Report n. 118

Una nota sul concetto di estremo superiore di insiemi ordinati da coni convessi

Laura CAROSI

Pisa, Maggio 1997
Questa ricerca é stata finanziata con fondi di Ateneo (ex 60%)

UNA NOTA SUL CONCETTO DI ESTREMO SUPERIORE DI INSIEMI ORDINATI DA CONI CONVESSI

Laura Carosi
Dottorato di Ricerca in "Matematica per le Decisioni Economiche" - DIMADEFAS - Università di Firenze

1. Introduzione.

Il concetto di estremo superiore di un insieme parzialmente ordinato è ancora oggetto di studio, come testimoniano alcuni recenti lavori fra i quali ricordiamo O. Caligaris, P.Oliva [2], H. Kawasaky [3], J.W. Nieuwenhuis [6] T. Tanino [9]

L'approccio che qui proponiamo, differisce da quello dei lavori citati per l'approfondimento del concetto di insieme superiormente limitato in $\Re^n$. Più esattamente preciseremo la definizione di estremo superiore attraverso l'introduzione di due differenti tipologie di insiemi superiormente limitati.

Dimostreremo inoltre che la nozione di estremo superiore collegata a quella di insieme superiormente limitato in senso debole è equivalente a quella data da T. Tanino [9] che, a nostro avviso, è da preferire alle altre presenti in letteratura perché meglio interpreta l'estensione delle proprietà del sup dei reali.

Facendo riferimento a tale definizione di estremo superiore, utilizziamo il cono polare e il cono di recessione al fine di determinare condizioni necessarie e\o sufficienti atte a garantire l'esistenza di un estremo superiore finito.

2. Generalità

Richiameremo la definizione ed alcune ben note proprietà dell'estremo superiore nel caso reale in modo da consentire un confronto immediato con quanto verrà esposto nel successivo paragrafo relativamente ad insiemi contenuti in spazi multidimensionali. Ogni qualvolta introdurremo una definizione di estremo superiore per un insieme $X \subseteq \Re^n$ studieremo quali fra le proprietà qui riportate dell'estremo superiore nei reali, sono mantenute e quali no.

Si consideri l'insieme dei numeri reali con l'usuale topologia e l'usuale ordinamento "$\geq$" e sia $A \subseteq \Re$. A è **superiormente limitato** se e solo se esiste

$z \in \Re$ tale che $z \geq x$ per ogni $x \in A$. E' noto che A è superiormente limitato se e solo se $A-\Re_+ \neq \Re$ ed ancora A è superiormente limitato se e solo se esiste $z \in \Re$ tale che $A \subseteq (z,\infty)^c$

L'estremo superiore di $A \subseteq \Re$, (*sup*A), è definito come il minimo dei maggioranti di A e verifica le seguenti proprietà.

Proprietà 1 L'estremo superiore esiste sempre ed è unico. Se A è un insieme limitato allora *sup*A = L <+∞. Viceversa se A non è superiormente limitato allora *sup*A =+∞.

Proprietà 2 Sia A un insieme superiormente limitato, y=*sup*A se e solo se i) se $y \geq x$ per ogni $x \in A$ ii) per ogni $z<y$ esiste $x_0 \in A : z < x_0$.

Proprietà 3 Se A è superiormente limitato, l'estremo superiore ripartisce la retta dei reali in tre insiemi disgiunti. Ovvero :

$$\Re=(-\infty, \mathit{sup}A) \cup \{\mathit{sup}A\} \cup (\mathit{sup}A, +\infty).$$

Proprietà 4 Se $\mathit{sup}A \in A$, l'estremo superiore coincide con il massimo di A.

Proprietà 5 $\mathit{sup}A \in \mathrm{cl}A$.

Al fine di rendere autonomo questo lavoro, riportiamo le seguenti definizioni e proprietà che saranno in seguito richiamate.

