

**Report n. 109**

**Ciclo di vita di nuovi prodotti: modellistica non lineare**

**Piero Manfredi**

Pisa, Giugno 1996

## Ciclo di vita di nuovi prodotti: modellistica non lineare

Piero Manfredi  
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia  
Facoltà di Economia, Università di Pisa  
email: manfredi@ec.unipi.it

### 1. Ricetta per la costruzione di un modello matematico di evoluzione (non solo delle vendite)

Il nucleo di base della teoria economica della diffusione di nuovi prodotti è costituito da quello che chiameremo il “problema elementare dell'innovazione”, che si occupa delle modalità con cui un nuovo prodotto, tipicamente un bene di consumo durevole (videoregistratore piuttosto che automobile o personal computer: in ogni caso un bene ad “acquisto non frequente”), o una nuova tecnologia, viene via via adottata, al passare del tempo, da una popolazione di “potenziali adottatori” (di solito supposta, per comodità, costante)<sup>1</sup>. Il primo naturale strumento, nella cassetta degli attrezzi dello studioso di problemi dell'innovazione, è ovviamente costituito dal noto apparato di curve di adozione e curve cumulate di diffusione, che forniscono la “panoramica integrale” del processo di diffusione del nuovo prodotto nell'ambito della popolazione.

In particolare gli approcci tradizionali, per esempio la classica sintesi di Rogers (1983), hanno fatto tutti più o meno consapevolmente ricorso alla legge normale quale “teoria” del processo di adozione, in particolare quale filtro per la suddivisione degli adottatori in categorie sulla base dei loro tempi di adozione. L'approccio basato sulla legge normale ha in effetti il pregio di essere semplice ed intuitivo: la forma tipica della legge normale (ma in realtà di qualunque curva “bell shaped”) ben rappresenta alcuni aspetti chiave della “fisiologia” del processo di adozione, con cui si passa dai pochi innovatori iniziali agli adottatori finali (i ritardatari) attraverso la fase di majority (Fig. 1).

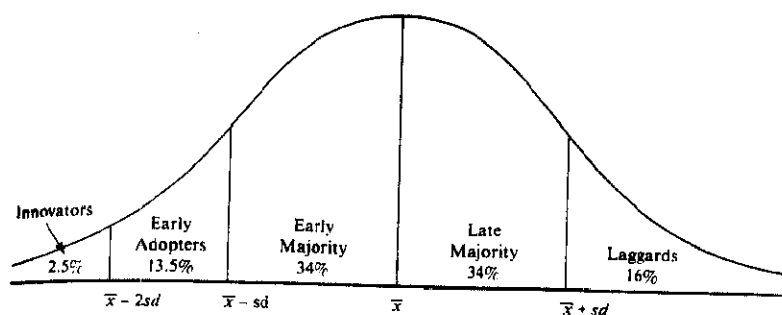


Fig. 1. Il modello “normale” del processo di adozione (fonte: Rogers 1983)

In realtà, come è stato abbondantemente mostrato dagli addetti ai lavori, la normale presenta una serie di rigidità (per esempio la simmetria ecc), che le impediscono di essere un “rappresentatore onnipotente” dei processi di adozione. Al di là di queste carenze specifiche dobbiamo comunque riconoscere che il ricorso aprioristico alla legge normale può essere accettato al più con fini di mera descrizione: servirsi della normale<sup>2</sup> solo perchè è la più

<sup>1</sup>Questo è un problema classico, che si ripropone, mutatis mutandis, in altre discipline: per esempio nello studio della trasmissione di un processo epidemico.

<sup>2</sup>Per una discussione moderna dell'approccio “normale”, tra l'altro utile quale premessa ai “modelli dell'innovazione”, si vedano i vari contributi di Mahajan e al. (1990a, 1990b, 1993).

classica tra le curve bell-shaped vuol dire non impegnarsi minimamente su quelli che sono i meccanismi, le "forze" (per esempio: il ruolo delle battaglie pubblicitarie tra marche piuttosto che degli effetti di imitazione tipici delle "mode"), che agiscono nel corso del processo di innovazione e che quindi concorrono a plasmarne la dinamica. Viceversa, l'individuazione delle forze agenti, indispensabile per la comprensione "fine" di qualunque processo dinamico, non ultima per la costruzione di modelli previsivi solidi, richiede di impegnarsi molto di più.

C'è un solo modo che ci consenta di esprimere in forma trasparente (ed utile per i nostri fini) la comprensione che noi abbiamo delle forze agenti nel processo di innovazione: attraverso la formulazione di modelli matematici.

Iniziamo con degli esempi semplici. Supponiamo di voler lanciare sul mercato un nuovo prodotto ad una certa data "zero" di lancio. L'ottimo, da bravi manager sarebbe quello di conoscere la forma della domanda di mercato per il nostro prodotto, ed in ultima analisi la forma della funzione delle vendite (dei giorni a venire chiaramente) che descrive il numero totale di pezzi venduti al passare del tempo:  $N_1, N_2, \dots, N_t, \dots$  ove  $N_t$  è il numero di pezzi complessivamente venduti alla fine della  $t$ -esima settimana trascorsa dalla data di lancio (si noti che nulla ci vieta se vogliamo, di ragionare con un maggiore dettaglio, per esempio su scala giornaliera od oraria; la settimana rimane comunque un'unità ragionevole per il pianificatore).

La cosa più ragionevole che possiamo fare per precisare la forma di tale curva consiste nel mettere in relazione le sue variazioni settimanali (cioè le variazioni  $\Delta N_t = N_{t+1} - N_t$  tra due generiche settimane consecutive) con le loro plausibili "cause" (ciò che prima abbiamo chiamato "meccanismi"). Supponiamo per esempio di essere dei manager "locali" coinvolti nella distribuzione di un nuovo lettore di compact-disc su una certa area abitata da  $m$  potenziali compratori<sup>3</sup> e di essere interessati a capire quali sono i fattori che fanno sì che nel corso di una generica settimana le vendite (parliamo sempre di prime vendite, per comodità<sup>4</sup>) passino dal loro livello  $N_t$  al livello  $N_{t+1}$  della settimana seguente. Viene subito voglia di dire che tale variazione dipende certamente dalla popolazione dei possibili compratori ( $m$ ) e da quanti hanno già acquistato: verosimilmente è "funzione" della loro differenza ( $m - N_t$ ). Annotiamo quindi:

$$\Delta N_t = f(m - N_t) \quad (1.1)$$

D'altra parte è chiaro che  $\Delta N_t$  può dipendere anche da altri fattori: per esempio da fattori di tipo stagionale (è certo più probabile che una grossa spesa sia effettuata sotto Natale in periodo di tredicesima: ecco che così  $\Delta N_t$  diventa  $f(m - N_t; t)$ , ove  $t$  indica la peculiare settimana dell'anno sotto considerazione) oppure dai livelli dei tenori di vita, quindi dei redditi medi ( $Y_t$ ) dei possibili adottatori (ed ecco che:  $\Delta N_t = f(m - N_t; t; Y_t)$ : le complicazioni aumentano!). Dunque, in generale:

$$\Delta N_t = f(A_t, B_t, C_t, \dots) \quad (1.2)$$

ove  $A_t, B_t, C_t, \dots$  sono i vari "meccanismi" intervenienti (e sono tutti indicizzati dal tempo perchè non avrebbe senso far dipendere delle variazioni da cause che all'opposto non variano).<sup>5</sup>

<sup>3</sup>Mahajan e al. (1990a) parlano di "potential number of ultimate adopters".

<sup>4</sup>Come premesso nel testo, nel corso di questo lavoro ci occuperemo esclusivamente delle cosiddette "vendite di primo acquisto", escludendo così dai nostri interessi le vendite per sostituzione. Questa scelta, in linea con i modelli base della teoria dell'innovazione, ci consentirà di rendere il problema al massimo grado trasparente.

<sup>5</sup>Annotiamo subito che questi meccanismi potrebbero essere importanti non solo "al presente" ma anche per parte della loro storia precedente: questo è però un campo minato che non attraverseremo.

La (2) diventa uno strumento operativo nel momento in cui noi diventiamo capaci di precisare la forma della funzione  $f$  in una maniera sensata e possibilmente non troppo complessa. Supponiamo, per esempio, che  $\Delta N_t$  dipenda dall'unico fattore  $A_t = (m - N_t)$  nel modo più semplice, cioè linearmente:

$$\Delta N_t = a(m - N_t) \quad (1.3)$$

Anche se l'ottica da matematici potrebbe farci dire che la scelta lineare è motivabile con il fatto che la retta sia tra tutte le funzioni la più semplice, in questo caso essa corrisponde ad una precisa ipotesi economica. Il parametro  $a$ , che chiameremo momentaneamente "tasso di acquisto", va inteso come una costante: per esempio  $a=0.05$  vuol dire, si ispezioni la (3), che la crescita delle vendite da una settimana all'altra avviene attraverso il "consumo" ad un ritmo (settimanale) del 5% dei soggetti che non hanno ancora acquistato il prodotto. In questo caso scriveremmo:

$$\Delta N_t = 0.05(m - N_t) \quad (1.4)$$

Annotiamo subito che la (3) (e quindi anche la (4)) può essere trascritta nelle forme:

$$N_{t+1} - N_t = a(m - N_t) \Rightarrow N_{t+1} = N_t + a(m - N_t) \quad (1.5)$$

$$N_{t+1} = am + N_t(1 - a) \quad (1.6)$$

di cui la (5) in particolare possiede significato chiarissimo: il numero di pezzi venduti alla fine della  $(t+1)$ -esima settimana sarà necessariamente la somma del numero di vendite alla fine della settimana precedente ( $t$ ) più quelle effettuate durante la  $(t+1)$ -esima settimana.

