

**Report n. 110**

**Un modello classico di ciclo nella crescita  
con offerta di lavoro endogena**

**Luciano Fanti e Piero Manfredi**

Pisa, July 1996

## Un modello classico di ciclo nella crescita con offerta di lavoro endogena

*Luciano Fanti\* e Piero Manfredi\*\**

*\*Dipartimento di Scienze Economiche  
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa*

*\*\* Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia  
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa*

### **Abstract**

In questo lavoro viene affrontato, nell'ambito del modello di Goodwin, il problema della generazione di dinamiche cicliche persistenti a seguito di un'esplicita endogeneizzazione della componente demografica. Sono prese in considerazione due varianti del modello di Goodwin in cui il tasso di crescita dell'offerta di lavoro viene fatto dipendere dagli stati passati dell'occupazione, secondo due tipiche formulazioni del meccanismo di ritardo. Quando la struttura del peso del ritardo è del tipo "a gobba", il che equivale a pesare di più il passato "antico" di quello recente, è possibile osservare la comparsa di oscillazioni persistenti attraverso il meccanismo delle biforcazioni di Hopf. Questo risultato porta evidenza a favore del fatto che il ritardo, legato a fattori di età, con cui le nuove generazioni appaiono sul mercato del lavoro, possa essere uno dei responsabili della fluttuazione demoeconomica.

J.E.L. classification: J0, E3

# Un modello classico di ciclo nella crescita con offerta di lavoro endogena

*Luciano Fanti\* e Piero Manfredi\*\**

*\*Dipartimento di Scienze Economiche  
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa-*

*\*\* Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia  
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa-*

## 1. Introduzione

Esistono molti lavori che formulano modelli economici di crescita della popolazione di tipo "endogeno", ipotizzando che la fertilità sia variabile con le variazioni dell'ambiente economico, sia sulla base dell'ormai classico modello di crescita economica di Solow o dei più recenti modelli di crescita endogena (Becker e Barro 1988; Barro e Becker, 1989).

In generale le relazioni fra tasso di crescita della popolazione e variabili economiche sono modellate con meccanismi di 'feedback' caratterizzati da nonlinearità sufficienti a generare cicli nella dinamica della popolazione. Secondo il pionieristico lavoro di Easterlin (1961, 1980) i cicli della popolazione osservati in questo secolo negli Usa e in altri paesi sviluppati (e che prendono anche il nome di cicli di Easterlin) dipendono sostanzialmente da due fattori, uno specificamente "economico", l'altro 'endogeno' alla dinamica stessa della popolazione. In particolare il primo, che qui ci riguarda<sup>1</sup>, può essere compendiato dal funzionamento del mercato del lavoro, comprendendo in esso in modo distinto il lato della domanda e dell'offerta e la doppia interazione che le decisioni di fertilità hanno con tale mercato: da un lato la fertilità dipende dalle condizioni del mercato (per esempio dal salario che ne risulta), dall'altro agisce su di esso (per esempio attraverso le variazioni della potenziale offerta di lavoro). Cruciale in questa ipotesi di spiegazione della dinamica demoeconomica è la misura della popolazione in età fertile; tale crucialità dipende dalla seguente catena causale: l'ampiezza di tale

---

<sup>1</sup> Naturalmente vi sono numerosi studi in grado di spiegare gli aspetti ciclici nella dinamica di popolazione basati esclusivamente sul secondo fattore invocato da Easterlin. Tra questi contributi ricordiamo Frauenthal e Swick (1983), Tuljapurkar (1987), Wachter e Lee (1989). Questi contributi non saranno però oggetto di ulteriore discussione in questa sede in quanto basati su dei modelli puramente demografici, che non considerano variabili economiche.

popolazione influenza il benessere (salario) relativo della medesima, nel senso che più elevata è la popolazione corrente ovviamente minore sarà il reddito potenziale di ciascun membro di essa, ed il reddito potenziale influenza così le scelte di fertilità. Infatti se eccessiva popolazione corrente (rispetto a quella passata) significa reddito corrente minore (rispetto a quello passato) a causa della maggior competizione sul mercato del lavoro, questo implica una diminuita fertilità, poiché si ritiene che i genitori siano impegnati a mantenere per sé stessi il precedente standard di vita, ovvero quello standard vissuto quando erano a loro volta figli, e per conseguenza le nascite passate influenzano la fertilità corrente e quindi le nascite correnti e quelle future. Insomma alla fine risulta, prescindendo dalla mediazione dell'ambiente economico, una relazione diretta fra misura della popolazione fertile corrente e livello della fertilità, che è come dire che le nascite passate influenzano le nascite correnti. In questo modo la modellazione può fare a meno di esplicitare alcuna variabile economica in quanto l'effetto dell'economia, più esattamente del benessere "relativo" fra generazioni, anziché passare da misure del salario od altro, può essere espresso dal rapporto fra la grandezza delle diverse generazioni. Seguendo questa strada anche il modello di un economista come Samuelson (1976) non contiene alcuna variabile economica ma soltanto l'interazione demografica di due generazioni sovrapposte<sup>2</sup>. Una volta definita la transizione da uno stato all'altro attraverso una funzione di sopravvivenza, per cui i mutamenti in una generazione sono il risultato della differenza fra i sopravvissuti della generazione precedente ed i deceduti più i passati alla generazione successiva, l'assunzione à la Easterlin così come modellata fra gli altri da Samuelson è sufficiente ad introdurre nel sistema dinamico una non linearità per cui con certi valori dei parametri la dinamica della popolazione può essere ciclica attorno ad un rapporto stabile di lungo periodo delle due generazioni<sup>3</sup>.

Noi riteniamo che anche un modello tipicamente costruito per analizzare il ciclo e la crescita economica come quello di Goodwin (1967) possa, endogeneizzando opportunamente la crescita della popolazione, tenere conto della interazione intercorrente in una duplice direzione fra fertilità e mercato del lavoro e dell'influenza della fertilità passata su quella corrente, con il vantaggio, da un lato, di non dover ricorrere ad un modello con esplicita struttura d'età (e relative

---

<sup>2</sup> Come riportato anche in Feichtinger e Sorger (1989, 269), infatti Samuelson (1976, 244) assume che "*when the ratio  $n_1/n_2$  (annotiamo noi che  $n_1$  ed  $n_2$  sono le ampiezze delle due "generazioni" coinvolte, così che il loro rapporto è semplicemente una misura della loro ampiezza relativa) is high, the relative incomes of those of prime childbearing ages may be expected to be low and insecure, so that their fertility rates is assumed by Easterlin to be a declining function of the ratio  $n_1/n_2$* ".

<sup>3</sup> Per quanto riguarda la rilevanza empirica della teoria di Easterlin rispetto alla realtà italiana, ricordiamo le conclusioni dell'analisi di Malerba (1990): "... ci sembra comunque possibile affermare che il modello proposto da Easterlin trovi una sua corrispondenza nello spiegare il legame fra mercato del lavoro, dinamiche demografiche ed evoluzione della struttura familiare in relazione all'ultimo ventennio, pur mancando la possibilità di effettuare una verifica di lungo periodo".

difficoltà analitiche) e dall'altro, di esplicitare invece al meglio la relazione demoeconomica, nascosta invece nelle applicazioni come quella di Samuelson, ove le variabili economiche sono assenti, generando possibili comportamenti oscillatori dell'economia e quindi anche della popolazione<sup>4</sup>.

Invece dell'originario modello di Goodwin viene considerata in questa sede una sua variante che considera endogena la variazione della popolazione (che può essere anche tranquillamente intesa come offerta di lavoro), facendo dipendere quest'ultima in modo lineare dal tasso di occupazione e che trasforma il ciclo strutturalmente instabile di Goodwin in un sentiero convergente all'equilibrio. In questo caso possiamo dimostrare come, in dipendenza delle assunzioni sulla forma del ritardo con cui l'occupazione agisce sulla popolazione (offerta di lavoro) sia possibile o conservare la stabilità (locale) dell'equilibrio di lungo periodo oppure generare comportamenti dinamici più complessi dai quali può emergere un ciclo strutturalmente stabile. In particolare vedremo come un ritardo in cui pesi in modo maggiore il passato recente conserva sempre la stabilità del sistema; se invece nel ritardo passato esiste un picco che abbia un sostanziale effetto sull'offerta di lavoro corrente (simile quindi all'effetto per esempio di un 'baby-boom') allora si può generare un allontanamento a 'spirale' dall'equilibrio ed una convergenza ad un ciclo limite.