Un insieme $C \subseteq \Re^n$ è un **cono** se $\alpha x \in C$ ogni qualvolta $x \in C$ e $\alpha \geq 0$; inoltre C è un cono convesso se C è convesso come insieme.

Un cono C è detto **puntato** se $-x \notin C$ quando $x \neq 0$ e $x \in C$,

E' noto che ogni cono convesso C di vertice $O \in C$ induce una relazione transitiva, riflessiva e compatibile con la linearità dello spazio tramite la seguente definizione:

"x domina y" (o "x è in relazione con y") se e solo se $x \in y+C$.

Viceversa ogni relazione transitiva, riflessiva e lineare individua il cono $C=\{x \in \Re^n$:"x domina 0")} detto **cono ordinante** o **positivo**, tale che la relazione indotta da esso coincide con la relazione stessa. (J. Jahn [3])

La relazione indotta da C è antisimmetrica se e solo se C è puntato.

Nel resto della trattazione **faremo sempre riferimento a relazioni indotte dal cono C, di vertice l'origine, convesso, chiuso, puntato con interno non vuoto**; denoteremo con $C°=C\setminus\{0\}$ e con intC l'interno del cono C.

Consideriamo ora un insieme $X \subseteq \Re^n$ ordinato dal cono C.

L'estensione conica di X è l'insieme

$$X-C=\{z\in \Re^n : x\in z+C \text{ per qualche } x\in X\}.$$

Il concetto di massimo di un insieme contenuto nei reali, o più in generale, di un insieme totalmente ordinato, si può estendere in $\Re^n$ nel seguente modo:

- $x^*\in \Re^n$ è detto **massimo ideale** di X rispetto al cono C se $x^*\in X$ e se $x^*\in x+C$ per ogni $x\in X$.

Denotiamo l'insieme dei massimi ideali di X con $\max\{X\}$.

In riferimento ad una relazione d'ordine parziale, sono di particolare interesse gli elementi massimali o minimali che, rispetto all'ordinamento indotto dal cono C, possono essere così definiti:

- $x^*\in \Re^n$ è detto **elemento massimale** di X rispetto al cono C se $x^*\in X$ e se $(x^*+C^\circ)\cap X=\emptyset$.

Denotiamo l'insieme degli elementi massimali di X con E(X,C).

- $x^*\in \Re^n$ è detto **elemento massimale debole** di X rispetto al cono C se $x^*\in X$ e se $(x^*+\text{int}C)\cap X=\emptyset$.

Denoteremo l'insieme degli elementi massimali deboli di X con WE(X,C).

- $x^*\in \Re^n$ è detto **elemento minimale debole** di X rispetto al cono C se $x^*\in X$ e se $(x^*-\text{int}C)\cap X=\emptyset$.

Denotiamo l'insieme degli elementi minimali deboli di X con WM(X,C).

3. Insiemi superiormente limitati in senso debole ed in senso forte.

A differenza degli approcci seguiti da vari autori introduciamo il concetto di estremo superiore per un insieme X contenuto in $\Re^n$ estendendo dapprima quello di insieme superiormente limitato in quanto la limitatezza superiore gioco un ruolo fondamentale nella determinazione delle caratteristiche dell'estremo superiore. Per tale motivo proponiamo due diverse definizioni di superiore limitatezza per insiemi contenuti in $\Re^n$ ed ordinati dal cono C, ciascuna delle quali estende proprietà peculiari degli insiemi superiormente limitati nei reali.

Definizione 3.1

Sia X un insieme contenuto in $\Re^n$ ordinato dal cono C.

X è **superiormente limitato in senso forte** se e solo se

$$\text{esiste } z\in \Re^n \text{ tale che } X\subseteq z-C$$

Definizione 3.2

Sia X un insieme contenuto in $\Re^n$ ordinato dal cono C.