Le relazioni (3) o (4) o (6) - che erano state derivate in un'ottica apparentemente piuttosto limitata, quella della pura descrizione delle "variazioni settimanali" - diventano dei modelli matematici di evoluzione (per l'esattezza dei modelli a tempo discreto, descritti attraverso delle equazioni alle differenze finite) nel momento in cui noi riteniamo accettabile che possano costituire delle ragionevoli spiegazioni dell'evoluzione di  $N$  su un orizzonte di tempo sufficientemente lungo, possibilmente l'intero orizzonte temporale di pianificazione.

Le nostre fatiche non sono però finite qua. Infatti, le (3), (4) (5) e (6) assegnano soltanto delle "regole di evoluzione" che ancora poco dicono sulla vera forma della legge di vendite  $N_t$  sottostante. Per ottenerla dobbiamo, come si usa dire, trovare la soluzione del modello, ossia risolvere il modello rispetto alla funzione  $N_t$ , che di fatto ne rappresenta l'incognita. Nel nostro caso è facile (lo è perchè la funzione incognita appare in forma lineare): basta supporre noto il valore "iniziale" della funzione incognita, ossia il suo valore al tempo "zero", che indicheremo con  $N_0$ . Questo è chiarissimo dalla (6): se infatti  $a$  ed  $m$  sono, come detto, costanti note, allora la conoscenza di  $N_0$  ci permette di determinare univocamente (questo è cruciale!)  $N_1$ , quella di  $N_1$  di determinare univocamente  $N_2$ ; e così via. Procediamo a titolo di esempio alla risoluzione della (6). Otteniamo:

$$N_1 = am + (1 - a)N_0$$

$$N_2 = am + (1 - a)N_1 = am + (1 - a)[am + (1 - a)N_0] = am[1 + (1 - a)] + (1 - a)^2 N_0$$

$$N_3 = am + (1 - a)N_2 = am[1 + (1 - a) + (1 - a)^2] + (1 - a)^3 N_0$$

e così via. Ne segue che, infine, per una settimana  $t$  generica, otterremo (sfruttando il noto risultato sulla somma di una serie geometrica):

$$N_t = (1 - a)^t N_0 + (1 - (1 - a)^t)m \quad (1.7)$$

Poichè è poi totalmente ragionevole supporre che  $N_0=0$  la (7) riduce semplicemente a:

$$N_t = (1 - (1 - a)^t)m = m - (1 - a)^t m \quad (1.8)$$

In particolare per  $a=0.05$  avremo:

$$N_t = m - (1 - 0.05)^t m \quad (1.9)$$

legge che è rappresentata graficamente in fig. 2 per  $m = 1000$  (ossia: 1000 compratori potenziali nel mercato).

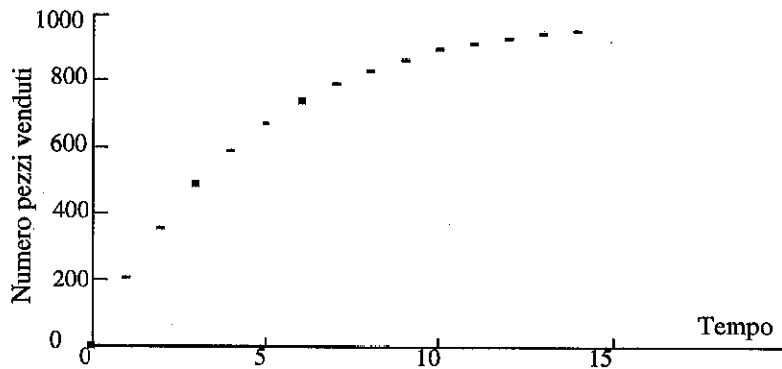


Fig. 2. Andamento nel tempo delle vendite corrispondenti alla regola di evoluzione (5) per  $a=0.2, m=1000$

La (7) rappresenta l'unica soluzione dell'equazione alle differenze finite (Edf d'ora in poi) (6) in corrispondenza della condizione iniziale  $N(t=0)=N_0$ . Più formalmente diremo che la legge (7) costituisce la soluzione (è anche l'unica) del problema di evoluzione a "valori iniziali":

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t + a(m - N_t) \\ N(t=0) = N_0 \end{cases} \quad (1.10)^6$$

E' molto importante incrociare tra loro considerazioni di tipo geometrico ed algebrico per trarre il massimo profitto possibile dall'ispezione della soluzione di un problema di

<sup>6</sup>Un problema a valori iniziali, come il presente, è di solito chiamato "problema di Cauchy". Quando si formulano modelli matematici di evoluzione, un aspetto molto importante dal punto di vista matematico è l'accertamento di una serie di "preliminari" indispensabili, il cui scopo è garantire che il nostro modello sia "ben posto". Tra questi i più tipici sono a) l'esistenza e l'unicità delle soluzioni per ogni istante del tempo successivo a quello iniziale; b) il mantenimento della positività per quantità positive (come nel nostro caso la variabile "numero di vendite"). Osserviamo però che in casi come il nostro, questi problemi sono tutti risolti simultaneamente per il semplice fatto che noi siamo capaci di calcolare direttamente la soluzione del modello stesso: il procedimento ricorrente presentato sopra mostra in sequenza come: a) almeno una soluzione esiste (quella che noi calcoliamo di fatto); b) tale soluzione è unica: infatti abbiamo un solo modo possibile per calcolarla (qual è il requisito matematico che assicura questo?); c) è anche sempre positiva (lo si controlli direttamente) d) tali requisiti valgono per ogni tempo. Questi semplici accertamenti valgono, a tempo discreto, anche per modelli più complessi (mentre non sono affatto banali a tempo continuo). Annotiamo infine come finora si sia ragionato solo sulla base di un orologio molto semplice, con periodi di tempo unitari (ricordate: una settimana...). Nulla impedisce ovviamente di ragionare su periodi di tempo di ampiezza  $h>0$  qualunque. In questo caso la nostra (5) modificherebbe in:

$$N_{t+h} = N_t + a(m - N_t)h$$

evoluzione. L'ispezione della figura 2 ci mostra come le vendite crescano monotonamente nel tempo (anche se con ritmi via via più lenti) fino al valore massimo di  $m$ , corrispondente alla completa saturazione del mercato, il che era tutto sommato atteso dalla stessa forma (3), che prevede crescita del numero di pezzi venduti fintantochè esiste una discrepanza tra  $m$  ed  $N_t$ . Curiosamente (il lettore lo può rilevare da un semplice passaggio al limite), tale effetto di saturazione del mercato avviene solo asintoticamente, ossia solo per  $t$  tendente all'infinito: questa è una peculiarità non evidente introdotta dal ricorso ad un modello matematico (d'altra parte facilmente comprensibile anche per i non iniziati, nel momento in cui ci ricordiamo che la soluzione dipende comunque da una serie geometrica) e che comunque non costituisce difficoltà, come mostrano i seguenti esempi. Dalla prima delle espressioni (8) possiamo scrivere la soluzione come:

$$N_t = q(t)m \quad \text{con:} \quad q(t) = 1 - (1-a)^t \quad (1.11)$$

(ove  $0 < q(t) < 1$ ) che mostra come le vendite siano esprimibili ad ogni istante del tempo come quota crescente del pool dei possibili acquirenti. Tale quota dipende chiaramente dal valore numerico assunto dal parametro  $a$ , che regola la velocità con cui le vendite crescono, e quindi la scala temporale del processo di adozione, definita come il reciproco di  $a$  (perchè?). Partendo dalla soluzione del modello possiamo risolvere questioni notevoli, come per esempio la seguente: "Dopo quante settimane sarà esaurito il 90% del pool degli acquirenti?" La risposta è subito ottenuta risolvendo rispetto a  $t$  l'equazione:

$$N_t = 0.90m \quad \rightarrow \quad 1 - (1-a)^t = 0.90 \quad (1.12)$$

da cui, come si vede facilmente, la dimensione di  $m$ , cioè la dimensione del mercato, è del tutto irrilevante (qual è la spiegazione economica di questo fatto?). Con rapidi calcoli:

$$t = \frac{\log 0.1}{\log(1-a)} \quad (13)$$

La tabella 1 presenta i tempi (approssimati per eccesso) necessari all'esaurimento di varie percentuali notevoli del pool degli acquirenti corrispondenti ad alcuni possibili valori del tasso di acquisto: come si può vedere, con un tasso di acquisto dell'ordine di grandezza del 5% settimanale, il 50% del mercato verrebbe assorbito nel giro di 14 settimane, mentre occorrerebbe attenderne altre 45, fino alla cinquantanovesima settimana, perché abbia comprato il 95% del pool.