## **2. Effetti demografici, effetti di offerta di lavoro e ritardi: alcune possibili estensioni del modello di Goodwin**

Il classico modello di crescita con ciclo di Goodwin (1967) spiega il processo di sviluppo dell'economia in funzione dell'interazione tra la dinamica del mercato del lavoro e quella della sfera distributiva, per l'esattezza in funzione della relazione, di natura predatoria, tra la quota salari e l'occupazione. Si indichino con  $U=L/N$  il tasso di occupazione dell'economia, definito come rapporto tra il livello di occupazione effettiva  $L$  e l'offerta di lavoro  $N$  (eventualmente stimabile mediante la popolazione totale), e con  $V=wL/Q$  la quota distributiva del lavoro, ove  $Q=AL$  è il livello della produzione dell'economia per unità di tempo,  $A$  la produttività media del lavoro e  $w$  è il saggio di salario reale. Il modello di Goodwin è facilmente derivato a partire dalle seguenti identità dinamiche (esprimenti in termini di tassi di crescita le precedenti relazioni):

---

<sup>4</sup> In questo modello demoeconomico sono considerati soltanto gli effetti demografici sul mercato del lavoro. Ovviamente vi possono essere rilevanti effetti demografici anche su altre variabili economiche, quali il tasso di risparmio e quindi il tasso d'interesse. Per una verifica dell'influenza demografica su molti aspetti del comportamento economico vedi, oltre alla lucida analisi di Easterlin (1980), anche McMillan-Baesel (1990).

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{A}}{A} \\ \frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{N}}{N} \right) \end{cases} \quad (1)$$

introducendovi le seguenti ipotesi:

i) la dinamica salariale è espressa da una relazione alla Phillips tra tasso di crescita del salario ( $w$ ) e tasso di occupazione, della forma:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho U \quad \gamma, \rho > 0 \quad \rho > \gamma$$

ii) la sfera della produzione è regolata dalle seguenti assunzioni: a) i profitti sono sempre interamente reinvestiti; b) non esiste risparmio da parte dei lavoratori; c) la tecnologia è di tipo Leontiev, senza restrizioni nella disponibilità di lavoro, d) il rapporto prodotto-capitale è costante e pari ad  $m > 0$ . Combinando a), b), c), d) è facile verificare come valga la relazione:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = m(1 - V)$$

iii) i motori della crescita sono la crescita esogena dell'offerta di lavoro, al tasso costante  $n > 0$ , e della produttività media del lavoro, al tasso costante  $\alpha > 0$ .

Introducendo nelle identità (1) le ipotesi i), ii), iii) perveniamo alla formulazione definitiva del modello di Goodwin:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = m - \alpha - n - mV \end{cases} \quad (2)$$

che come noto è un classico modello di interazione preda-predatore alla Lotka-Volterra ed esibisce quindi le note dinamiche di tipo conservativo. Annotiamo come in virtù della definizione delle variabili  $U, V$  la dinamica del sistema (2) sia teoricamente<sup>5</sup> confinata nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

<sup>5</sup> In effetti a partire da certe condizioni iniziali il sistema può raggiungere il bordo dello spazio delle fasi. In tal caso compare una difformità di trattamento: mentre la barriera della popolazione totale è invalicabile, e quindi per  $U=1$  il sistema è costretto a muoversi sul bordo, questo non appare necessariamente vero nel caso della quota salari, che può eventualmente "sfondare" (si veda anche Gandolfo 1972).

Una strada naturale per endogeneizzare la dinamica demografica, o il processo di formazione dell'offerta di lavoro, assunti esogeni nel modello di Goodwin, consiste nell'assumere che il tasso di crescita dell'offerta di lavoro, o della popolazione,  $\dot{N}(t)/N(t) = n(t)$ , sia linearmente correlato al tasso di occupazione,  $U=U(t)$ . Questo legame funzionale può riflettere (si veda la discussione in Manfredi e Fanti 1996a, Fanti e Manfredi 1997a,b) sia: i) l'esistenza del noto "effetto scoraggiamento" (Mincer 1966), sia ii) una relazione fra benessere economico (di cui sarebbe proxy il tasso di occupazione) e natalità, sia iii) l'esistenza di comportamenti demografici differenziali tra occupati e disoccupati, sia, infine: iv) una combinazione di questi effetti. Per semplicità assumeremo una relazione di tipo lineare della forma:

$$\frac{\dot{N}}{N} = nU \quad (3)$$

Chiaramente la interpretazione del parametro  $n$  e quindi anche il suo ordine di grandezza dipende dalla specifica ipotesi demoeconomica retrostante. Per esempio scegliendo la strada i) sopra menzionata  $n$  rappresenterebbe essenzialmente un coefficiente di reattività dei saggi di variazione del tasso di offerta di lavoro al variare del livello dell'occupazione. Viceversa nell'interpretazione più strettamente demografica potrebbe rappresentare il tasso di crescita differenziale tra i sottogruppi di popolazione occupata (che quindi percepisce un reddito) e non.

Sostituendo l'ipotesi (3) all'assunzione di popolazione in crescita esogena si ottiene la seguente variante al modello originale di Goodwin:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = m - \alpha - nU - mV \end{cases} \quad (4)$$

Uno studio in dettaglio delle proprietà statiche e dinamiche del modello (4), insieme ad altre ipotesi sul ruolo della popolazione nei modelli alla Goodwin, è riportato in Manfredi e Fanti 1996a. Come si può verificare, l'azione esercitata dal termine quadratico nell'occupazione, dovuto all'ipotesi (3) può, a seconda del valore del coefficiente  $n$ : i) modificare l'oscillazione conservativa del ciclo di Goodwin in oscillazione dissipativa (per valori bassi di  $n$ ) con convergenza ad un equilibrio positivo, ii) sterilizzare la fluttuazione, modificando la convergenza oscillatoria in convergenza monotona all'equilibrio (in una regione intermedia di valori di  $n$ ), iii) addirittura potrebbe impedire l'esistenza dell'equilibrio positivo, obbligando il sistema a convergere verso un equilibrio d'asse a quota salari zero, quando  $n$  è molto elevato. Per esempio l'insieme di valori utilizzato in un precedente lavoro degli autori ( $m=0.33$ ,  $g=1$ ,  $r=2$ ,  $a=.03$ ) richiederebbe un valore

del parametro  $n$  maggiore di approssimativamente il 60% per unità di tempo per generare una convergenza all'equilibrio a quota salari zero (si rimanda a Manfredi e Fanti 1996a, per l'analisi più in dettaglio delle conseguenze statiche e dinamiche dell'assunzione di presenza di effetto scoraggiamento).

In altre parole: l'esplicita endogeneizzazione della popolazione/offerta di lavoro secondo il meccanismo (3), che dipende, si noti bene, dalla sola occupazione corrente, per quanto assicuri una serie di interessanti conseguenze dinamiche, ha però un effetto puramente stabilizzante sul modello base di Goodwin.

La struttura del modello cambia in modo significativo quando, coerentemente con l'operare del meccanismo demografico, introduciamo esplicitamente l'assunzione dell'esistenza di un ritardo temporale nella relazione tra tasso di crescita della popolazione e tasso di occupazione. L'ipotesi del ritardo dà luogo alla sostituzione, nell'equazione (3), del tasso di occupazione corrente  $U(t)$  con un'espressione della forma:

$$S(t) = \int_{-\infty}^t U(\tau)R(t - \tau)d\tau \quad (5)$$

ove la funzione  $R$  è la cosiddetta funzione "peso" del "ritardo". L'assunzione (5) conferisce al sistema (4) la seguente struttura integro-differenziale:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \frac{\dot{U}}{U} = m - \alpha - n \int_{-\infty}^t U(\tau)R(t - \tau)d\tau - mV \end{cases} \quad (6)$$

Assumendo per  $R$  la classica forma esponenziale decrescente:

$$R(s) = ae^{-as} \quad a > 0 \quad (7)$$

il sistema integro-differenziale (6) può essere ricondotto, grazie al noto "linear chain trick"<sup>6</sup> (McDonald, 1978) al seguente sistema di tre equazioni differenziali ordinarie:

---

<sup>6</sup> Per dettagli sul metodo di riduzione noto come "linear chain trick" rimandiamo a McDonald 1978. Il senso del metodo è in poche parole quello di trattare ogni termine integrale come una nuova variabile indipendente (in questo caso  $S(t)$ ), e quindi di costruire, per derivazione di tali nuove variabili, un sistema di equazioni differenziali ordinarie di dimensione ovviamente più grande. Questo approccio richiede una assunzione di compatibilità (peraltro del tutto naturale) che legghi la condizione iniziale, di tipo integrale, del sistema integro-differenziale, con quella del corrispondente sistema ordinario.



