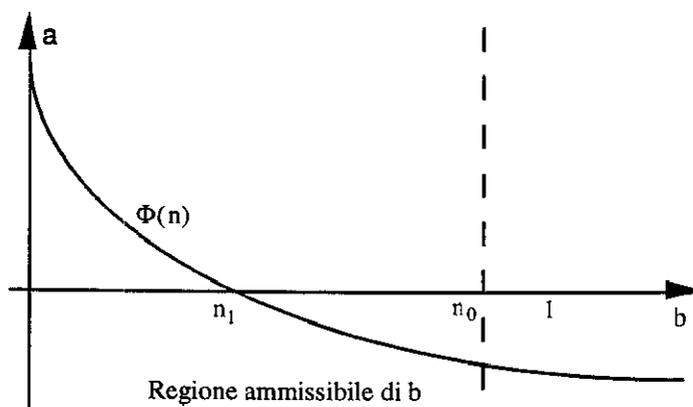


Fig. 1. Forma della curva $\Phi(\cdot)$ al variare del suo parametro n

¹⁵Per le varie formulazioni del teorema di Hopf, numerosi sono i testi classici: noi rimandiamo a Guckenheimer e Holmes 1984.

La struttura dei comportamenti di biforcazione dell'equilibrio E_1 del nostro modello, descritta attraverso le (5.1) e (5.2) e sintetizzata nella fig. 1, è in realtà tipico di una vasta classe di problemi (Farkas 1995; Fanti e Manfredi 1996b). Il risultato fondamentale, per quanto riguarda l'effetto sulla dinamica del sistema (4.1) dei due parametri fondamentali nel presente lavoro, e cioè i coefficienti a ed n (rappresentanti rispettivamente il reciproco del ritardo medio $T=1/a$ implicito nella funzione peso utilizzata e la crescita dell'offerta di lavoro in presenza dell'effetto scoraggiamento) è sintetizzato nella seguente:

Proposizione 3: sull'insieme dei valori ammissibili di n : $n < n_0$, il punto di equilibrio significativo E_1 del sistema (4.1) è sempre stabile finché $n_1 < n < n_0$. Viceversa, per $0 < n < n_1$ il sistema, che è localmente stabile al di sopra della linea di equazione $a = \Phi(n)$ intraprende, al decrescere del parametro a , una biforcazione di Hopf¹⁶, con conseguente comparsa di dinamiche (locali) di tipo ciclico¹⁷.

Rimandiamo ad altra sede l'analisi in dettaglio della stabilità dei cicli limite della proposizione precedente. Seguendo però sempre Farkas (1995) e Fanti-Manfredi (1996b) ci sembra naturale formulare la seguente congettura¹⁸ (ben motivata alla luce delle similarità qualitative, almeno locali, del sistema in esame, con altri modelli aventi proprietà note, e che sarà oggetto di nostro futuro lavoro), e cioè che, come rappresentato nella fig. 2, esista una soglia critica di valori di n , indicata con n_d , $0 < n_d < n_1$, che partiziona la regione $(0, n_1)$ nelle due regioni di "supercriticità" e "subcriticità" delle orbite periodiche. Ossia: se l'attraversamento della curva $a = \Phi(n)$ avviene nella regione $0 < n < n_d$, allora le corrispondenti orbite periodiche sono localmente stabili, mentre se l'attraversamento avviene nella regione $n_d < n < n_1$, le corrispondenti orbite periodiche sono localmente instabili (fig. 2).

¹⁶Fra i requisiti del teorema di Hopf vi è, come noto, una richiesta di attraversamento dell'asse immaginario da parte degli autovalori complessi, con velocità non nulla. In appendice è dimostrato che tale requisito è sempre soddisfatto.

¹⁷Annotiamo subito che potremmo esprimere le varie condizioni di Hopf in altre forme, particolarmente conveniente è anche quella basata sul reciproco di a , ma quanto visto finora è più che sufficiente per i nostri interessi.

¹⁸La dimostrazione della stabilità dei cicli limite emergenti dalle biforcazioni di Hopf richiede degli sviluppi algebrici particolarmente complessi, basati sullo studio dei termini di ordine superiore dello sviluppo in serie di Taylor del campo vettoriale definente il sistema di interesse (Marsden e McCracken 1976).