*Tabella 1: tempi necessari al raggiungimento di un determinato "target" di vendite nel modello (3) per alcuni possibili valori del tasso di acquisto*

Valori di $a$	Target (in termini di quote del pool dei possibili acquirenti)			
	50%	75%	95%	99%
0.01	70	139	299	461
0.05	14	28	59	91
0.1	7	14	30	46
0.2	3.1	7	14	21

Annotiamo subito come nonostante la formulazione lineare da noi utilizzata sia apparentemente molto semplice, consente delle flessibilità notevoli anche dal punto di vista modellistico. Per esempio potremmo allargarne molto le potenzialità se fossimo in grado di specificare i meccanismi che agiscono nella determinazione del tasso di acquisto e così via: questi sono tipici compiti da "modellista matematico" che affronteremo in vario modo nel seguito.

## 2. Modelli a tempo continuo

I modelli matematici finora presentati erano tutti “a tempo discreto” o, come si dice tecnicamente, descritti da equazioni alle differenze finite. La più conveniente (e sovente più ragionevole) rappresentazione a “tempo continuo” è ottenuta attraverso un passaggio al limite sulla variazione della funzione  $N$ , che denotiamo ora con  $N(t)$  per specificare che intenderemo il tempo come grandezza continua, su un generico intervallo temporale  $(t, t+\Delta t)$  di ampiezza qualunque. La nostra originaria scrittura (1.2) verrà modificata come:

$$N_{t+\Delta} - N_t = f(A_t, B_t, C_t \dots) \Delta + o(\Delta) \quad (2.1)$$

che contiene due novità fondamentali:

a) la dipendenza da  $\Delta$ : questa non era esplicita nella (1.2) perchè era dato per inteso che l'unità di misura coinvolta era comunque unitaria (una settimana; si veda però la nota 5). Viceversa è chiaro che l'impatto dei fattori  $A, B, C, \dots$  sarà differente a seconda del fatto che essi agiscono per un'ora, un giorno, un mese: dipende cioè dalla scelta di  $\Delta$ .

b) la comparsa del termine  $o(\Delta)$  che ingloba potenzialmente tutte le cause il cui ruolo è considerato trascurabile nella determinazione di  $\Delta N$  durante  $(t, t+\Delta t)$  (tecnicamente  $o(\Delta)$  è quindi un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\Delta$ ).

Dividendo per  $\Delta$  ambedue i membri della (2.1) e passando al limite per  $\Delta$  tendente a zero otteniamo:

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(A_t, B_t, C_t \dots) \quad (2.2)$$

che è detta equazione differenziale ordinaria (Ode) del primo ordine nella funzione incognita  $N(t)$ , ed annoteremo tipicamente come:

$$\dot{N}(t) = f(A_t, B_t, C_t \dots) \quad (2.3)$$

La (2.3) mantiene la stessa tipologia di descrizione fornita nella (1.2) (nella (2.3) le variazioni di  $N$  sono considerate durante un intervallo di tempo molto breve ma i meccanismi sono i medesimi) con alcuni vantaggi davvero non indifferenti, che sono quelli tipicamente forniti dal ricorso al calcolo infinitesimale<sup>7</sup>.

Così, per esempio, l'equazione a tempo continuo che replica il meccanismo evolutivo della (1.3) è l'equazione:

$$\dot{N}(t) = \alpha(m - N_t) \quad (2.4)$$

ove chiameremo  $\alpha$  tasso “istantaneo” di acquisto, per differenziarlo dal tasso a che compariva nella corrispondente equazione a tempo discreto. La (2.4) è un'Ode del primo ordine lineare, la cui soluzione generale<sup>8</sup> ha forma:

---

<sup>7</sup>Il principale è indubbiamente quello legato alla possibilità, assolutamente realistica per  $\Delta$  molto piccoli (per esempio dell'ordine di minuti), di considerare pressochè costanti, durante quel dato intervallo, le cause di variazione  $A, B, C, \dots$  (un fatto che inevitabilmente complicherebbe le equazioni a tempo discreto), evitando così il serio problema di dover spiegare come e perchè varino le cause. Non solo: grazie all'ipotesi “ $\Delta$  piccolo” diventa lecito considerare i contributi delle varie cause come tra loro indipendenti.

<sup>8</sup>Per soluzione generale di un'equazione differenziale o alle differenze si intende la famiglia di tutte le possibili soluzioni di tale equazione. Come noto, nel caso delle equazioni lineari tale famiglia può essere indicizzata mediante il ricorso ad un'unica costante arbitraria ( $K$  nella (2.5)). Ricordiamo subito anche che, nel caso di modelli matematici formulati mediante Ode gli accertamenti dei “requisiti preliminari” sono, fatto salvo per i casi più elementari, meno semplici

$$N(t) = Ke^{-\alpha t} + m \quad (2.5)$$

dipendente dalla costante positiva  $K$ . Completandola con una condizione iniziale del solito tipo ( $N(t=0)=N_0$ ), otteniamo la soluzione:

$$N(t) = N_0 + (m - N_0)(1 - e^{-\alpha t}) \quad (2.6)$$

che per  $N(t=0)=0$  porge infine:

$$N(t) = m(1 - e^{-\alpha t}) \quad (2.7)$$

la cui forma, rappresentata in fig. 3 (per  $\alpha=0.1$ ,  $m=1000$ ) replica decisamente quella del corrispondente modello discreto (1.3) rappresentato in figura 2. Si osservi che, essendo  $e^{-\alpha t}$  una quantità sempre compresa tra zero ed uno, la (2.7) possiede la medesima rappresentazione nella forma  $N(t)=q(t)m$  della corrispondente soluzione discreta.

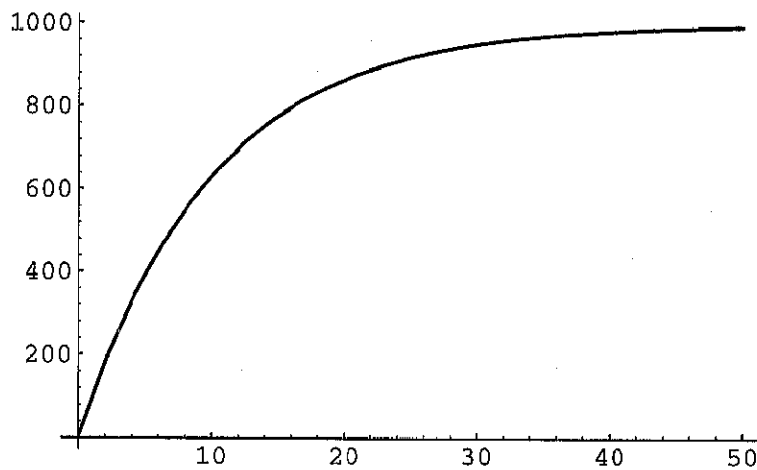


Fig. 3. Andamento nel tempo delle vendite in base alla regola di evoluzione (2.4) per  $\alpha=0.1$ ,  $m=1000$

Come è evidente dal grafico è la grandezza del tasso istantaneo d'acquisto  $\alpha$  (la cui unità di misura è  $(\text{tempo}^{-1})$ ) che regola la scala temporale del processo di adozione: ad  $\alpha$  piccolo corrisponde un processo temporale di adozione molto più diluito nel tempo che non nel caso di  $\alpha$  grande. Intuiamo quindi che  $1/\alpha$  costituisce una rozza misura del "calendario" temporale di adozione.

Questo può essere compreso passando dalla informazione (2.7), la curva esprime il numero cumulato dei pezzi venduti, alla corrispondente distribuzione temporale, che fornisce un'informazione ancora più chiara e utile (mettetevi nei panni di colui che deve gestire le scorte nei punti vendita: diventa cruciale essere in grado di prevedere la forma della distribuzione delle affluenze dei clienti) e cioè il numero di pezzi venduti per ogni unità di tempo (per esempio: giorno per giorno). Questa informazione può essere ottenuta per differenze della curva cumulata tra due date successive  $t$  e  $t+h$ :

$$\text{Vendite}(t, t+h) = N(t+h) - N(t) = me^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha h}) \quad (2.8)$$

---

che nei modelli alle Edf. In questa sede ci occuperemo sempre di modelli "ben posti" e non torneremo più sul problema.



In particolare la forma dell'intera distribuzione temporale delle vendite (che indicheremo genericamente con  $S(t)$ ) è fornita comunque dalla derivata della curva cumulativa, data quindi nel nostro caso da:

$$S(t) = \dot{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt} = m\alpha e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0, t > 0) \quad (2.9)$$

Nella (2.9) riconosciamo una distribuzione di tipo esponenziale (fig. 4),<sup>9</sup> da cui apprendiamo quindi che in un processo di adozione descritto da una regola del tipo (2.4) allora la maggior parte degli acquisti sarà concentrata nei primi periodi, diminuendo poi monotonicamente. Chi avesse un po' di familiarità con concetti di statistica ricorderà in particolare che la media-valore atteso della legge esponenziale, definente in questo caso la data media di adozione del prodotto (calcolata a partire dalla data iniziale di immissione sul mercato), è data proprio dal rapporto  $1/\alpha$ . Così per esempio con  $\alpha=0.1$ /mese avremo un'età media di adozione di 10 mesi.