X è **superiormente limitato in senso debole** se e solo se

esiste $z\in\Re^n$ tale che $X\subseteq(z+\text{int}C)^c$

Osservazione 3.3

La definizione 3.1 coincide con quella usuale di insieme superiormente limitato. (G.Jameson [4], A.L.Peressini[7], J. Jahn [3]).

Osservazione 3.4

Se l'insieme $X\subseteq\Re$ allora le due definizioni 3.1 e 3.2 coincidono. In generale, un insieme superiormente limitato in senso forte, è anche limitato in senso debole, ma non vale il viceversa come mostrano i seguenti esempi che evidenziano anche la natura geometrica delle due tipologie di insiemi

Esempio 3.5: $X=\{(x_1,x_2)\in\Re^2:, 0\leq x_2\leq 1, 0\leq x_1\leq 1\}$ C è il cono così definito: $C=\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2\geq 1\backslash 2x_1 \text{ e } x_2\leq 2x_1\}$. X è limitato sia in senso debole che in senso forte.

Esempio3.6: $Y=\{(y_1,y_2)\in\Re^2: y_2=\frac{5y_1}{y_1+2}, y_1\geq 0\}$ C è il cono paretiano.

Y è limitato in senso debole, ma non in senso forte.

Esempio 3.7: $Z=\{(z_1,z_2)\in\Re^2: z_2=z_1\}$ C è il cono paretiano.

Z è non è limitato né in senso debole, né in senso forte.

Osservazione 3.8

Un insieme X è superiormente limitato in senso debole se e solo se

esiste $z\in\Re^n$ tale che $X\subseteq(z+C)^c$

E' ovvio infatti che se $X\subseteq(z+\text{int}C)^c$ allora $X\subseteq(z+C)^c$. Viceversa si consideri $z^*\in z+\text{int}C$. Poiché $(z^*+\text{int}C)\subseteq(z+C)$, $X\subseteq(z+C)^c$ implica $X\subseteq(z^*+\text{int}C)^c$ da cui X soddisfa la definizione 3.2.

Osservazione 3.9

Un insieme X è superiormente limitato in senso debole se e solo se

$X-C\neq\Re^n$.

4. Estremo superiore di insiemi superiormente limitati in senso forte.

La definizione di estremo superiore più frequentemente usata nella letteratura degli spazi vettoriali topologici ordinati (S. Brumelle [1], J. Jahn [3], A.L. Peressini [7], G. Jameson [4]) è proprio l'estensione immediata del concetto di estremo superiore visto per i numeri reali. Si definisce estremo superiore di un insieme $X \subseteq \Re^n$ ordinato dal cono C, il minimo dei maggioranti di X. Denotiamo l'estremo superiore di X con *Sup*X

Analogamente a quanto visto nel caso reale, diremo che $SupX=\{+\infty\}$ se e solo se X non è superiormente limitato in senso forte.

Il seguente teorema estende la Proprietà 1 vista nel caso reale, ovvero dimostra l' esistenza e l'unicità dell'estremo superiore.

Teorema 4.1

Si consideri lo spazio euclideo $\Re^n$ ordinato dal cono C. Allora ogni sottoinsieme $X \subseteq \Re^n$ ammette un unico estremo superiore .

Dim

Se X non è superiormente limitato in senso forte allora per definizione $SupX=\{+\infty\}$. Viceversa se X è superiormente limitato, è sufficiente dimostrare che l'insieme $S_{xy}=(x-C)\cap(y+C)$ è compatto per ogni $x,y \in \Re^n$ tali che $x \in y+C$. Per il teorema di Nachbin (G.Jameson [4]) infatti, la compattezza di S_{xy} unitamente alla antisimmetricità della relazione indotta da C ed al fatto che $\Re^n$ è un reticolo lineare, implica che $\Re^n$ è uno spazio order-complete ovvero che ogni sottoinsieme superiormente limitato in senso forte ammette estremo superiore.