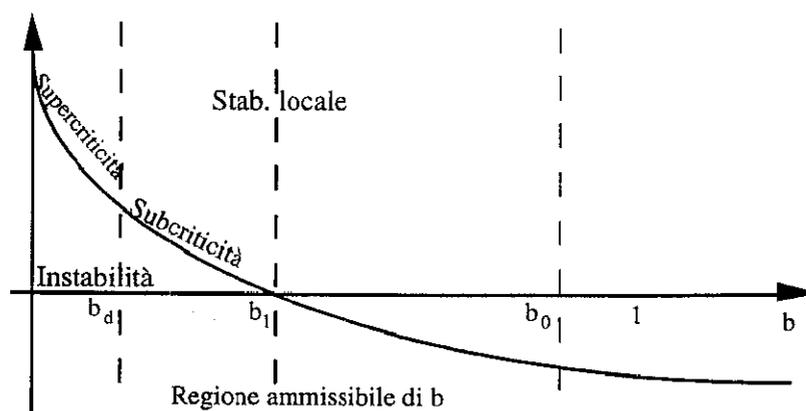


Fig. 2 Stabilità locale dell'equilibrio significativo e regioni di super/sub-criticità per il sistema (2.15)

In quest'ultimo caso il ciclo limite attorno all'equilibrio esiste, ma si tratta di un ciclo instabile (mentre il punto di equilibrio è all'opposto localmente attrattivo). Tale situazione sembra corrispondere alla nozione di 'corridor stability', prefigurata da Leijonhufvud (1981), che opina che tale struttura dinamica sia quella tipica del mondo economico, combattuto fra forze equilibranti (come i meccanismi market-clearing) e forze disequilibranti come l'assenza di coordinamento e l'insufficienza di domanda effettiva keynesiana.

6. Utilizzando il ritardo medio di gestazione come parametro di biforcazione: analisi ed illustrazione numerica

Abbiamo visto nel paragrafo precedente come una discussione completa del problema al variare dei valori di tutti i suoi parametri è estremamente complessa. Utili informazioni parziali sono però già ottenibili dall'utilizzo della sola relazione di biforcazione, implicita nel criterio di stabilità. Risplicitando tale condizione in termini di tutti i parametri, abbiamo la relazione:

$$a_h = \{ \alpha^2(m(n^2+2np+\rho^2)+n^2+2np+\rho^2) + \alpha(2\gamma n(m(n+\rho)+n+\rho) - 2mp(n+\rho) - n^2 - np - \rho^2) + \gamma^2 n^2(1+m) - \gamma n(2mp+n+\rho) + mp^2 \} / (np) \quad (6.1)$$

Il valore del ritardo che dà luogo alla biforcazione appare in una relazione molto complicata con tutti i parametri del modello. In particolare dalla ispezione delle derivate della tabella 2 si può osservare che tutti i parametri (tranne m) hanno una influenza ambigua sul ritardo 'critico', per cui con diverse configurazioni dei parametri la variazione di ciascuno di essi potrebbe implicare sia un aumento che

una riduzione del ritardo "critico"¹⁹. Nondimeno siamo in grado di fare la seguente osservazione: sebbene per tutte le derivate (tranne che per m) può esistere un valore di α più o meno elevato che ne inverte il segno, tale livello critico di α è sempre superiore ai valori che permettono l'esistenza di un equilibrio significativo. Quindi in modo univoco è possibile accertare che una ipotetica variazione di ciascun parametro, influenzerà il ritardo 'critico' nel modo seguente: *un incremento di α , γ ed n aumenta il ritardo critico, viceversa gli altri parametri.*

Un esercizio numerico con valori 'standard' dei parametri è utile per esemplificare su come e quando può apparire un ciclo limite e la sua durata: con $\gamma=1$, $\rho=2$, $m=0.2$, $\alpha=.03$, $n=.06$ (quindi $U^*=.51$) vi è un valore critico del parametro a pari a 3.9, cui corrisponde un valore del ritardo (medio) $T=1/a=0.256$; per ritardi superiori inizieranno fluttuazioni esplosive nella quota salari e nel tasso d'occupazione; infine per ritardi compresi in un intorno di un trimestre apparirà un ciclo limite di lunghezza pari a quasi 18 anni.²⁰ La tabella 3, infine, illustra come varia il valore critico di a in corrispondenza di una differente configurazione di parametri.