### 1. Relazione tra formulazioni discrete e continue

Come abbiamo appurato dalla forma delle soluzioni, le due formulazioni discrete e continue sono in apparenza "equivalenti". Tale equivalenza "qualitativa" può essere precisata, dimostrando che in effetti la soluzione del problema "continuo" può essere ottenuta da quella discreta mediante opportuno passaggio al limite (mentre il viceversa è un tantino più complicato).

Possiamo chiarire facilmente la relazione intercorrente tra i due tassi di acquisto a tempo continuo ( $\alpha$ ) e discreto ( $a$ ), assumendo che le due leggi di evoluzione costituiscano entrambe due descrizioni fedeli del medesimo processo di adozione (l'unica differenza essendo data dal grado di precisione dei due orologi utilizzati: rozzo come gli orologi tradizionali quello a tempo discreto, infinitamente accurato quello continuo). In tal caso sull'insieme di punti  $0, 1, 2, \dots$  in cui è definita la soluzione del modello discreto le due leggi di evoluzione assumeranno il medesimo valore e quindi varrà l'uguaglianza:

$$m(1 - e^{-\alpha t}) = m[1 - (1 - a)^t]$$

da cui:

$$a = 1 - e^{-\alpha} \quad \text{e reciprocamente: } \alpha = (-1) \log(1 - a)$$

che forniscono le relazioni tra i due tassi.

<sup>9</sup>In effetti la curva  $N(t)$  è tecnicamente una curva cumulata in termini assoluti, ossia della forma:  $N(t) = mF(t)$ , ove  $F(t)$  è la corrispondente cumulata relativa (cioè la funzione di ripartizione statistica delle vendite). La corrispondente funzione di densità assoluta  $S(t)$  è quindi ottenuta dalla relazione:

$$\dot{N}(t) = m \frac{dF(t)}{dt} = mf(t)$$

ove  $f$  è la corrispondente densità "relativa". Ovviamente è possibile ritornare da  $S$  ad  $N$  attraverso integrazione:

$$N(t) = \int_0^t S(u) du$$

ed in particolare la (2.8) può essere ottenuta da integrazione sul corrispondente intervallo:

$$\text{Vendite}(t, t+h) = \int_t^{t+h} S(u) du$$

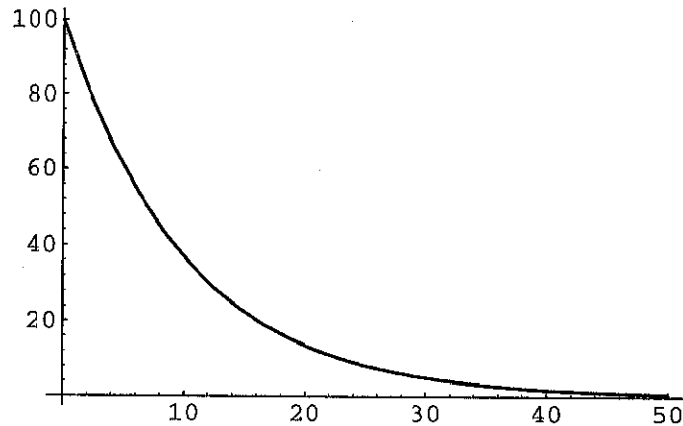


Fig. 4 Distribuzione esponenziale delle vendite implicite nella curva cumulativa di fig. 3 ( $\alpha=0.1$ ;  $m=1000$ )

Ovviamente le stesse informazioni che traevamo nel modello discreto possono essere tratte con altrettanta facilità nel corrispondente modello a tempo continuo. Così per esempio il tempo necessario all'esaurimento del 90% del pool acquirente è ottenuto dall'equazione:

$$q(t) = 0.90 \quad \text{ossia:} \quad \rightarrow 1 - e^{-\alpha t} = 0.90 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-\log(1-q)}{\alpha} \quad (2.10)$$

Il modellino semplificato (2.2) ora presentato costituisce il noto modello esponenziale applicato in problemi di marketing da Fourt e Woodlock (1960), la cui giustificazione è semplice: la crescita delle vendite dipende dall'ampiezza del pool residuo ( $m-N(t)$ ) con una velocità, misurata dal parametro  $\alpha$ , che esprime l'intensità con cui la comunicazione esterna (per esempio la pubblicità fornita dai mass-media) viene recepita dai possibili compratori e tradotta in decisioni di spesa. In questo senso l'assunzione di un tasso di acquisto costante appare perfettamente ragionevole: corrisponde all'impatto di una fonte emittente di intensità costante cui i "cittadini" sono omogeneamente esposti. Come vedremo questo meccanismo, adozione come traccia visibile dell'impatto sul pubblico dell'azione di una fonte esterna di informazione-comunicazione di intensità costante, costituisce uno dei due ingredienti fondamentali del modello di Bass, il modello "standard" della teoria dell'innovazione.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Vi è una identificazione pressochè completa tra la teoria dell'innovazione e quella della "trasmissione-diffusione" dell'informazione (Bartholomew 1973; Tuma-Hannan 1984, 466 sgg.). Possiamo pensare la funzione di crescita delle vendite appena incontrata come la traccia osservabile, la "proxy variable", della diffusione tra la popolazione di un'informazione che si sparge a ritmo costante (ed omogeneamente: senza privilegiare alcuno dei possibili soggetti) da una certa sorgente. In questo caso è perfettamente naturale che  $\Delta N_t$ , la variazione del numero dei soggetti che ricevono l'informazione nell'unità di tempo, debba dipendere in prima approssimazione da due fattori: a) l'intensità della fonte emittente, e b) il numero di coloro che ancora non sono "informati". Dunque, proprio come già visto:

$$\dot{N}(t) = a(m - N_t)$$

Supponendo che la decisione di acquisto sia contestuale alla ricezione dell'informazione la precedente equazione diventa "naturalmente" una teoria della distribuzione delle vendite.

### 3. Epidemiologia del modello di "pura imitazione"

Il secondo ingrediente fondamentale è quello che per esempio Mahajan e al. (1990, 1-2) fanno risalire alla seconda forma fondamentale di comunicazione e cioè alle "comunicazioni interpersonali" basate sulla "word of mouth". A differenza dell'effetto dei mass-media, che sotto le semplici assunzioni di cui prima (esempio: tutti guardano la televisione almeno una volta al giorno) "colpisce" tutta la popolazione in modo non selettivo, e quindi rappresentabile nella forma (2.4), quello dovuto alla comunicazione interpersonale dipende fondamentalmente: a) dai meccanismi sociali di incontro e frequentazione tra individui (segnatamente: dagli incontri tra coloro che già hanno adottato il nuovo prodotto e coloro che non l'hanno ancora fatto); b) dai meccanismi, profondamente epidemiologici in natura, di contagio ideazionale tra soggetti (quindi dalla disponibilità di chi ancora deve comprare nel farsi convincere da chi ha già comprato).

Il concorrere dei due meccanismi di contatto-incontro e di contagio rende il problema in esame del tutto simile al processo di trasmissione di una malattia infettiva, che nella sua forma più semplice non è altro che il processo dinamico con cui un agente infettivo si diffonde all'interno di una popolazione composta da individui suscettibili (coloro che pur non avendo ancora contratto l'agente infettivo sono però "a rischio" d'infezione: nel nostro caso coloro che ancora non hanno "adottato") ed individui infetti/vi (gli adottatori) per effetto dei particolari pattern di contatto esistenti tra gli individui della popolazione e delle caratteristiche epidemiologiche dell'agente infettivo. La principale novità legata all'introduzione del processo di interazione sociale tra gli  $m$  individui della popolazione è che ora, al minimo, dovremo scrivere:

$$\dot{N}(t) = f(N_t, (m - N_t)) \quad (3.1)$$

ad intendere che le vendite ad ogni istante del tempo sono l'esito di incontri tra coloro che hanno già comprato ( $N_t$ ) e coloro che non l'hanno ancora fatto ( $m - N_t$ ). Se ora pensiamo al processo di interazione sociale come ad un processo "omogeneo" (nessuno è escluso, indipendentemente dal fatto che abbia o meno adottato il prodotto) e perfettamente casuale, in cui ogni adottatore (infettivo) incontra in media  $\beta$  individui per unità di tempo, avremo che una proporzione  $(m - N(t))/m$  di questi incontri avverrà con individui suscettibili. Dunque ogni adottatore incontra in media  $\beta(m - N)/m$  suscettibili per unità di tempo. Supponiamo che "convinca" in media una frazione  $g$  tra questi. Ne segue quindi che gli  $N(t)$  adottatori presenti al tempo  $t$  convinceranno a comprare il prodotto un numero di individui pari approssimativamente a  $N(t)g\beta(m - N(t))/m$  per unità di tempo. Dunque, ragionevolmente:

$$\dot{N}(t) = \frac{q}{m} N(t)(m - N(t))^{11} \quad (3.2)$$

ove si è posto  $q = g\beta$ . La formulazione (3.2) costituisce uno dei più semplici esempi di modello matematico non lineare ed è una vecchia conoscenza per gli studiosi di popolazione: è la nota Ode logistica proposta già nel 1845 dal matematico belga P.F. Verhulst. Conviene trascriverla, per economia, ponendo  $q/m = r$ , ossia:

---

<sup>11</sup>In modo meno comportamentale possiamo pensare che tutti gli acquisti per imitazione nell'unità di tempo dipendano (attraverso un opportuno coefficiente) dal prodotto  $N(t)[m - N(t)]$ , che rappresenta il numero di tutti i possibili incontri al tempo  $t$  tra coloro che hanno già adottato e coloro che non l'hanno ancora fatto (e che, in un mondo in cui i contatti sociali avvengono in maniera casuale costituisce una frazione degli  $m(m-1)/2$  possibili incontri tra gli  $m$  individui). Questa è la ben nota ipotesi della "azione di massa", che ha lunga storia in epidemiologia matematica (Waltman 1975, 6).

$$\dot{N}(t) = rN(t)[m - N(t)]^{12} \quad (3.3)$$

Annotiamo subito che la forma della condizione iniziale appropriata per il problema (3.3) non può essere della forma solita ( $N(0)=0$ ) in quanto in tal caso la derivata che compare a primo membro sarebbe sempre identicamente nulla (impedendo la crescita delle vendite) a conferma del fatto intuitivo che nessun processo di infezione si può diffondere in assenza di materiale infetto. Completando quindi la (3.3) con l'ideale condizione iniziale  $N(0)=N_0>0$  (strettamente), otteniamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = rN(m - N) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

la cui soluzione, rappresentata graficamente in fig. 5, ha la tradizionale forma "ad S" a catturare un processo di crescita contraddistinto da un fase iniziale di crescita veloce (fase cosiddetta esponenziale) e che sperimenta da un certo punto in poi un'inversione di tendenza (sancita geometricamente dal punto di flesso della curva) che ne segna il passaggio ad un regime di crescita rallentata che si conclude, nondimeno, solo con la saturazione del mercato. La forma esplicita della legge soluzione di (3.4) è:

$$N(t) = \frac{N_0 m}{N_0 + (m - N_0)e^{-(rm)t}} \quad (3.5)$$

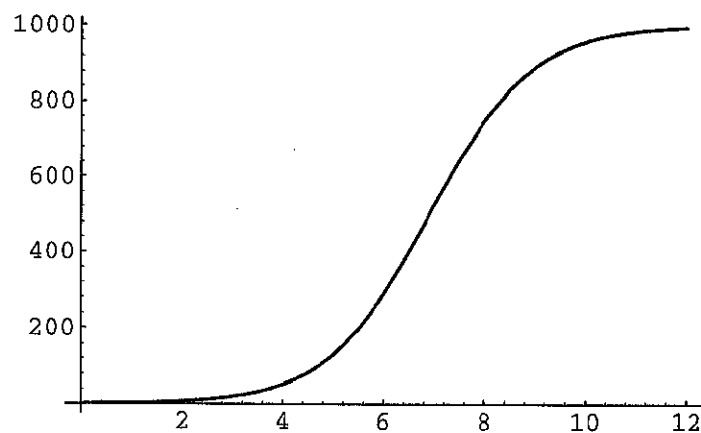


Fig. 5 Dinamica logistica delle vendite ( $r=0.001$ ,  $m=1000$ )

È molto importante non farsi spaventare da formule come l'ultima, decisamente esoterica, e cercare di trarne tutta l'informazione importante attraverso eventualmente l'incrocio di più strumenti. In effetti tutto quello che vorremmo sapere sul modello (3.4) è facilmente deducibile attraverso un'analisi di tipo "qualitativo" basata sulle seguenti considerazioni:

a) il mercato possiede soltanto due livelli di "equilibrio" (ossia valori in corrispondenza dei quali risulta  $\dot{N}(t) = 0$  a denotare "assenza di moto") delle vendite: il livello (banale)  $N=0$  e quello, chiaramente non banale,  $N=m$ , corrispondente alla completa saturazione del mercato stesso. La spontanea congettura è che il marchingegno che abbiamo costruito preveda una crescita nel tempo del numero di acquisti fino al raggiungimento del livello di saturazione - in cui chiaramente tale processo di crescita non può che arrestarsi -

<sup>12</sup>Il modello logistico in quanto modello di trasmissione per contagio interpersonale, di storia antica in campo epidemiologico (McKendrick 1912, Ross-Hudson 1916) è stato introdotto per la prima volta in teoria dell'innovazione nel noto studio di Mansfield (1961).

che come detto, costituisce l'equilibrio del sistema. Infatti come è immediato verificare (e per il momento è giusto quanto ci serve):

b)  $\dot{N}(t) = rN(m - N) > 0$  fintantochè  $N < m$ : ossia, fintantochè il mercato non è saturo le vendite tendono a continuare ad aumentare (detto altrimenti: le vendite sono comunque una funzione crescente del tempo fino alla saturazione del mercato). In particolare una volta che il mercato è stato saturato (il che avviene di nuovo solo asintoticamente) il processo dinamico da noi ipotizzato non ha più, per ipotesi, ragione di "continuare": un fatto "catturato" matematicamente dicendo appunto che  $N=m$  è l'equilibrio "di lungo periodo" del processo.

c)  $\ddot{N}(t) = \frac{d}{dt} \dot{N}(t) = r\dot{N}(m - 2N) > 0$  per  $N(t) < m/2$ , fatto che assicura la

presenza di un flesso (si veda la figura 5), ossia di un'inversione di tendenza nel processo di adozione, con il passaggio da una fase di crescita veloce ad una fase di crescita smorzata, quando il livello delle vendite ha raggiunto il 50% del pool acquirente ( $N=m/2$ ).

Una volta accettata la ragionevolezza del risultato trovato è opportuno attrezzarsi per farlo entrare a pieno diritto nella nostra cassetta degli strumenti. Questo richiede una padronanza dei suoi parametri fondamentali, che sono, a parte  $N_0$ , l'ampiezza  $m$  del mercato, di significato ormai ovvio, e il coefficiente  $r=q/m$ . Ora,  $q$  (che si noti bene possiede unità di misura  $t^{-1}$ ) è, in effetti il prodotto  $g\beta$ : ossia è il numero di soggetti "indecisi" (ossia: che non hanno ancora acquistato) che ogni individuo che ha già adottato il prodotto riesce a "convincere" nell'unità di tempo (per esempio in una settimana): quindi  $q$  è veramente interpretabile, grazie alla parametrizzazione da noi fornita, come un tasso di convincimento, ossia come un coefficiente di imitazione (e in effetti Bass (1969) lo definisce come tale ma senza darne una giustificazione del tipo dato in questa sede). Va notato a questo punto che il parametro "importante" del modello (3.3) è in effetti il prodotto  $rm$ , che "presiede" alla forma della soluzione (3.5) e che ha un significato notevole perchè rappresenta il tasso di crescita delle vendite nella primissima fase, quella di crescita veloce esponenziale. Ma  $rm=q!$  Cioè: il tasso di imitazione, che è in fondo il parametro cruciale del modello, quindi quello più importante da stimare, è anche un parametro "facilmente stimabile": basta disporre della serie storica dei dati della prima fase del processo di crescita delle vendite.

## 2. Stima del tasso di imitazione come stima del tasso di evoluzione esponenziale

Si può verificare che il comportamento della (3.5) nella "prima fase" (ossia: con  $N(t)$  ancora molto piccolo: "prossimo a zero") è approssimativamente di tipo esponenziale secondo la regola:

$$N(t) = N_0 e^{qt} \quad (3.6)$$

Per intuirlo basta osservare che per  $N$  "piccolo" il termine quadratico della (3.3) può essere trascurato: conta cioè solo il termine lineare che appunto genera il comportamento esponenziale.

Una stima del tasso di crescita di una legge esponenziale può essere effettuata in modo molto semplice sfruttandone la nota proprietà di crescita a tasso costante. Se infatti vale la (3.6) allora

$$N(t+h) = N_0 e^{q(t+h)} = e^{qh} N(t)$$

che mostra appunto come la funzione  $N$  cresca secondo un fattore costante su intervalli di tempo di ampiezza costante (banalmente: si raddoppia su intervalli di tempo di ampiezza data costante, si triplica su intervalli di tempo di ampiezza data costante ecc. E' quindi possibile, sfruttando questa prerogativa, definire varie regole per la stima di  $\alpha$ , la più semplice delle quali è basata sulla nozione di tempo di raddoppiamento, che richiede soltanto l'osservazione della durata  $h$  di un qualunque intervallo di tempo necessario a far sì che le vendite (cumulate) raddoppino in volume a partire da un certo istante  $t$  dato del tempo, ossia tale che:

$$N(t+h) = 2N(t)$$

Essendo  $h$  dato per ipotesi segue:

$$q = (\log 2)/h$$

L'uso di questo risultato è molto semplice: se per esempio il tempo di raddoppiamento fosse  $h=2$  settimane, ossia  $h=0.04$  (circa) per anno, allora il coefficiente di imitazione  $q$  sarebbe circa pari a 17 persone per anno.