Poiché C è chiuso l'insieme $S_{xy}=(x-C)\cap(y+C)$ è chiuso per ogni $x,y \in \Re^n$ perché intersezione di chiusi. Resta da dimostrare che S è limitato. Supponiamo per assurdo che non lo sia ovvero che esista una successione $\{s_n\}=\{x-c_{1n}\}=\{y+c_{2n}\}$ tale che $\| s_n \| \to +\infty$. Si consideri ora la successione $\{z_n\}=\left\{\frac{s_n}{\|s_n\|}\right\}$. Poiché la successione $\{z_n\}$ è contenuta nella sfera unitaria, essa ammette una sottosuccessione convergente. Senza ledere la generalità della dimostrazione possiamo considerare la successione $\{z_n\}$ stessa. Quindi $z_n \to z^* \neq 0$. Ma allora

$$\frac{s_n}{\|s_n\|}=\frac{x}{\|s_n\|}-\frac{c_{1n}}{\|s_n\|}=\frac{y}{\|s_n\|}+\frac{c_{2n}}{\|s_n\|}.$$

Poiché

$$\frac{x}{\|s_n\|} \to 0 \text{ e } \frac{y}{\|s_n\|} \to 0 \text{ allora}$$

$$-\frac{c_{1n}}{\|s_n\|} \to -c^* = z^* \text{ e } \frac{c_{2n}}{\|s_n\|} \to c^{**} = z^*$$

con $c^* \in C$, $c^{**} \in C$ da cui $-c^*=c^{**} \neq 0$. Ciò è assurdo poiché C è puntato.

Infine, l'unicità dell'estremo superiore segue direttamente dall'antisimmetricità della relazione indotta dal cono C. ♦

Si noti che se X è superiormente limitato in senso forte e $Sup X \in X$, allora $Sup X$ è il massimo ideale di X e ciò estende la Proprietà 4 vista nel caso reale. T. Tanino[9] osserva che se $\max\{cl(X-C)\} \neq \emptyset$ allora $Sup X$ coincide con $\max\{cl(X-C)\}$ A chiarimento di quanto affermato presentiamo il seguente esempio.

<u>Esempio 4.2</u>: $X=\{(x_1,x_2) \in \Re^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ C è il cono paretiano.

$Sup X = \{1,1\}$.

E' agevole verificare che l'estremo superiore degli insiemi Y e Z visti rispettivamente negli esempi 3.6 e 3.7 è $+\infty$.

Gli esempi 4.2, 3.6 e 3.7 evidenziano direttamente alcuni limiti della definizione di estremo superiore come minimo dei maggioranti dell'insieme ordinato.

Osserviamo che non sono in generale verificate le seguenti proprietà:

- in generale $y \notin clX$. (Cfr. esempio 4.2.)
- non è detto che se X è superiormente limitato, l'estremo superiore ripartisce lo spazio $\Re^n$ dei reali in tre insiemi disgiunti. (Cfr. esempio 4.2) Vale a dire

$$\Re^n \neq (Sup X - C \backslash \{0\}) \cup \{Sup X\} \cup (Sup X + C \backslash (0)\}$$

- a differenza dei reali non vale in generale la seguente caratterizzazione di estremo superiore di un insieme superiormente limitato in senso forte:

i) $y \in x+C$ per ogni $x \in X$

ii) per ogni z tale che $z \in y-C$ esiste $x_0 \in X : z \in x_0-C$. (Cfr. esempio 4.2)

Infine la semplice introduzione di $\{+\infty\}$ non sembra essere del tutto appropriata dato che non consente di distinguere i diversi comportamenti "all'infinito" degli insiemi ordinati. Gli insiemi degli esempi 3.6,3.7 hanno comportamenti asintotici diversi, ma tali differenze non vengono sottolineate dagli estremi superiori poiché $Sup\mathrm{Y}=Sup\mathrm{Z}=+\infty$.

5. Estremo superiore di insiemi superiormente limitati in senso debole

Introduciamo una definizioni di estremo superiore che possa interpretare in modo più adeguato della precedente, le proprietà dell'estremo superiore dei numeri reali e che possa distinguere i diversi comportamenti "all'infinito" degli insiemi ordinati.