Tabella 2 - Variazioni del valore critico di a al variare dei parametri del modello

$da_h/dm = [\alpha^2(n^2+2np+\rho^2)+2\alpha(n+\rho)(\gamma n-\rho)+\gamma^2 n^2 2\gamma n\rho+\rho^2]/(n\rho)$
$da_h/d\alpha = [2\alpha(m(n^2+2np+\rho^2)+n^2+2np+\rho^2)+2\gamma n(m(n+\rho)+n+\rho)-2m\rho(\rho+n)-n^2-n\rho-\rho^2]/(n\rho)$
$da_h/dn = [\alpha^2 h + \alpha k + i]/(n\rho)$
$da_h/d\rho = [-\alpha^2 h + \alpha k + i]/(n\rho^2)$
$da_h/d\gamma = [2\alpha(m(n+\rho)+n+\rho)+2\gamma n(1+m)-(2m\rho+n+\rho)]/\rho$

(dove $h=(m(n^2-\rho^2)+n^2-\rho^2)$, $k=2\gamma n^2(1+m)+2m\rho^2-n^2+\rho^2$, $i=\gamma^2 n^2(1+m)-\gamma n^2-m\rho^2$)

¹⁹Per quanto concerne la scelta del parametro di biforcazione annotiamo che vi è, di fatto, una sostanziale equivalenza dei risultati dinamici, qualunque sia il parametro prescelto: infatti se $a_h=G(a, g, r, m, n)$ è funzione monotona (o, come in questo caso, lo è nell'intervallo dei valori dei parametri che permettono l'esistenza dell'equilibrio) di ogni singolo argomento allora la scelta del parametro di biforcazione è fondamentalmente indifferente. Analoga considerazione può essere svolta in merito alla scelta della relazione $a=\Phi(n)$, quale relazione pilota della discussione, piuttosto che altre. Tale scelta è però motivata dal fatto che questi sono i parametri chiave nella nostra formulazione.

Dal punto di vista pratico, sembra naturale indirizzare la scelta del parametro di biforcazione verso quello che è più idoneo e libero di variare nel tempo, in seguito a mutamenti esterni al modello (ambientali, culturali, storici), e che quindi è meno legato alle assunzioni sui comportamenti e sulla struttura del modello economico.

²⁰ La frequenza è data da $T = \frac{2\pi}{\sqrt{anU^*}}$.

Tabella 3- Esempio numerico di variazione del valore critico di a al variare dei parametri rispetto alla configurazione 'standard'

Parametri	m	a	n	ρ	γ
Nuovi valori parametri	.5	.06	.09	3	.66
Valore critico di a	6.4	3.1	2.3	6.3	4.2

7. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo discusso l'ipotesi che vi sia un ritardo fra le decisioni d'investimento e la realizzazione del medesimo in un modello classico di crescita con ciclo à la Goodwin.

L'effetto sulla dinamica di equilibrio del ritardo studiato è concentrato unicamente sul livello di equilibrio della quota salari, con un guadagno netto a favore della classe imprenditrice, rispetto al modello di Goodwin. Questo è dovuto al ritardo sistematico nella crescita indotto dal ritardo nell'investimento: la crescita più lenta si riflette sistematicamente in una crescita rallentata della occupazione facendo sì che, in virtù del meccanismo di Phillips, la classe lavoratrice sia nel modello presente sempre più debole sul mercato del lavoro relativamente al modello di Goodwin. Questa sistematica maggior debolezza si riflette interamente in una minore capacità del lavoro di difendere la quota distributiva con conseguenze in particolare sulla quota d'equilibrio. In un ottica dinamica il primo risultato mostra come l'introduzione di un ritardo distribuito di tipo esponenziale nella determinazione degli investimenti rende instabile il sistema di crescita ciclica à la Goodwin. Il ritardo dei profitti nel determinare il volume degli investimenti rende instabile il sistema quando l'offerta di lavoro è fissa. Ma quando quest'ultima reagisce alle variazioni cicliche dell'occupazione, per esempio sulla base del noto effetto 'scoraggiamento', la dinamica indotta dalla relazione ritardata profitti investimenti si arricchisce. Inoltre, anche la quota salari di equilibrio può risultare superiore rispetto a quella del modello di Goodwin.