$$\begin{cases} \dot{S} = a\left(\frac{U}{S} - 1\right) \\ \dot{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \dot{U} = m - \alpha - nS - mV \end{cases} \quad (8)$$

Naturalmente la funzione peso del ritardo può avere forme differenti. A parte la tradizionale forma esponenziale (7), una forma molto conveniente per problemi con ritardi (McDonald 1978) è del tipo gamma. In questa sede verrà considerato soltanto il caso della (7), che corrisponde ad una distribuzione Gamma di parametri (1,a), ed il caso seguente, che corrisponde al più semplice caso di una distribuzione del tipo Gamma con forma a “gobba”:

$$R(s) = a^2 s e^{-as}, a > 0^7 \quad (9)$$

La (7) e la (9) corrispondono evidentemente a due ben distinte tipologie di “azioni ritardate”. E’ utile ricordare, per l’utilità che avrà nel calcolo della frequenza degli eventuali cicli, il valor medio delle due distribuzioni. Nel caso esponenziale questo è dato come noto dal reciproco del parametro caratteristico della distribuzione. Nel caso della densità Gamma(2,a), questo è dato dal doppio del reciproco del parametro a. In sintesi:

$$\mu_E = \frac{1}{a}; \quad \mu_G = \frac{2}{a} \quad (9')$$

### 3. Conseguenze dinamiche dell’assunzione di ritardo esponenziale

Il sistema (8) possiede i medesimi equilibri del modello (4) (Manfredi e Fanti 1996a) e quindi possiede oltre all’equilibrio nullo anche un equilibrio “d’asse”  $E_2$ , a quota salari nulla, le cui proprietà non vengono affrontate in dettaglio in questa sede<sup>8</sup>, ed infine un equilibrio positivo,  $E_1$ , di coordinate:

<sup>7</sup> Tecnicamente parliamo di una densità gamma di parametri (2,a).

<sup>8</sup> Equilibri d’asse a quota salari nulla compaiono “normalmente” in varianti del modello di Goodwin con termini quadratici nell’equazione del tasso di occupazione. Un’analisi in dettaglio delle proprietà di tali equilibri in una variante del modello di Goodwin simile alla presente è contenuta anche in Fanti e Manfredi (1995). Siccome la presente analisi è interessata essenzialmente alla ricerca di condizioni per la generazione di dinamiche periodiche, l’equilibrio d’asse non è di interesse sotto questo profilo. Infatti il sistema (7) preserva la positività delle soluzioni, il che esclude la possibilità di oscillazioni attorno all’equilibrio d’asse.

$$U^* = \frac{\alpha + \gamma}{\rho} \quad V^* = \frac{m - \alpha - nU^*}{m} \quad S^* = U^* \quad (10)$$

In particolare la quota salari di equilibrio risulta economicamente significativa ( $0 < V^* < 1$ ), garantendo così la significatività dell'equilibrio  $E_1$ , con la richiesta che  $m - (\alpha + nU^*) > 0$ , cioè  $m > \alpha + nU^*$ , che è condizione meno restrittiva della tradizionale  $m > \alpha + n$  di Goodwin. Per  $m - (\alpha + nU^*) < 0$  l'equilibrio positivo perde significatività economica e rimane solo l'equilibrio d'asse, di cui può in questo caso essere facilmente dimostrata la stabilità locale (e di cui sembra ragionevole congetturare la stabilità globale).

Si noti che la quantità  $g^* = \alpha + nU^*$  costituisce il tasso di crescita di lungo periodo associato all'equilibrio positivo del modello (4), che coincide con l'analoga quantità nel modello (8).

Vogliamo evidenziare adesso il ruolo ricoperto dal ritardo nella relazione fra popolazione e occupazione sulla stabilità locale del sistema (8). La linearizzazione del sistema (8) nel suo punto di equilibrio  $E_1$  conduce alla seguente matrice jacobiana:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & 0 & \rho V^* \\ -nU^* & -mU^* & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Com'è noto, attraverso lo studio dell'equazione caratteristica è possibile accertare se il sistema sia stabile nel suo punto di equilibrio significativo  $E_1$ , controllando che tutte le sue radici abbiano parti reali negative. Si può dimostrare la seguente proposizione:

**Proposizione 1:** L'introduzione di un effetto "exponentially fading" del tasso di occupazione ritardato nella determinazione del tasso di crescita della popolazione non modifica la stabilità locale dell'equilibrio positivo  $E_1$  del sistema (8) di crescita ciclica<sup>9</sup>.

Tale risultato è facilmente dimostrato costruendo l'equazione caratteristica associata a (11), data da:

$$k^3 + ak^2 + (anU^* + mU^* \rho V^*)k + am\rho U^* V^* = 0 \quad (12)$$

i cui coefficienti sono dunque:

<sup>9</sup> Questo fatto era già verificato nella variante al modello di Goodwin con effetto 'scoraggiamento' senza ritardo. Quindi in questo caso il ritardo non ha del tutto effetti.

$$a_0 = 1; a_1 = a; a_2 = anU^* + mpU^* V^*; a_3 = ampU^* V^*$$

La semplice ispezione del polinomio ci dice che, avendo tutti i coefficienti il medesimo segno, in base al teorema di Cartesio, sono escluse radici reali positive, e, poichè  $a_3 > 0$ , sono anche escluse radici reali nulle: dunque se il sistema possiede radici reali, queste sono sempre negative, il che garantirebbe la stabilità in modo automatico. Per escludere infine la presenza di radici complesse con parte reale non negativa il teorema di Routh-Hurwicz (che assegna come noto una condizione necessaria e sufficiente perchè le radici del polinomio caratteristico abbiano tutte parte reale negativa) devono valere simultaneamente le seguenti disequazioni:

$$a_1 > 0; a_3 > 0; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (13)$$

che, come si ricava facilmente, sono sempre soddisfatte<sup>10</sup>.

Quindi, localmente, l'equilibrio positivo del modello (8) è sempre, quando l'equilibrio stesso esiste, localmente stabile (LAS). In particolare è possibile verificare come la convergenza all'equilibrio possa essere sia di tipo oscillatorio, sia monotono, caratteristiche che vengono in sostanza ereditate dal modello di base (4). E altresì possibile verificare la ereditabilità delle proprietà di stabilità dell'equilibrio d'asse.

In conclusione possiamo dire che, almeno localmente il comportamento del modello (8) è molto simile, indipendentemente dall'ampiezza del ritardo, a quello del modello (4). Per condizioni iniziali sufficientemente vicine all'equilibrio il sistema vi convergerà, realizzando nel lungo periodo il medesimo tasso di crescita ( $g^*$ ) della produzione nel modello (4). Lo stesso dicasi per le altre variabili dinamiche intervenienti. Le simulazioni numeriche fanno supporre che in effetti, quando l'equilibrio positivo del sistema esiste ed è localmente stabile, allora esso possa essere anche globalmente stabile (non abbiamo però una dimostrazione rigorosa di questo fatto).

#### 4. Il caso del ritardo a gobba

Qualora la funzione peso della variabile ritardata sia del tipo (9), ossia a gobba, il sistema (4) assume, sempre in virtù del "linear trick", la forma:

---

<sup>10</sup> Infatti  $a_1 a_2 - a_0 a_3 = a^2 n U^* > 0$

$$\begin{cases} \dot{Z} = a\left(\frac{U}{Z} - 1\right) \\ \dot{S} = a\left(\frac{Z}{S} - 1\right) \\ \dot{V} = -(\alpha + \gamma) + \rho U \\ \dot{U} = m - \alpha - nS - mV \end{cases} \quad (14)$$

dove le variabili Z,S sono così definite:

$$S(t) = \int_{-\infty}^t U(\tau) a^{-2} (t - \tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \quad (15a)$$

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t U(\tau) a e^{-a(t-\tau)} d\tau \quad (15b)$$

Gli equilibri significativi di questo sistema sono ovviamente i medesimi dei precedenti sistemi (4) e (8)<sup>11</sup> e valgono risultati molto simili per quanto concerne la stabilità locale dell'equilibrio positivo. In particolare, anche in questo caso, le simulazioni numeriche fanno supporre che in effetti, quando l'equilibrio positivo del sistema esiste ed è localmente stabile, allora esso possa essere anche globalmente stabile (non abbiamo però una dimostrazione rigorosa di questo).