A tale scopo definiamo

$$H_X = \{ y\in\Re^n : X \subseteq (y+\mathrm{int}C)^c \}$$

dove $X\subseteq\Re^n$ e ordinato dal cono C. Relativamente ad H_X vale il seguente teorema.

Teorema 5.1

Si consideri in $\Re^n$ l'ordinamento indotto dal cono C e sia $X\subseteq\Re^n$.

i) $H_X=\emptyset$ se e solo se $X-C=\Re^n$

ii) H_X è un insieme chiuso

Dim

i) Basta osservare che $X-C=\Re^n$ se e solo se X non è superiormente limitato in senso debole, da cui la tesi.

ii) Si consideri una successione $\{y_k\}\subseteq H_X$ tale che $\{y_k\}\to y$ e dimostriamo che $y\in H_X$ ovvero $X\subseteq(y+\mathrm{int}C)^c$. Per assurdo supponiamo che esista $x\in X$ tale che $x\in y+\mathrm{int}C$ da cui $y\in x-\mathrm{int}C$. Poiché $x-\mathrm{int}C$ è aperto esiste un intorno di y interamente contenuto in $x-\mathrm{int}C$. Ma allora da $\{y_k\}\to y$, per k sufficientemente grande $y_k\in x-\mathrm{int}C$ ovvero $x\in y_k+\mathrm{int}C$ e questo contraddice $y_k\in H_X$. ♦

Tramite H_X diamo la seguente definizione di estremo superiore.

Definizione 5.2

Sia X un insieme contenuto in $\Re^n$ ordinato dal cono C.

y è un estremo superiore debole di X e scriviamo $y\in WCsupX$

se e solo se

$y\in WM(H_X,C)$ ovvero y appartiene agli elementi minimali deboli di H_X

$WCSupX=\{+\infty\}$ se e solo se $H_X=\emptyset$.

Quando n=1, la definizione 5.2 coincide con quella di estremo superiore dei numeri reali. In virtù della particolare struttura della relazione e dello spazio dei reali, H_X coincide con l'insieme dei maggioranti di X e gli elementi massimali deboli con il minimo di H_X.

A chiarimento della definizione 5.2 presentiamo i seguenti esempi.

Esempio 5.3 :$X=\{x\in\Re: x\in(5,8)\}$. $\Re$ è ordinato dall'usuale ordinamento "$\geq$".$H_X=[8,+\infty)$. $WSupX=WM(H_X,C)=\{8\}$

Esempio 5.4: Sia $X=\{x\in\Re^2: 0\leq x_1\leq 1, 0\leq x_2<1\}$e C il cono paretiano.
$H_X=\{x\in\Re^2: x_1<1 , x_2\geq 1\}\cup\{x\in\Re^2: x_1\geq 1\}$.
$WCSupX=\{x\in\Re^2:x_1<1,x_2=1\}\cup\{x\in\Re^2:, x_1=1, x_2\leq 1\}$.

Esempio 5.5: $V=\{(v_1,v_2)\in\Re^2:, v_2=-v_1\}$ C è il cono paretiano. $H_X=\{(v_1,v_2)\in\Re^2:, v_2\geq -v_1\}$ $WCSupV=\{V\}$.

Gli estremi superiori deboli dell'insieme Y definito all'esempio 3.6 è $WCSupY=\{(y_1,y_2)\in\Re^2: y_2=5\}$, mentre $+\infty$ è l'estremo superiore debole dell'insieme Z definito all'esempio 3.7

La definizione 5.2 lega il concetto di estremo superiore a quello di elementi massimali deboli, così come mostra il seguente teorema.

Teorema 5.6

Sia X un insieme contenuto in $\Re^n$ ordinato dal cono C.