Se invece dell'originario modello di Goodwin consideriamo il modello ampliato che considera endogena la variazione della popolazione (che può essere anche tranquillamente intesa come offerta di lavoro), facendo dipendere quest'ultima in modo lineare dal tasso di occupazione e che trasforma il ciclo strutturalmente instabile di Goodwin in un sentiero convergente all'equilibrio (vedi Manfredi e Fanti, 1996) allora possiamo dimostrare come con il semplice ritardo supposto nella trasformazione dei profitti in investimenti si può conservare la stabilità (locale) dell'equilibrio di lungo periodo ma soprattutto tale ritardo può generare comportamenti dinamici più complessi dai quali può emergere un ciclo

strutturalmente stabile. La struttura dell'economia, rappresentata dai parametri del modello, è influente nel determinare la misura dello sfasamento fra profitti e investimenti che è accettabile per conservare la stabilità, sia essa sotto forma di ciclo convergente che di ciclo persistente strutturalmente stabile: più elevate sono la produttività e la crescita demografica (dell'offerta di lavoro) - quest'ultima è positivamente correlata con il ciclo - più ampio è lo sfasamento accettabile per la stabilità, mentre una elevata intensità capitalistica aumenta lo sfasamento tollerabile. Rispetto al mercato del lavoro sia la maggior 'resistenza' autonoma dei salari che una maggior sensibilità dei salari al ciclo riducono lo "sfasamento tollerabile".

Se però la configurazione dei parametri del modello è tale da generare una dinamica di tipo ciclico, allora vediamo che, con riferimento ovviamente alla stabilità del ciclo limite, non sempre un maggiore effetto scoraggiamento implica un più forte effetto di stabilizzazione. Infatti, abbiamo congetturato, motivati dai comportamenti delle varie forze economiche agenti, che il ciclo limite, quando esiste, sia anche stabile se il ritardo di gestazione è sufficientemente piccolo e la reattività dell'offerta di lavoro alle condizioni occupazionali generali è a sua volta non eccessiva. Quindi, sebbene la reattività sia chiaramente stabilizzante, e questo è un tipico effetto derivato nei modelli LVG, nel nostro modello a dimensione superiore, a causa del ritardo di gestazione, l'effetto scoraggiamento può essere responsabile di una serie di conseguenze non immediatamente autoevidenti. Se infatti è troppo intenso sterilizza completamente l'effetto destabilizzante del ritardo, generando una "normale" dinamica di equilibrio. Se però, all'opposto l'effetto è più debole, può essere responsabile della comparsa di cicli limite, che però appariranno instabili. Se invece è sufficientemente debole, e naturalmente associato a ritardi a loro volta contenuti, potranno risultarne orbite periodiche stabili. Tutto ciò comporta un evidente ricaduta in termini di prescrizioni di "policy" se la reattività dell'offerta di lavoro o l'effetto di altri parametri che formalmente influenzano la curva di biforcazione in modo simile, risultano manovrabili in qualche misura dalle autorità economiche. Questo ha una chiara interpretazione in termini dinamici: per avere cicli limite stabili abbiamo bisogno da un lato di ritardi contenuti, in cui cioè l'effetto destabilizzante non sia troppo marcato, ma contemporaneamente degli effetti di stabilizzazione (dovuti in questo caso particolare proprio all'effetto scoraggiamento) deboli abbastanza da impedire la attrattività dell'equilibrio, ma al tempo stesso tali da definire un'attrazione lontano dall'equilibrio.

Sebbene nel modello 'classico' l'investimento sia sempre pari ai profitti (o a una quota esogena di essi) è ben noto, soprattutto dai lavori di Kalecki, che i profitti ritardati sono cruciali nel determinare le decisioni d'investimento corrente: l'estensione ad una funzione d'investimento comportamentale dipendente dalla storia della profittabilità²¹ sarà un'ulteriore fase dell'indagine sull'effetto dei

²¹Questo chiaramente implica rispetto al presente modello l'abbandono della uguaglianza profitto-investimento e che la produzione vari per adeguare, seppure in modo vischioso, domanda e offerta.

profitti correnti e passati sul ciclo e la crescita. Quindi questo lavoro giunge a stabilire, che, sebbene lo sfasamento fra decisioni d'investimento e realizzazione del medesimo appaia destabilizzante quando inserita nel modello con oscillazione conservativa, una più larga considerazione delle forze economiche - per esempio²² tenendo conto dell'endogeneità dell'offerta di lavoro - può cambiare il comportamento qualitativo del sistema, che può stabilizzarsi, generando anche un ciclo strutturalmente stabile.