La novità più rilevante del sistema (14), rispetto ai casi precedentemente considerati è però la seguente, sintetizzata nella seguente notevole:

**Proposizione 2:** L'introduzione del tasso di occupazione ritardato secondo una funzione peso del tipo (9) in un sistema di crescita ciclica à la Goodwin implica l'esistenza di orbite periodiche persistenti.

La dimostrazione della precedente proposizione è ottenuta costruttivamente mostrando come, a partire da una ideale configurazione di parametri in corrispondenza della quale il sistema (14) risulta localmente stabile in  $E_1$  con almeno una coppia di autovalori complessi coniugati, sia possibile, attraverso opportune variazioni dei parametri del sistema, causare una perdita di stabilità in virtù di attraversamento dell'asse immaginario con velocità non nulla da parte della coppia di autovalori complessi "rilevanti".

La linearizzazione del sistema (14) nel suo punto di equilibrio significativo  $E_1$  conduce alla seguente matrice jacobiana:

<sup>11</sup> Chiaramente compaiono in più i valori di equilibrio della variabile Z che però è solo una variabile ausiliaria. In ogni caso  $Z^*=S^*=U^*$ .

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho V^* \\ 0 & -nU^* & -mU^* & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Il polinomio caratteristico risulta essere:

$$P(k) = k^4 + 2ak^3 + (a^2 + mU^* V^* \rho)k^2 + (a^2 nU^* + 2am\rho U^* V^*)k + a^2 m\rho U^* V^*$$

i cui coefficienti sono:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2a \quad a_2 = a^2 + mU^* V^* \rho \quad a_3 = a^2 nU^* + 2am\rho U^* V^* \quad a_4 = a^2 m\rho U^* V^*$$

Come nel caso del paragrafo precedente, in base al teorema di Cartesio sono escluse radici reali positive, e, poichè  $a_3 > 0$ , sono anche escluse radici reali nulle. Per escludere radici complesse con parte reale non negativa possiamo servirci delle condizioni necessarie e sufficienti di Lienard-Chipart (Gandolfo 1972, 251), che sono basate sull'indagine degli stessi determinanti di Routh-Hurwicz ma sono meno onerose in termini di volume di calcoli. Tali condizioni porgono :

$$a_4 > 0 ; a_2 > 0 ; \Delta_1 > 0 ; \Delta_3 > 0, \quad (17)$$

ove:

$$\Delta_1 = a_1 \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (17')$$

Da semplice ispezione dei coefficienti dell'equazione caratteristica vediamo che le prime tre disequazioni (17) sono sempre verificate, mentre la quarta richiede che si abbia:

$$\Delta_3 = a^3 nU^* (2a^2 - anU^* - 2mU^* V^* \rho) > 0 \quad (18)$$

Segue quindi, vista la natura strettamente positiva del parametro peso del ritardo  $a$ , che: i) l'equilibrio  $E_1$  è stabile per configurazioni parametriche tali che:

$$2a^2 - anU^* - 2mU^* V^* \rho > 0 \quad (19)$$

Inoltre: ii) la perdita di stabilità dell'equilibrio positivo del modello, responsabile della eventuale comparsa di dinamiche periodiche, si può verificare solamente nei punti in cui risulta soddisfatta l'equazione:

$$2a^2 - anU^* - 2m\rho U^* V^* = 0 \quad (20)$$

La (20) implica che l'equazione caratteristica possieda una coppia di autovalori immaginari puri. Infatti dalla formula di Orlando (Gantmacher 1959):

$$\Delta_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_3 + \lambda_4) \quad (21)$$

L'annullamento della (21) può verificarsi solo in corrispondenza di i) autovalori reali nulli con molteplicità algebrica pari ad almeno due (esclusa per ipotesi), ii) autovalori reali di identico modulo e segno opposto (esclusa dalla positività dei coefficienti del polinomio caratteristico), e infine iii) autovalori immaginari puri, l'unico caso ammissibile. Imponendo l'esistenza di autovalori immaginari puri è possibile identificare il coefficiente immaginario  $\omega$  che regola il periodo delle orbite periodiche che risultano dalla biforcazione di Hopf:

$$\omega^2 = \left( \frac{a_1}{a_3} \right)_{a=a_h} \Rightarrow \omega = \left( \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \right)_{a=a_h} \quad (22)$$

Infine, la verifica della condizione di attraversamento con velocità non nulla dell'asse immaginario da parte degli autovalori complessi rilevanti è immediata. E' infatti sufficiente considerare la derivata del determinante  $\Delta_3$  di Liénard-Chipart rispetto al parametro di biforcazione, che, in corrispondenza del punto di biforcazione differisce dalla derivata della parte reale di detto autovalore solo a meno di una costante positiva. Abbiamo (sopprimiamo per comodità \*), in corrispondenza del punto di biforcazione:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\Delta_3}{da} \right)_{a=a_h} &= \left( \frac{d}{da} \left[ a^3 nU (2a^2 - anU - 2mpUV) \right] \right)_{a=a_h} = \\ &= \left( nU \left[ 3a^2 (2a^2 - anU - 2mpUV) + a^3 (4a - nU) \right] \right)_{a=a_h} = \quad (23) \\ &= 4nUa_h^2 \left[ a_h \left( a_h - \frac{nU}{4} \right) \right] = nUa_h^3 \sqrt{16mpUV + (nU)^2} > 0 \end{aligned}$$

Possiamo pertanto a questo punto enunciare la seguente proposizione che formalizza la precedente proposizione2.

**Proposizione 3:** se, a partire da una configurazione di parametri in cui l'equilibrio  $E_1$  è stabile, il parametro  $a$  decresce, il punto d'equilibrio  $E_1$  sperimenta una biforcazione di Hopf<sup>12</sup> in corrispondenza di  $a=a_h$ , ove

<sup>12</sup> Si veda per esempio Farkas (1995).

$$a_h = \frac{1}{4} \left( nU^* + \sqrt{16m\rho U^* V^* + n^2 U^{*2}} \right) > 0 \quad (24)$$

E' di particolare interesse organizzare lo studio del processo di biforcazione rispetto ai due parametri chiave introdotti dalle formulazioni ritardate (8) e (14), ovvero sia il parametro  $n$  da un lato, e il parametro della funzione peso del ritardo  $\alpha$ , che "tara" l'ampiezza del ritardo medio  $T=2/a$  dall'altro. Ciò conduce quindi allo studio, nello spazio dei parametri  $(a, n)$ , della curva:

$$a_h = a_h(n) = \frac{U}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + 16 \frac{H(n)}{n^2 U^2}} \right) n \quad (25)$$

ove:

$$H(n) = m\rho UV = \rho U(m - \alpha - nU) = (\alpha + \gamma)(m - \alpha - nU) \quad (26)$$

Lo studio della (26) sull'insieme ammissibile di valori di  $n$  in cui l'equilibrio  $E_1$  esiste significativo, ossia l'insieme di valori di  $n$  tali che  $m - \alpha - nU^* > 0$ , è agevole e mostra come la curva di biforcazione sia, almeno per valori non patologici dei suoi parametri, positiva e monotona decrescente a partire dal suo massimo, corrispondente al livello  $n=0$  e pari a  $(\alpha + \gamma)(m - \alpha)$ .

Anche se la dimostrazione formale delle proprietà di stabilità delle orbite periodiche che appaiono a seguito della biforcazione è estremamente complessa, e quindi non è studiata in questa sede, la similarità della forma della curva di biforcazione del presente problema con altre incontrate dagli autori sempre nello studio di biforcazioni causate da ritardi nel modello di Goodwin (Fanti e Manfredi 1997a, Fanti e Manfredi 1997b, Fanti e Manfredi 1997c), suggerisce la seguente congettura, e cioè che le dinamiche periodiche stabili (il caso cosiddetto supercritico) appaiano essenzialmente in una finestra di valori "piccoli", ossia della forma  $(0, n_0)$ , del parametro demografico  $n$ . Questo implica un contenuto effetto stabilizzante giocato dal termine demografico, ossia che l'attrazione dell'equilibrio  $E_1$  sia minimale, permettendo la stabilità delle orbite periodiche che ne emergono.

Questa congettura è completamente confermata dalle simulazioni numeriche (si veda la prossima sezione) che confermano l'esistenza di cicli limite demoeconomici proprio in finestre supercritiche del tipo  $(0, n_0)$ . Le simulazioni numeriche confermano altresì la tendenza del sistema (14) ad ereditare i comportamenti elementari tipici dei più semplici sistemi (4) e (8): quando l'equilibrio  $E_1$  è stabile, possiamo avere sia stabilità di tipo oscillatorio, sia convergenza monotonica all'equilibrio, sia infine, quando l'equilibrio positivo scompare, convergenza monotonica all'equilibrio d'asse. Nuovamente, quando l'equilibrio positivo è localmente stabile, appare naturale congetturare, sempre sulla base dei risultati delle simulazioni numeriche, la sua stabilità globale.