La distribuzione temporale delle vendite associata alla legge cumulativa logistica può essere facilmente ottenuta per derivazione dalla curva cumulativa. Si può così verificare che la sua forma è quella della curva campanulare rappresentata in fig. 6, con un picco di vendite in  $N=m/2$ .

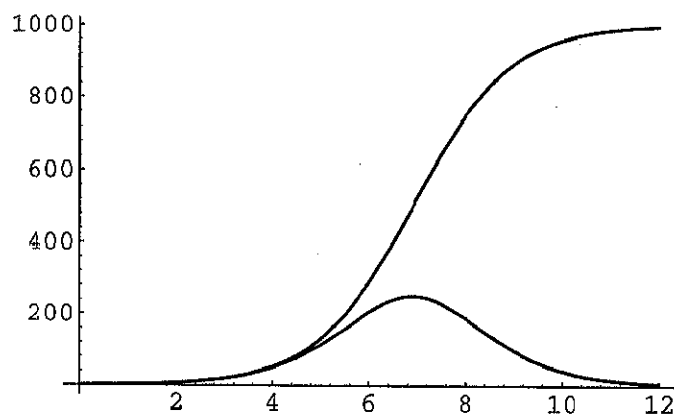


Fig. 6. Densità logistica delle vendite in visione simultanea con la corrispondente curva cumulativa ( $r=0.01$ ,  $m=1000$ )

#### 4. Il modello "standard" della teoria dell'innovazione

La diretta combinazione dei due meccanismi di diffusione dell'informazione finora presentati e cioè il meccanismo (2.4) di diffusione costante ("mass media") con il meccanismo (3.3) dovuto alle comunicazioni interpersonali, conduce con naturalezza a quello che abbiamo già definito come il modello standard della teoria dell'innovazione (Bass 1969, 215 sgg.).

Seguendo Bass diremo che in ogni istante del tempo la variazione  $\dot{N}(t)$  delle vendite può essere scomposta nella somma di due contributi indipendenti e cioè quello (che indicheremo con  $C_{Inn}(t)$ ) dovuto agli "innovatori", ossia quei soggetti "...che decidono di adottare un'innovazione indipendentemente dalle decisioni (di innovare) degli altri attori presenti nel sistema sociale", più quello residuale ( $C_{Im}(t)$ ) dovuto a tutti quei soggetti che prendono la decisione di adottare il nuovo prodotto perchè influenzati nella loro scelta da quella precedentemente fatta da altri individui, e che etichetteremo genericamente come "imitatori". Formalmente:

$$\dot{N}(t) = C_{Inn}(t) + C_{Im}(t) = p[m - N(t)] + \frac{q}{m} N(t)[m - N(t)] \quad (4.1)$$

ove appunto:

$$C_{Inn}(t) = p[m - N(t)] \quad ; \quad C_{Im}(t) = \frac{q}{m} N(t)[m - N(t)] \quad (4.2a,b)$$

in cui la distinzione tra le due categorie di individui dipende appunto dal fatto che i loro contributi siano originati o meno da incontri con altri soggetti (e non, si badi bene, dal fatto di venire prima o dopo temporalmente). Coerentemente Bass definisce il parametro  $p$ , da noi originariamente definito per semplicità tasso di acquisto", come *coefficiente di innovazione*, mentre  $q$  rimane a tutti gli effetti il *coefficiente di imitazione*. In questo senso siamo in grado di attribuire precise etichette ai modelli elementari da noi incontrati e che costituiscono le componenti del modello di Bass: potremmo dire che (2.4) - il modello esponenziale - è un *modello di pura innovazione*, mentre (3.5) un modello di *pura imitazione*.

Prima di procedere, come abbiamo ormai imparato, alla risoluzione del modello, alla ricerca di risultati non evidenti, è però opportuno tirare rapidamente le fila del discorso svolto, andando a recapitolare le varie differenti assunzioni retrostanti il modello di Bass. Questo è utile per essere sicuri di avere ben chiaro l'oggetto del discorso e soprattutto le condizioni sotto cui è ragionevole servirsene. In effetti il procedimento, tutto sommato semplice e diretto, con cui abbiamo derivato le equazioni dei vari modelli, non deve farci dimenticare che esse sono in realtà il risultato (più o meno consapevole) di un processo di astrazione con cui abbiamo deciso che soltanto alcuni ingredienti del mondo erano meritevoli di far parte della nostra rappresentazione. Elenchiamo quindi, a scopo riepilogativo, le varie assunzioni che esplicitamente o implicitamente consentono una rappresentazione del mondo come quella del modello (4.1), il cui obiettivo di base è quello di fornire un ragionevole meccanismo comportamentale per la spiegazione della distribuzione temporale delle (prime) vendite di un nuovo prodotto ("innovation") in un "social medium" costante, e fondato, quale assunzione centrale, sull'esistenza di due differenti atteggiamenti psicologici nei confronti delle novità.

### 3. Assunzioni del modello di Bass

a) E' un modello per beni di consumo durevoli (o comunque "infrequently purchased products")

b) Nessun individuo acquista più di un "pezzo" lungo l'orizzonte temporale di interesse. Diciamo che si tratta di un modello di spiegazione del primo acquisto ("first purchase models"): sono esclusi eventuali acquisti successivi per "sostituzione". Per dirla alla Bass restringeremo i nostri interessi a quell'intervallo di tempo, nel corso del ciclo di vita del prodotto, in cui le vendite per rimpiazzo non sono ancora cominciate. Questo permette l'identificazione tra numero di adottatori e numero di pezzi venduti.

c) La popolazione (Mahajan e al., 1990a, parlano del "sistema sociale" in cui il processo di innovazione è "immerso"), quindi il mercato dei possibili acquirenti è costante e composto da  $m$  individui. Questa è un'ipotesi fortemente semplificatrice, giustificata dal fatto che consente di ottenere un risultato particolarmente semplice ed elegante (e restando comunque in linea con il tipico atteggiamento dell'economia). E' chiaro che è giustificabile solo in situazioni in cui il processo di diffusione del nuovo prodotto si verifica con una scala temporale sufficientemente breve da rendere trascurabili interferenze con le variabili di tipo demografico e/o situazioni in cui il sistema economico circostante si mantiene più o meno costante (è chiaro che  $m$  può essere influenzato in modo importante dalle variazioni nei prezzi, nel tenore di vita e così via).

d) La popolazione degli acquirenti non è omogenea ma suddivisa in due distinte categorie in base all'atteggiamento psicologico nei confronti delle novità:

1) gli innovatori: coloro che decidono di acquistare una novità in maniera autonoma, indipendentemente dalle decisioni prese sullo stesso soggetto dagli altri attori presenti nel sistema sociale. Nell'approccio tradizionale (Rogers 1983, 247 sgg) gli innovatori sono (temporalmente) i "primi adottatori" di una novità: ma come vedremo ciò non è affatto necessario nel modello di Bass.

2) gli imitatori: coloro che al contrario degli innovatori non sono indipendenti nelle loro decisioni di acquisto dalle "pressioni" esistenti nel sistema sociale. Nel modello di Bass in effetti gli imitatori sono una categoria residuale: tutti coloro che non sono innovatori sono imitatori.

Un modo per distinguere le due categorie consiste nel connetterle ai possibili canali di comunicazione esistenti nel sistema sociale. Utilizzando la tradizionale suddivisione tra "mass media" (fonti di comunicazione esterne) e sistemi di comunicazione interpersonali ("interne") possiamo pensare che siano innovatori soprattutto coloro la cui decisione di acquisto dipende soprattutto dall'informazione esterna e imitatori gli altri.

e) L'ambiente non discrimina sulle possibilità di interazione sociale tra individui: il processo di contatto è omogeneo e perfettamente casuale.

La forma della soluzione generale del modello di Bass (cioè della (4.1)), completato dalla condizione iniziale  $N(0)=0$ <sup>13</sup>, è quella della curva cumulata riportata in fig. 7a, che assomiglia molto, almeno qualitativamente, a quella della legge logistica. Ad essa corrisponde la distribuzione temporale di fig. 7b.<sup>14</sup>

<sup>13</sup> Annotiamo così che il modello di Bass risolve la difficoltà del modello logistico di pura imitazione, che richiedeva una condizione iniziale strettamente positiva.

<sup>14</sup> In realtà assomiglia ad una logistica "troncata": quindi anche ad una normale troncata: questo restituisce, a posteriori, una certa dignità all'approccio "normale" tradizionale (Mahajan 1990 b).