Riferimenti Bibliografici

- Cecchi D., Note sulle recenti teorie del ciclo di disequilibrio, *Rivista di Politica Economica*, Aprile 1991
- Fanti L., Manfredi P. (1996), Salari di efficienza e crescita con ciclo, in corso di stampa su *Studi Economici*
- Fanti L., Manfredi P. (1996a), Salari di efficienza, ritardi nei piani di investimento e crescita con ciclo, Università di Pisa, mimeo
- Fanti L., Manfredi P. (1996b), Vischiosità dei salari, offerta di lavoro endogena e ciclo, Università di Pisa, mimeo
- Fanti L., Manfredi P. (1996c), Proprietà dinamiche di alcuni modelli con ritardo, Università di Pisa, mimeo
- Farkas M. (1984), Stable Oscillations in a Predator-Prey Model with Time Lag, *Journal of Math. Analysis and App.*, 10, 175-188
- Farkas M. (1995), *Periodic Motions*, Springer Verlag, New York Tokio
- Gandolfo G., *Metodi di Dinamica Economica*, Isedi, Milano, 1973.
- Goodwin R.M., "A Growth Cycle", in Feinstein C.H. ed., *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, London, 1967.
- Guckenheimer J., Holmes P. (1984), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Verlag, Newyork, Tokio, Berlin
- Kalecki, *Sulla dinamica dell'economia capitalistica*, Torino, UTET, 1975
- Kydland F., Prescott E. (1982), Time to build an aggregate fluctuation, *Econometrica*, November 1982
- Leijonhufvud A. (1981), (ed.), *Information and Coordination*, Oxford UP, Oxford
- Manfredi P., Fanti L., *Population Dynamics and Goodwin's Model*, Preprint, 1996

²² Naturalmente non è soltanto la endogeneità dell'offerta di lavoro a rendere così vari i risultati: anche altre variazioni cicliche endogene, come quelle della produttività legata al salario sulla base delle note teorie del salario d'efficienza (Fanti-Manfredi, 1995, 1996a) o il comportamento vischioso dei prezzi, sono in grado di fornire dinamiche similmente ricche (Fanti-Manfredi 1996b).

Appendice

Si può facilmente verificare come la richiesta del teorema di Hopf di attraversamento dell'asse immaginario da parte degli autovalori complessi con velocità diversa da zero in corrispondenza del valore di biforcazione a_0 del parametro di interesse (nel nostro caso a), sia in effetti soddisfatta. Come sappiamo occorre che (Guckenheimer e Holmes 1984, Farkas 1995):

$$\left[\frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right]_{a=a_0} \neq 0 \quad (1)$$

Ora, come noto, dato il polinomio caratteristico corrispondente, e cioè:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A(a)\lambda^2 + B(a)\lambda + C(a) \quad (2)$$

(con i coefficienti riguardati in quanto funzioni del parametro di biforcazione), la derivata al primo membro della (1) è data da:

$$\left[\frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right] = (-1) \frac{B'(a)A(a) + B(a)A'(a) - C'(a)}{2[A^2(a) + B(a)]} = (-1) \frac{\Theta(a)}{\Psi(a)} \quad (3)$$

Nel caso specifico del nostro modello abbiamo:

$$\begin{aligned} A(a) &= a + nU^*; & A'(a) &= 1 \\ B(a) &= anU^* & B'(a) &= nU^* \\ C(a) &= \operatorname{amp}(1-g^*)^2 U^* V^* & C'(a) &= m\rho(1-g^*)^2 U^* V^* \end{aligned} \quad (4)$$

per cui, essendo $B(a) > 0$ sempre, il segno della derivata (3) dipende soltanto dal segno della quantità $\Theta(a)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Theta(a) &= nU^*(a + nU^*) + anU^* - m\rho(1-g^*)^2 U^* V^* = \\ &= [nU^*(a + nU^*)] + anU^* - m\rho(1-g^*)^2 U^* V^* = \\ &= U^* \{ [(a + nU^*)n - m\rho(1-g^*)^2 V^*] + an \} = U^* [(a - \Phi(n)) + an] \end{aligned} \quad (5)$$

Ne segue che, in corrispondenza del valore di biforcazione $a=a_0=\Phi(n)$ avremo:

$$\Theta(a_0) = U^* \{ n[(a_0 - \Phi(n)) + a_0 n] \} = U^* a_0 n > 0 \text{ sempre} \quad (7)$$

e quindi, definitivamente:

$$\left[\frac{d \operatorname{Re}(a)}{da} \right]_{a=a_0} < 0 \text{ sempre} \quad (1)$$