## 5. Simulazioni numeriche

Come si può verificare, lo studio della relazione tra il valore del ritardo che dà luogo alla biforcazione e gli altri parametri del modello mostra come un incremento di  $\alpha$ , di  $\gamma$  e di  $n$  aumenta il ritardo critico, viceversa gli altri parametri.

Sembra ragionevole, a priori, interpretare il ritardo distribuito esponenzialmente come una estensione dell'effetto scoraggiamento istantaneo del sistema (4), dovuto per esempio a ritardi informativi sullo stato dell'occupazione o eventualmente al fatto che il lavoratore tiene conto nell'offrire lavoro anche dell'informazione retrospettiva. Ci pare ragionevole sostenere che, viceversa, un ritardo di tipo "a gobba", in cui è molto più importante l'influenza del 'passato antico' (per distinguerlo dal passato "recente" che viceversa è quello "più importante" nel ritardo di tipo esponenziale), possa anche rappresentare, con le dovute cautele, effetti di più lungo periodo come il trascinarsi generazionale ed effetti di struttura d'età. In questo ultimo caso le dinamiche periodiche che appaiono a seguito della biforcazione di Hopf sembrano da correlare essenzialmente all'interazione demoeconomica nella sfera della natalità attraverso il filtro del ritardo temporale con cui le generazioni di nuovi nati entrano nel mercato del lavoro.

Un esercizio numerico con valori "standard" (si veda Gandolfo 1972) dei parametri può fornire un esempio di come e quando può apparire un ciclo limite stabile e il periodo della sua oscillazione: con  $\gamma=1$ ,  $\rho=2$ ,  $m=0.33$ ,  $\alpha=.03$ ,  $n=.03$  (quindi  $U^*=.51$ ) si ottiene  $a=.54$  cioè un ritardo medio critico  $T=2/a$  pari a circa 4 anni. Dunque per ritardi mediamente superiori a questa soglia critica inizieranno fluttuazioni esplosive nella quota salari e nel tasso d'occupazione, mentre per un ritardo nei dintorni di circa quattro anni apparirà un ciclo limite di periodo pari a circa 11.5 anni. Una ipotetica variazione di ciascun singolo parametro, rispetto alla configurazione standard di cui sopra, come riportato in tabella 1, conferma numericamente che un incremento di  $\alpha$ , di  $\gamma$  e di  $n$  aumenta il ritardo critico, viceversa gli altri parametri.

*Tabella 1- Esempio numerico: variazioni del parametro a quando i parametri variano rispetto alla configurazione "standard"*

	Parametri del sistema									
	$m'$	$m''$	$\alpha'$	$\alpha''$	$n'$	$n''$	$\rho'$	$\rho''$	$\gamma'$	$\gamma''$
	0.2	1	0.	0.1	0	0.1	1.5	3	0.5	1.5
Nuovi valori di a	0.45	1	0.57	.49	.56	.52	.51	.57	1.5	.65

Nella precedente illustrazione numerica e con l'ipotizzata funzione del ritardo di tipo 'hump', emerge che il ritardo medio in grado di generare un ciclo limite è inferiore a quello rappresentativo di onde generazionali e forse superiore a quello



esprimente l'effetto 'scoraggiamento'. Nondimeno l'esercizio svolto è indicativo della possibilità di un ciclo economico (e quindi anche di un ciclo nella popolazione) quando la variazione demografica (e/o la variazione della partecipazione al mercato del lavoro) sia endogena.

Viceversa la seguente configurazione (la si chiami la configurazione "demografica") di valori dei parametri:  $m=0.18$ ,  $\alpha=0.03$ ,  $\gamma=0.2$ ,  $\rho=0.5$ , (che implicano in equilibrio un livello dell'occupazione del 46%, e una quota salari del 65% circa),  $n=0.0085$ , un valore prossimo all'insieme dei valori ragionevoli dei tassi di crescita "demografici", implica la comparsa di un ciclo limite stabile quando il ritardo medio sia di circa 18 anni. Tale valore non è lontano da quello che è nella realtà, il tempo medio che intercorre fra la nascita e il possibile ingresso nelle forze di lavoro.

La forma peculiare di alcune delle dinamiche demoeconomiche intrinseche al modello (14) è illustrata nelle simulazioni<sup>13</sup> delle fig. 1, 2, 3,4. Le figure 1 e 2 riportano due ritratti di fase nel piano U,V per il modello fondamentale (14) caratterizzati rispettivamente da dinamica di tipo oscillatorio convergente e monotona (ottenute attraverso progressivi innalzamenti del parametro  $n$  a partire dalla configurazione standard di valori dei parametri). La figura 3 riporta il ciclo limite stabile associato alla configurazione "demografica" nel piano delle fasi ristretto alle due sole variabili (U,V) (è stata omessa la dinamica di aggiustamento). Infine la fig. 4 riporta una visione tridimensionale del medesimo ciclo (nel piano delle fasi ristretto alle variabili (U,V,S)) con aggiunta della dinamica di aggiustamento.

*Fig. 1. Modello (14): convergenza all'equilibrio con oscillazioni smorzate.  
Configurazione standard;  $n=0.3$*

*Fig. 2. Modello (14): convergenza all'equilibrio con dinamica non oscillatoria*

*Fig. 3. Modello (14). Ciclo limite stabile associato alla "configurazione demografica"*

*Fig. 4. Modello (14). Ciclo limite stabile associato alla "configurazione demografica" in visione spaziale nelle variabili (U,V,S) e parte della connessa dinamica di aggiustamento*

---

<sup>13</sup> Le simulazioni numeriche riportate sono state effettuate con il software DMC.

## 6. Conclusioni

In questo lavoro si sono affrontati gli effetti sulla dinamica del modello di Goodwin di una endogeneizzazione del tasso di crescita della popolazione, che viene fatta dipendere dai livelli passati del tasso di occupazione. Si è in particolare dimostrato come, in dipendenza delle assunzioni sulla forma del ritardo con cui l'occupazione agisce sulla popolazione (offerta di lavoro) sia possibile o conservare la stabilità (locale) dell'equilibrio di lungo periodo oppure generare comportamenti dinamici più complessi dai quali può emergere un ciclo strutturalmente stabile. In particolare vedremo come un ritardo in cui pesi in modo maggiore il passato recente conserva sempre la stabilità del sistema. Viceversa, se nel ritardo antico esiste una fase di "massima influenza" sull'offerta di lavoro corrente (simile quindi all'effetto per esempio di un 'baby-boom' ) allora si può generare un allontanamento a 'spirale' dall'equilibrio ed una convergenza ad un ciclo limite.

Il parametro centrale della nostra discussione,  $\alpha$ , il reciproco del ritardo medio con cui l'occupazione passata influenza il tasso odierno di crescita dell'offerta di lavoro, ha una duplice interpretazione: 1) la sua misura dipende dalle relazioni 'comportamentali' delle famiglie con la situazione economica, di cui è proxy il tasso di occupazione, sia 1.1) dal lato delle decisioni di fertilità, sia 1.2) dal lato delle decisioni di partecipazione al mercato del lavoro; 2) la sua misura dipende anche dal contesto istituzionale che regola le modalità di partecipazione in senso lato (p.e. età minima di obbligo scolastico, divieto del lavoro minorile, facilitazioni alla scolarizzazione superiore, età pensionabile, politica della famiglia, etc.) ed è quindi parzialmente un parametro di 'policy'. Quindi se è vero che, da un lato, soprattutto in riferimento alla interpretazione (1) il parametro  $\alpha$  misura, per così dire, gli effetti correnti sull'offerta di lavoro delle onde di babybooms e baby-slumps 'indotte dall'economia', dall'altro tale parametro può anche essere variato attraverso interventi di politica economica, la quale può quindi essere decisiva per il perseguimento di un obiettivo di stabilità. La presente analisi sembra quindi avere individuato dei controlli di politica economica che potrebbero avere un ruolo significativo nel quadro di politiche di stabilizzazione.

**Ringraziamenti:** gli autori ringraziano un referee anonimo della rivista per una serie di utili suggerimenti e per averci invitato ad una esposizione più dettagliata del meccanismo per la individuazione della biforcazione di Hopf. Rimane degli autori ogni responsabilità per eventuali errori ed omissioni.

### Riferimenti bibliografici

Barro R.J., Becker G.S., Fertility choice in a model of economic growth, *Econometrica*, 57, 1989.