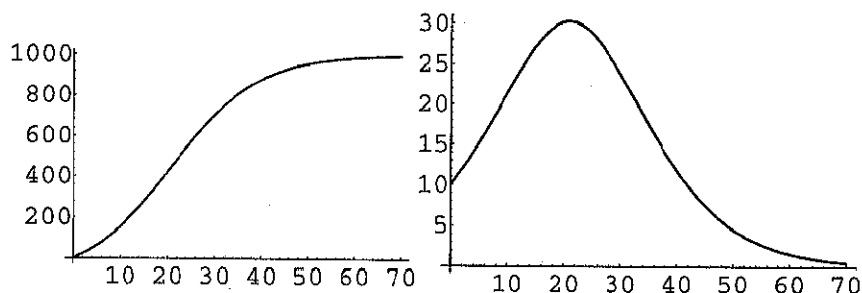


Fig. 7 (a) e b)). Curva cumulativa e distribuzione temporale delle vendite nel modello di Bass ( $r=0.01$ ,  $q=0.1$ ,  $m=1000$ )

Tale soluzione può essere determinata in forma esplicita (e senza troppe difficoltà). Abbiamo però visto che il ragionamento “qualitativo”, come utilizzato per lo studio dell’equazione logistica, ci consente di derivare le stesse informazioni contenute nella soluzione in maniera facile, cogliendo molto meglio, al tempo stesso, i meccanismi economici retrostanti le principali proprietà dinamiche del processo evolutivo. Visto che siamo perfettamente attrezzati per farlo procediamo quindi ad uno studio qualitativo della dinamica del modello di Bass. E’ immediato verificare che il modello possiede soltanto un punto di equilibrio, che è non banale, dato dal livello di saturazione  $m$ . Inoltre:

a)  $\dot{N}(t) > 0$  fintantochè  $N < m$ : ossia, come nei modelli precedenti, fintantochè il mercato non è saturo le vendite continuano ad aumentare.

c)  $\ddot{N}(t) = \dot{N}(t) \left[ (q - p) - 2 \frac{q}{m} N \right]$ , fatto che, a differenza del modello logistico, ci

mostra che la presenza del flesso, ossia del punto di inversione di tendenza nel processo di adozione, non è un fatto necessario ma dipende dal segno del coefficiente  $(q-p)$ . Questo ci obbliga a riaggiornare la nostra osservazione precedente: la soluzione del modello di Bass è quindi in effetti più generale di una curva logistica (cioè: esibisce una più vasta gamma di comportamenti: questo dovevamo aspettarcelo dalla maggiore generalità della formulazione (4.1) rispetto a quella dell’equazione logistica)

Per l’esattezza l’inversione di tendenza compare solo se  $(q-p)$  è strettamente positivo, ossia solo se il coefficiente di imitazione è più importante del coefficiente di innovazione, come generalmente succede sempre (Mahajan e al 1993). Questo è intuitivo: se così non fosse vorrebbe dire che nell’ambito del modello è preponderante la componente dovuta all’azione degli innovatori, che come ricordiamo non possiede flesso (fig. 2). Anzi: questa presenza/assenza dell’inversione di tendenza fornisce un semplice ed utile test per stabilire se il pool dei possibili acquirenti è composto soprattutto da innovatori piuttosto che da imitatori. Precisiamo subito però che queste annotazioni sono di stampo puramente teorico: in genere la realtà ci mostra dei tassi di imitazione di gran lunga più grandi dei corrispondenti tassi di imitazione, come illustrato nella seguente tabella:

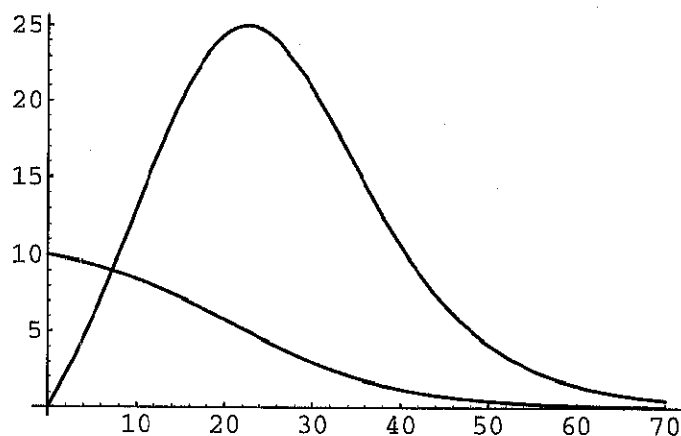
Tabella 2: tassi di imitazione ( $q$ ) e di innovazione stimati mediante il modello di Bass (Fonte:

Settore							
q							
p							

Bisogna però riconoscere che quanto scoperto finora attraverso la soluzione del modello è, certo, importante: ci dice con precisione quale sarà la dinamica conseguente alla “miscelazione” dei due atteggiamenti psicologici fondamentali, ma non è completamente soddisfacente. Infatti nulla ci è detto, dalla pura ispezione delle curve di fig. 7, su come siano distribuiti i mutui ruoli di innovatori ed imitatori nel corso del processo di adozione.

Ed abbiamo già capito che sono ruoli fondamentali, nel senso che la stessa forma complessiva del processo dipenderà dal “peso” dei due ruoli. Le figura 8, che disaggrega la dinamica complessiva nei due contributi separati di innovatori ed imitatori, ci racconta in dettaglio le proprietà del modello di Bass: una sua interpretazione alla luce dei meccanismi operanti è quindi fondamentale per la comprensione fine dei meccanismi di funzionamento del modello.

Possiamo così osservare come (fig. 8) nella prima fase del processo di adozione il ruolo degli innovatori è preponderante (in realtà questo dipende poi dall’ampiezza del rapporto numerico tra  $q$  e  $p$ ) ma si riduce monotonicamente al passare del tempo. Viceversa il ruolo degli imitatori, inizialmente trascurabile, aumenta molto in fretta, scavalca quello degli innovatori e raggiunge un picco, prima di essere riassorbito. La figura illustra anche come la distinzione tra le due categorie di adottatori non abbia nulla a che vedere con aspetti di priorità temporale: ogni intervallo di tempo prima della saturazione del mercato “contiene” acquisti da parte di soggetti di entrambe le categorie. Per questo motivo recenti tentativi di inquadramento teorico dello schema di Bass (Mahajan e al. 1990a, 5; Mahajan e al. 1993) nell’ambito dell’approccio tradizionale hanno sostituito la tradizionale distinzione tra innovatori ed imitatori con quella tra, rispettivamente, “adottatori per influenza esterna” ed “adottatori per influenza interna”, attribuendo il ruolo di “véritable innovateurs” al solo contingente iniziale associato alla densità iniziale ( $p_m$ ) di adottatori.



*Fig. 8. Disaggregando il ruolo di imitatori ed innovatori nel modello di Bass: le distribuzioni temporali delle adozioni*

Ognuno di queste informazioni può essere comunque facilmente riderivata, con un po' di pazienza, dalla manipolazione della soluzione esplicita del modello (riquadri 4 e 5).

#### 4. Aspetti "tecnici" del modello di Bass

L'espressione della soluzione al modello (4.1), rappresentata in fig. 7a sotto la condizione iniziale  $N(0)=0$  è:

$$N(t) = m \cdot \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (4.3)$$

La (4.3) quindi dipende dai due "parametri importanti"  $P=p+q$  e  $Q=q/p$  (rispettivamente somma e quoziente dei coefficienti di imitazione ed innovazione). Conviene trascriverla come:

$$N(t) = m \cdot \frac{1 - e^{-Pt}}{1 + Q \cdot e^{-Pt}} \quad (4.4)$$

Come già osservato la (4.3) è curva di forma più generale della logistica ed esibirà il flesso rappresentativo dell'inversione di tendenza nel processo di adozione solo per  $Q$  maggiore di uno, ossia solo quando il coefficiente di imitazione prevale su quello di innovazione, facendo così preponderare nella dinamica la componente logistica (che come noto presenta inversione di tendenza). In particolare tale inversione di tendenza si manifesta alla data:

$$T^* = \frac{1}{P} \log Q = -\frac{1}{p+q} \log \frac{p}{q} \quad \text{con: } N(T^*) = \frac{m}{2} \frac{Q-1}{Q} \quad (4.5)$$

Le quantità (4.5) possono essere stimate in presenza di una stima dei due parametri comportamentali  $p$  e  $q$ . Il flesso della curva cumulata corrisponde, quando esiste, al picco della distribuzione temporale delle vendite, ottenibile derivando  $N(t)$  rispetto al tempo:

$$S(t) = \dot{N}(t) = m \cdot \frac{p(p+q)^2 e^{-(p+q)t}}{[p + qe^{-(p+q)t}]^2} = mP(1+Q) \frac{e^{-Pt}}{[1 + Qe^{-Pt}]^2} \quad (4.6)$$

(e naturalmente se  $Q < 1$  la distribuzione  $S$  sarà monotonicamente decrescente, ossia senza picco). Il contributo degli innovatori (e per conseguenza quello degli imitatori) alla dinamica in ogni istante nel tempo è ottenibile introducendo la (4.3) nella:

$$C_{\text{inn}}(t) = p \cdot [m - N(t)]$$

ottenendo:

$$C_{\text{inn}}(t) = pm \cdot \left[ 1 - \frac{1 - e^{-Pt}}{1 + Qe^{-Pt}} \right] = pm \cdot \left[ 1 - \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \right] \quad (4.7)$$

mentre il loro contributo alle vendite cumulate in  $(0,t)$  è ottenibile integrando la (4.7) su tutto tale intervallo. Risulta:

$$N_{\text{inn}}(t) = m \frac{p}{q} \log \left( \frac{1 + \frac{q}{p}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \right) \quad (4.8)$$

Partendo dalle (4.7) e (4.8) possiamo risalire ai contributi degli imitatori per differenza rispetto ad  $N(t)$ .