$y\in WCsupX$

se e solo se

valgono le seguenti proprietà:

a) $(y+intC)\cap X=\emptyset$

b)$y-intC\subseteq X-intC$

Dim

Se $y\in WCsupX$ allora $y\in H_X$ ovvero $X\subseteq(y+intC)^c$, da cui segue $(y+intC)\cap X=\emptyset$ e quindi la (a) è verificata.

Supponiamo per assurdo che la b) non sia verificata ovvero che esista $z\in y-intC$ tale che $z\notin X-intC$. Di conseguenza $(z+intC)\cap X=\emptyset$ e quindi $X\subseteq(z+intC)^c$, ma allora $z\in H_X$, contro l'ipotesi $y\in WM(H_X,C)$.

Viceversa supponiamo che y verifichi le proprietà a) e b).

Poiché $(y+intC)\cap X=\emptyset$ allora $X\subseteq(y+intC)^c$ da cui $y\in H_X$. Resta da dimostrare che y è un elemento minimale di H_X. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Di conseguenza esiste $z\in H_X$ tale che $z\in y-intC$.

Dalla b) segue $y-intC\subseteq X-intC\subseteq(z+intC)^c$ e quindi $(z+intC)\cap(y-intC)=\emptyset$

che è assurdo. ♦

In virtù del teorema precedente la definizione 5.2. è equivalente a quella data da T. Tanino [9]. Grazie a questo, valgono per tale definizione i risultati ottenuti da T. Tanino [9]. In particolare *WCSup*X verifica le seguenti proprietà:

i) *WCsup*$X\neq\emptyset$ per ogni $X\neq\emptyset$

ii)*WCsup*X divide lo spazio $\Re^n$ in tre insiemi disgiunti. Precisamente

$$\Re^n = (WCsupX\text{-int}C) \cup \{WCsupX\} \cup (WCsupX\text{+int}C)$$

iii) è possibile riformulare la proprietà 2 vista per i reali semplicemente sostituendo $x>y$ con $x \in y+\text{int}C$.

iv) così come l'estremo superiore di un insieme $A\subseteq\Re$ è il massimo di clA *WCsup*X con $X\subseteq\Re^n$ coincide con l'insieme degli elementi massimali di cl(X-C).Se *WCsup*$X\subseteq X$ allora *WCsup*X=WE(X,C) ovvero l'insieme degli estremi superiori deboli coincide con quello degli elementi massimali deboli di X.

v) Poiché WCsup(X)=cl(X-C)\X-intC esiste in X-C una successione $\{x_n\}$ tale che $\lim x_n \in$ *WCsup*X

Pur conservando molte delle proprietà dell'estremo superiore dei numeri reali, la definizione 5.2, equivalente a quella data da T.Tanino [9], non è tuttavia esente da critiche ed obiezioni. L'insieme degli estremi superiori deboli infatti ha generalmente cardinalità superiore ad uno e quindi veniamo quasi sempre a perdere l'unicità del sup che ritroviamo invece nel caso reale unidimensionale. In secondo luogo, appartengono a *WCSup*X elementi che hanno "poco a che fare" con l'insieme X ovvero non appartengono né ad X né alla chiusura di X, così come mostra il seguenti esempio.

<u>Esempio 5.7.</u> C è il cono paretiano

$$X=\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2=\frac{5x_1-1}{x_1+1}, 0\leq x_1\leq 2\}\cup\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2=\frac{9}{x_1}, x_1\geq 2\}$$

$$WCSupX=\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2=3, x_1\leq 2\}\}\cup\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2=\frac{9}{x_1}, x_1>2\}$$

Gli elementi $(x_1,3)$ con $x<0$ sono estremi superiori deboli di X, ma non appartengono né all'insieme X né alla sua chiusura.

6. Condizioni necessarie e\o sufficienti di esistenza dell'estremo superiore tramite il cono polare ed il cono di recessione.