- Becker G.S.-Barro R.J., A reformulation of the economic theory of fertility, *Quarterly Journal of Economics*, 103, 1988.
- Easterlin R.A., Birth and fortune. The impact of numbers on personal welfare, Basic Books, New York, 1980.
- Easterlin R.A., The American baby-boom in historical perspective, *American Economic Review*, 60, 1961.
- Fanti L., Manfredi P., Salario di efficienza e crescita con ciclo, *Studi Economici*, 1995, 3, 79-115
- Fanti L., Manfredi P., Crescita con ciclo, ritardi di gestazione ed effetti di popolazione, in corso di stampa su *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*, 1997a
- Fanti L., Manfredi P., Vischiosità dei salari e dinamica occupazionale in modelli di crescita alla Goodwin, accettato per la pubblicazione dalla rivista *Economia Politica*, 1997b
- Farkas M., Periodic motions, Springer Verlag, New York, Tokio, 1995
- Feichtinger G.- Sorger G., Self-generating fertility waves in a non-linear continuous overlapping generations model, *Journal of Population Economics*, 2, 1989.
- Frauenthal J., Swick K., Limit cycle oscillations of human population dynamics, *Demography*, 20, 1983.
- Gandolfo G., Mathematical methods and models in economic dynamics, North Holland, 1972
- Gandolfo G., Economic dynamics, Springer Verlag, New York, Tokio, 1996,
- Goodwin R., A growth cycle, in Feinstein C.H. (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, Londra, 1967
- Guckenheimer J., Holmes P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, Springer Verlag, New York, Tokio, 1984
- Lorenz H.W., Nonlinear dynamical economics and chaotic motion, Springer-Verlag, New York, Tokio, 1993
- Malerba G., Dinamiche demografiche e offerta di lavoro: spunti teorici ed indicazioni di politica economica, *Economia e Lavoro*, 1, 1990.
- Manfredi P., Fanti L., Population dynamics and Goodwin's model, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, W.P. Università di Pisa, 1996a
- Manfredi P., Fanti L. (1996b), Point Stability versus Orbital Stability: Policy Implications in Goodwin-type models, WP Dip. di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Pisa; inviato a: *Structural Change and Economic Dynamics*, 1996b
- Marsden J., McCracken M., The Hopf's bifurcation and its applications, Springer Verlag, New York, Tokio, 1976
- McDonald, Time lags in biological systems, Lecture Notes Biomathematics, Springer Verlag, New York, Tokio, 1978
- McMillan H.M.-Baesel J.B., The macroeconomic impact of the baby boom generation, *Journal of Macroeconomics*, vol.12, 2, 1990

Mincer J., Labor force participation and unemployment: a review of recent evidence, in Gordon R.A., Gordon M.S. (ed.), Prosperity and unemployment, Wiley, New York, 1966

Samuelson P.A., An economist's nonlinear model of self-generated fertility waves, *Population Studies*, 30, 1976

Tuljapurkar S., Cycles in nonlinear age-structured models I. Renewal equations, *Theoretical Population Biology*, 32, 1987

Wachter K.W. - Lee R.D., U.S. births and limit cycle models, *Demography*, 26, 1989

### Appendice: il teorema di Hopf

Tra le formulazioni standard del teorema di biforcazione locale di Hopf segnaliamo i classici Guckenheimer e Holmes (1984, 151-152) e Marsden e McCracken (1976). Qui di seguito riportiamo la versione semplificata della formulazione di Guckenheimer e Holmes riportata in Lorenz (1993, cap. 3). Tra i testi classici di economia dinamica si veda anche Gandolfo (1996, cap. 25).

**Teorema** (di Hopf) Sia dato un sistema dinamico autonomo n-dimensionale descritto dal seguente sistema di n-equazioni differenziali della forma:

$$\dot{X}(t) = f_{\mu}(X(t)) \quad (A.1)$$

ove  $\mu$  è un parametro<sup>14</sup>, e si supponga che (A.1) possieda un equilibrio  $E=(X_0, \mu_0)$  in corrispondenza del quale la matrice Jacobiana del sistema (A.1) valutata in E (ossia:  $J(E) = [D_X f_{\mu}(X(t))]_E$ ) possieda una coppia di autovalori immaginari puri e nessun altro autovalore abbia parte reale pari a zero. Si può allora dimostrare che:

i) esiste una curva liscia di equilibri al variare del valore del parametro  $\mu$ , data dalle coppie  $(X(\mu), \mu)$ , tale che  $X(\mu_0) = X_0$

ii) la coppia di autovalori complessi coniugati della matrice  $J(E)$  che in corrispondenza della coppia  $(X_0, \mu_0)$  risultano essere immaginari puri, sono a loro volta, funzioni lisce del parametro  $\mu$ . Si indichino tali autovalori con:

$$\lambda(\mu) = A(\mu) + i \cdot B(\mu); \quad \bar{\lambda}(\mu) = A(\mu) - i \cdot B(\mu) \quad (A.2)$$

ove  $A(\mu)$  e  $B(\mu)$  ne costituiscano rispettivamente la parte reale ed immaginaria. Se allora:

---

<sup>14</sup> Che costituisce, ovviamente, il "parametro di biforcazione".

$$\left( \frac{d[A(\mu)]}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_0} \neq 0 \quad (\text{A.3})$$

si dimostra che il sistema (A.1) ammette soluzioni periodiche che compaiono attraverso una biforcazione dell'equilibrio E in corrispondenza del valore  $\mu=\mu_0$ <sup>15</sup>. Il periodo di tali soluzioni periodiche può essere approssimato attraverso la stima:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda(\mu_0)} \quad (\text{A.4})$$

In termini intuitivi: un sistema dinamico subisce una biforcazione di Hopf in corrispondenza di un suo punto di equilibrio E (per questo motivo parliamo di biforcazione "locale") quando al variare del valore di un suo opportuno parametro tale equilibrio sperimenta una transizione da stabilità locale ad instabilità locale (o viceversa) per effetto di un "movimento" di una coppia di autovalori complessi coniugati che, a seguito della variazione del parametro di biforcazione, attraversano l'asse immaginario con velocità non nulla (questo è il senso della (A.4)). Questo meccanismo della transizione da stabilità ad instabilità per attraversamento dell'asse immaginario segnala come il più semplice test per controllare l'esistenza di una biforcazione di Hopf in un sistema di dimensione maggiore di due consista nello studiare (fatti ovviamente tutti gli altri debiti accertamenti) le condizioni di violazione del test di stabilità di Routh-Hurwicz nel caso in cui si sia preliminarmente accertata la presenza di autovalori complessi.

Annotiamo infine come l'enunciazione sopra data del teorema di Hopf lasci del tutto aperto il problema della stabilità o meno delle orbite periodiche emergenti a seguito della biforcazione, che semmai è l'aspetto più rilevante dal punto di vista applicato. Anche se formalmente le condizioni della stabilità sono chiare, attraverso il ricorso allo sviluppo del sistema (A.1) sulla cosiddetta varietà centro (Guckenheimer e Holmes, 1984), dal punto di vista pratico questo problema in genere presenta (per approfondimenti si consultino Marsden e McCracken (1976)), quando la dimensione del sistema è maggiore di due, difficoltà algebriche formidabili<sup>16</sup>, il che rende inevitabile, come fatto nel testo, ricorrere a simulazione numerica.

Un aspetto notevole riguarda infine le interazioni tra forze economiche in grado di generare dinamiche periodiche persistenti attraverso biforcazione di Hopf. Questo problema è discusso estensivamente, insieme con una rassegna della letteratura, in altri lavori degli autori (Fanti e Manfredi 1997b, Manfredi e Fanti 1996b).

<sup>15</sup> Il valore  $\mu_0$  costituisce quindi il "valore di biforcazione".

<sup>16</sup> Il volume di Farkas (1995) presenta una serie di problemi notevoli di stabilità di cicli attraverso biforcazione di Hopf, risolti da Farkas e collaboratori.