### Analizzando i ruoli separati di innovatori ed imitatori

La forma della distribuzione temporale dei contributi degli innovatori,  $C_{Inn}(t)$ , è facilmente giustificabile mediante il nostro solito apparato qualitativo. Siccome:

$$C_{Inn}(t) = p \cdot [m - N(t)]$$

ne segue che tutte le proprietà di  $C_{Inn}(t)$  sono facilmente deducibili da quelle di  $N(t)$ . Otteniamo così subito che:

$$a) C_{Inn}(0) = p[m - N(0)] = pm$$

$$b) C_{Inn}(\infty) = 0$$

$$c) \frac{d}{dt} [C_{Inn}(t)] = \dot{C}_{Inn}(t) = -p \cdot \dot{N}(t) < 0 \text{ sempre} \quad d) \ddot{C}_{Inn}(t) = -p \cdot \ddot{N}(t)$$

$$e) F_1(\infty) = \frac{P}{q} \log\left(1 + \frac{q}{p}\right) = \frac{1}{Q} \log(1 + Q)$$

La quantità  $C_{Inn}(0) = pm$ , densità iniziale di compratori (tutti del gruppo innovatore), è una stima del potenziale innovativo iniziale: come detto in precedenza Mahajan e al. (1990a) preferiscono riservare la definizione di “veri innovatori” per questo selezionatissimo contingente. L'ultima relazione afferma che la curva  $C_{Inn}(t)$  possiederà dei punti di flesso, come in effetti succede nella figura 9, soltanto se li possiede la curva cumulata delle vendite  $N(t)$ : dunque, al solito, se è soddisfatta la condizione  $Q > 1$ . Quindi, all'opposto, se  $N(t)$  non possiede flessi nemmeno  $C_{Inn}(t)$  ne avrà, assumendo la tradizionale forma a concavità verso l'alto tipica della curva esponenziale negativa: tutto davvero mirabilmente coerente. Viceversa se  $N$  possiede flesso anche  $C_{Inn}(t)$  lo possiede, nella forma rappresentata in fig. 9. Infine la e) ci fornisce il “peso finale” (asintotico) degli innovatori sul totale della vendite di lungo periodo ( $m$ ).

La parametrizzazione basata su  $P$  e  $Q$  ben si presta al fine di disaggregare i ruoli di innovatori ed imitatori. Una strategia semplice a tal fine consiste nel controllare i movimenti mutui delle curve corrispondenti  $C_{Inn}(t)$  e  $C_{Im}(t)$ , fissato il ruolo cumulativo dei due gruppi al variare del parametro  $Q = q/p$ , tenendo fisso  $P = p + q$ , ovvero il coefficiente “totale” di adozione del mercato.

## 6. Una giustificazione demografica

La teoria, tipicamente demografica, della "sopravvivenza", provvede il retroterra appropriato per una giustificazione alternativa alla formulazione base (4.1), andando a riguardare il processo di "primo acquisto" come un classico processo di eliminazione (per l'esattezza l'eliminazione di una coorte di acquirenti per effetto dell'adozione). L'ingrediente di base è in questo caso fornito dalla cd distribuzione di probabilità dei tempi di acquisto: supponiamo cioè che ognuno degli  $m$  compratori sia "attrezzato" con la sua propria distribuzione  $f_T(t)$  della "data di acquisto"  $T$  che assegna la probabilità che egli ha di adottare il prodotto tra due generiche date  $t_0$  e  $t_1$  comprese nell'orizzonte temporale di interesse. Per l'esattezza:

$$\Pr\{L'acquisto\ viene\ effettuato\ durante\ (t_0, t_1)\} = \Pr\{t_0 < T < t_1\} = \int_{t_0}^{t_1} f_T(t) dt \quad (5.1)$$

Il naturale correlato empirico di questa distribuzione di probabilità non è altro, si noti bene, che la curva osservata di distribuzione temporale delle vendite, incontrata alle pagine precedenti. A partire dalla (5.1) è possibile definire varie grandezze importanti nel processo di adozione e cioè innanzi tutto le funzioni di ripartizione e di sopravvivenza, definite rispettivamente come:

$$F(t) = \int_0^t f_T(u) du \quad e: \quad \Pi(t) = 1 - F(t) \quad (5.2)$$

ed esprimenti rispettivamente le probabilità che l'adozione avvenga prima o dopo una certa data prefissata  $t$ . Grazie ad esse la probabilità (5.1) può essere annotata come:

$$\Pr\{t_0 < T < t_1\} = \int_{t_0}^{t_1} f_T(t) dt = F(t_1) - F(t_0) = \Pi(t_0) - \Pi(t_1) \quad (5.3)$$

Si può dimostrare a questo punto che, ricorrendo ad ipotesi "probabilistiche" assolutamente ragionevoli, è possibile derivare un'equazione differenziale per la funzione  $F(t)$  (e quindi per conseguenza è possibile determinare tutte le altre funzioni importanti,  $f$ ,  $\Pi$ , ecc) assolutamente equivalente all'equazione fondamentale del modello di Bass. Il rito formale tipico dei probabilisti consiste in questo caso nel passaggio attraverso la probabilità condizionata che l'acquisto venga effettuato durante  $(t, t+h)$  noto che si verifica dopo l'istante di  $t$  (è un tipico modo per "dinamizzare" la funzione  $F$ ), data per definizione da:

$$\Pr\{t < T < t+h | T > t\} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} \quad (5.4a)$$

Se ora assumiamo che tale probabilità condizionata dipenda dal numero di acquisti già effettuati secondo la regola:

$$\Pr\{t < T < t+h | T > t\} = f(N_t) h = o(h) \quad (5.4b)$$

uguagliando la (5.4a) con la (5.4b) e passando al limite per  $h$  tendente a zero, otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{F'(t)}{[1 - F(t)]} = f(N_t) \quad (5.5)$$

La (5.5) contiene come suo caso particolare anche il modello di Bass quando assumiamo esplicitamente che la funzione  $f$ , che definisce la probabilità condizionata di acquisto, abbia forma lineare. Seguendo Bass: "The probability that an initial purchase will be made at  $t$

given that no purchase has yet been made is a linear function of the number of previous buyers:

$$f(N_t) = p + \frac{q}{m} N(t) \quad (5.6)$$

L'ultima espressione aggiunge un'ulteriore pietra alla comprensione del nostro edificio: in base ad essa la probabilità condizionata di acquisto da parte di un qualunque individuo del pool degli acquirenti è somma di due componenti, di cui una dipendente dal numero di individui che hanno già adottato (quindi riflettente l'effetto imitazione) mentre l'altra è costante e quindi non dipende da comportamenti di tipo imitatorio. Introducendo la (5.6) nella (5.5) otteniamo definitivamente:

$$\dot{F}(t) = [1 - F(t)] \left[ p + \frac{q}{m} N(t) \right] \quad (5.7)$$

che riesplicitata in termini di  $N(t)$  (ossia mediante la relazione  $N(t)=mF(t)$ ) ci fornisce l'equazione base del modello di Bass.

#### Nota bibliografica

- Bartholomew** (1973), *Stochastic Models for Social Processes*, Wiley
- Bass F.** (1969), A New Product Growth for Model Consumer Durables, *Management Science*, Vol. 15, n.5, 215-227
- Dietz K.** (1967), Epidemics and Rumors: a Survey, *J. Royal Stat. Society*
- Fourt L.A., Woodlock J.W.** (1960), "Early predictions of market success for new grocery products, *Journal of Marketing*, Vol. 26, 2
- Mahajan V., Muller E.** (1979), Innovation Diffusion and New Product Growth Models in Marketing, *Journal of Marketing*, Vol. 43, 55-68
- Mahajan V., Muller E., Bass F.** (1990a), New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research, *Journal of Marketing*, vol. 54, 1, 1-26
- Mahajan V., Muller E., Srivastava R.K.** (1990b), Determination of Adopters Categories by using Innovation Diffusion Models, *Journal of Marketing Research*, Vol. 27, 2, 37-50
- Mahajan V., Muller E., Bass F.** (1993), New Product Diffusion Models, in Eliashberg J, Lilien G.L. (Eds.), *Handbook in Oper. Res. and Marketing Sciences*, Vol. 5, Elsevier
- Mansfield E.** (1961), Technical Change and the Rate of Imitation, *Econometrica*, Vol. 29, 4, 741-765
- McKendrick A.G.** (1912), Diffusion of epidemics, contributo discusso nel corso della riunione
- Rogers E.M.** (1983), *Diffusion of innovations*, New York, The Free Press
- Ross R., Hudson H.** (1916, 1917), Contributions to the Theory of an "A Priori Pathometry", *Proceedings of the Royal Society of London*,
- Tuma N.B., Hannan M.** (1984), *Social Dynamics*, Academic Press, Orlando San Diego New York
- Waltman P.** (1974), *Deterministic threshold models in epidemiology*, Springer Verlag