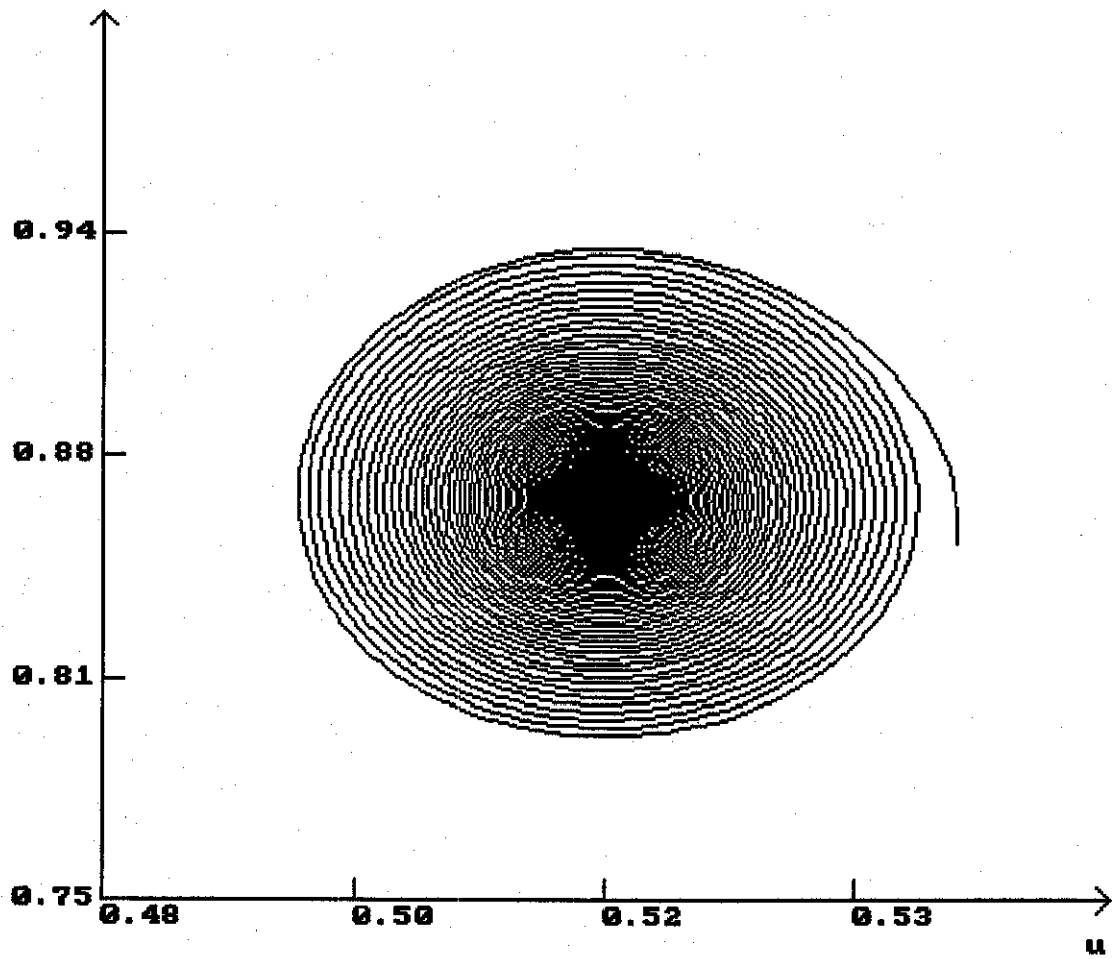


Fig. 1

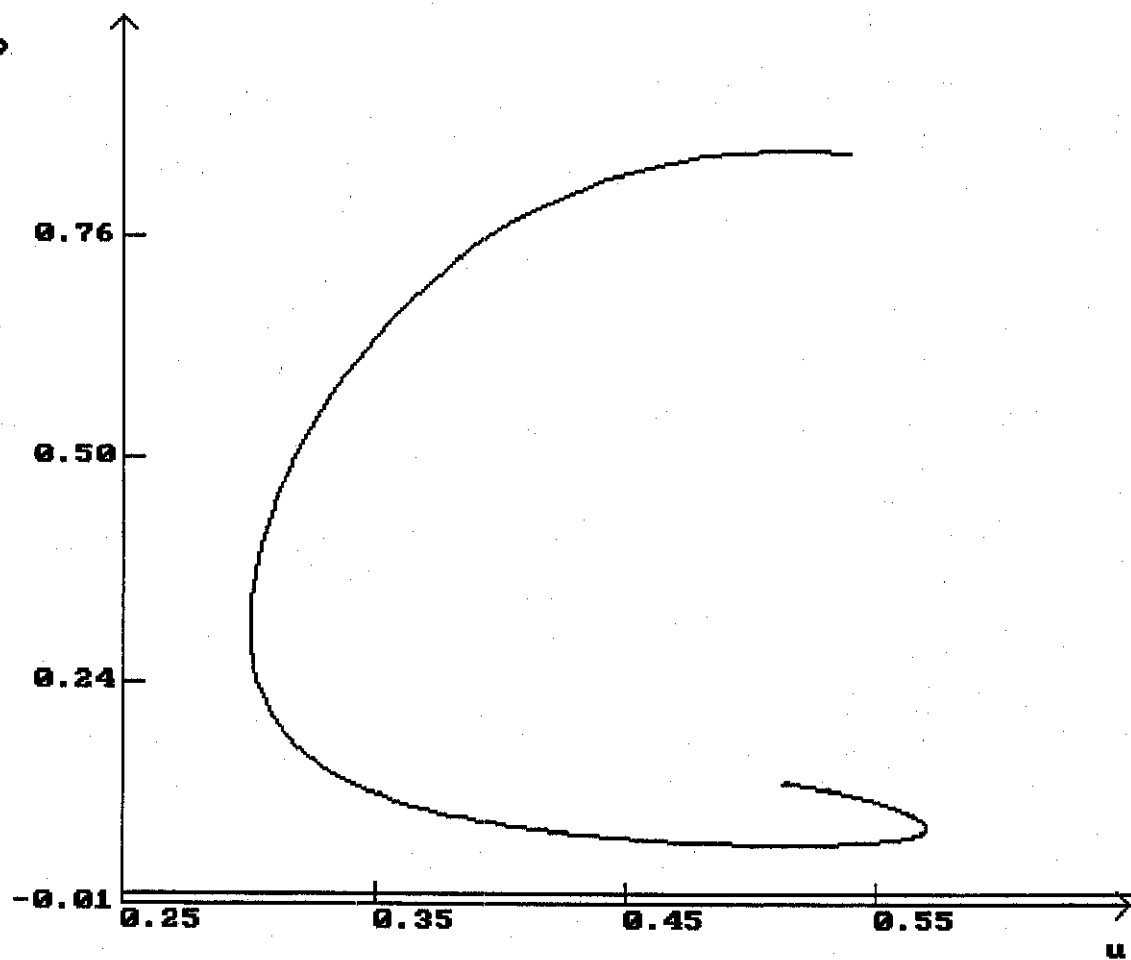


Fig. 2

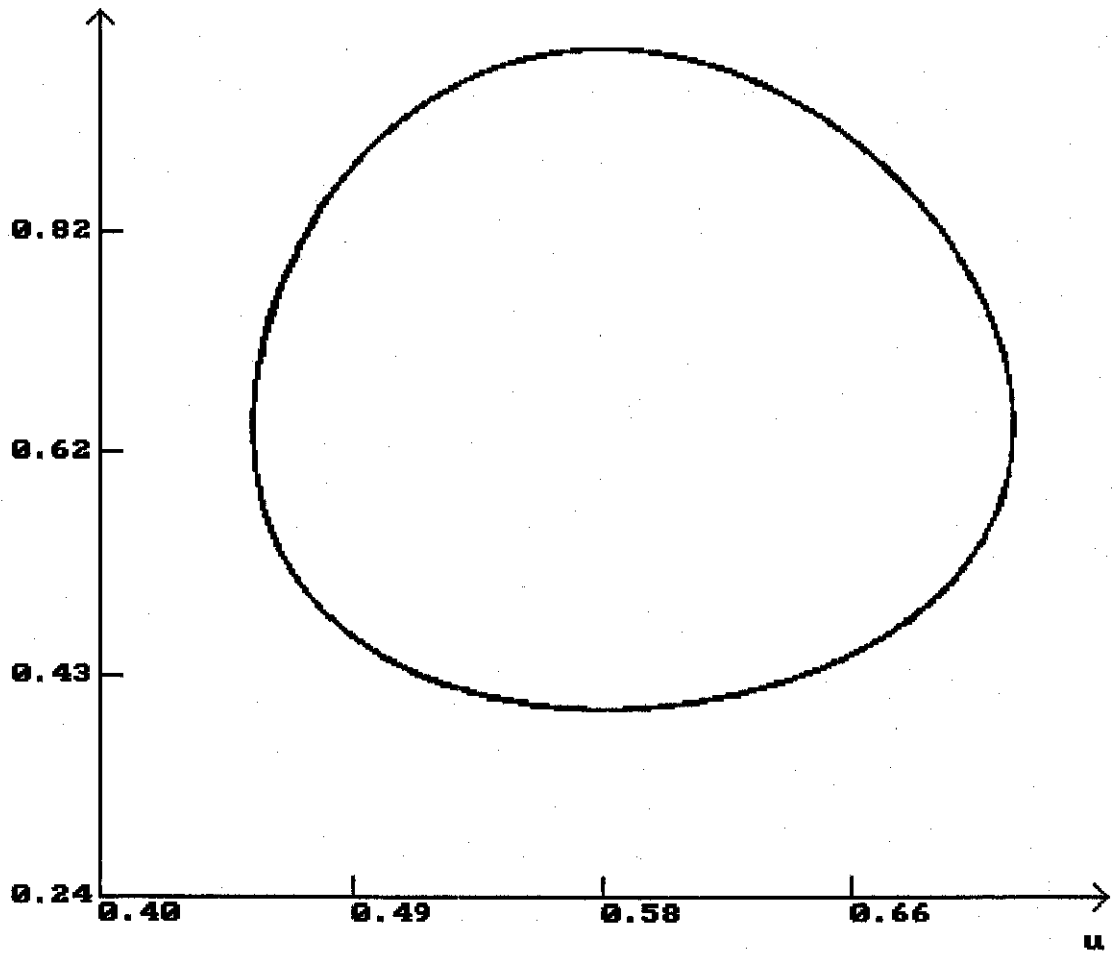
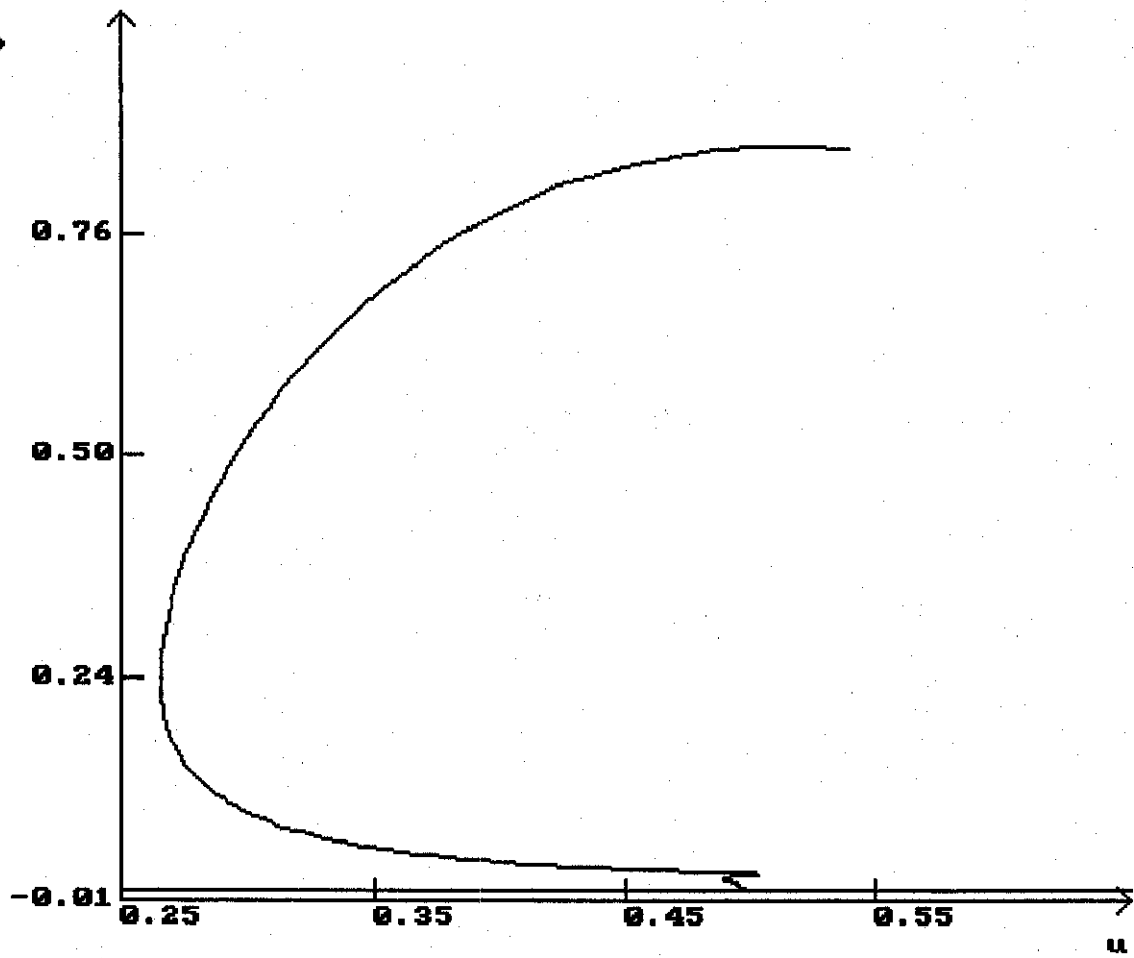


Fig. 3





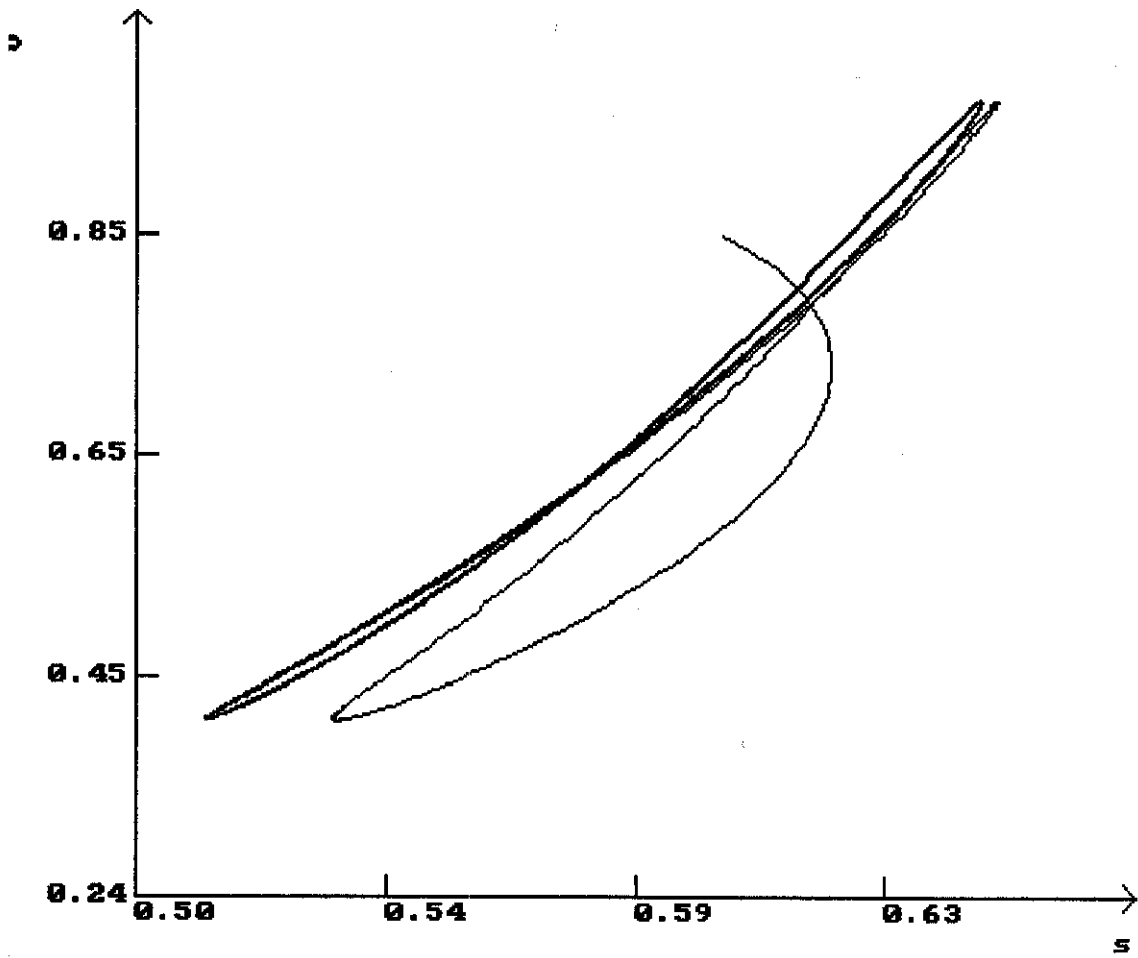


Fig. 4