Riferendoci alla definizione 5.2 e ai risultati ottenuti da T.Tanino [9], si ha che

$$WCSup X \cap \Re^n \neq \emptyset \text{ se e solo se } X-C \neq \Re^n$$

La condizione $X-C\neq\Re^n$ assume quindi una notevole importanza in funzione della individuazione dell'insieme degli elementi appartenenti a *WCSup*X. Siamo per questo interessati a ricercare condizioni necessarie e\o sufficienti atte a garantire che $X-C\neq\Re^n$.

Il seguente teorema offre una condizione necessaria in termini di cono di recessione dell'insieme X che, come è noto, è l'insieme

$$Crec=\{d\in\Re^n: \exists\{\alpha_n\}\rightarrow 0,\ \alpha_n>0,\ \{x_n\}\subseteq X: \alpha_n x_n\rightarrow d\ \}.$$

Teorema 6.1

Se $X-C\neq\Re^n$ allora $Crec\cap intC=\emptyset$

Dim.

Se X è limitato, ovvero esiste $M\in\Re_+$ tale che $||x||<M$ per ogni $x\in X$, è noto che $Crec=\{0\}$ e quindi la tesi è banalmente verificata.

Se al contrario X non è limitato, si consideri $0\neq d\in Crec$. Esiste allora una successione $\{x_n\}\subseteq X$ con $||x_n||\rightarrow+\infty$ tale che $\alpha_n x_n\rightarrow d$.

Poiché $X-C\neq\Re^n$, esiste $z\in\Re^n$ tale che $z\neq x-c$ per ogni $c\in C$ e per ogni $x\in X$, da cui $x-z\notin C$ per ogni $x\in X$. In particolare si ha $x_n-z\notin C$ per ogni n, da cui $\alpha_n(x_n-z)\notin C$ per ogni n, ovvero $\alpha_n x_n-\alpha_n z\notin C$ per ogni n. Passando al limite otteniamo $d\notin intC$, da cui la tesi. ♦

Vale la pena sottolineare che la condizione espressa dal teorema 6.1 non è però sufficiente a garantire $X-C\neq\Re^n$ così come evidenzia il seguente esempio.

<u>Esempio 6.2:</u> $X=\{(x_1,x_2)\in\Re^2: x_2=x_1^2)\}$. C è il cono paretiano. $Crec\cap intC=\emptyset$, ma $X-C=\Re^n$

Come mostrato dal seguente teorema, una condizione più forte della precedente e sufficiente affinché $X-C\neq\Re^n$ è data da $Crec\cap C^\circ=\emptyset$. Per maggiore chiarezza espositiva ricordiamo che è detto **cono polare positivo** di un cono convesso K l'insieme $K^+=\{x\in\Re^n: x^Tc\geq 0\ \forall c\in K\ \}$ e che se K è un cono puntato, chiuso allora per ogni $x\in intK^+$ si ha $x^Tc>0\ \forall c\in K$. Inoltre se $x\in K^+$, per ogni $c\in intK$ si ha $x^Tc>0$.

Teorema 6.3

Se $Crec \cap C^{\circ} = \emptyset$ allora $X-C \neq \Re^n$

Dim.

Supponiamo per assurdo che $X-C=\Re^n$. Sia $d \in intC$ e $n \in N$; poiché $nd \in \Re^n$, esiste $x_n \in X$ tale che $nd= x_n - c_n$ con $c_n \in C$, da cui $x_n = nd + c_n$. Notiamo inoltre che $nd \in intC$.

In questo modo, abbiamo costruito una successione $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $\{x_n\} = \{nd + c_n\}$ con $c_n \in C$ e $\{x_n\} \subseteq intC$.

Dimostriamo adesso che $\|x_n\| \rightarrow \infty$, osservando che la $\alpha^T(x_n) \rightarrow \infty$ con $\alpha \in C^+$. Risulta infatti $\alpha^T(x_n) = \alpha^T(nd+c_n) = n(\alpha^T d) + \alpha^T c_n$ con $\alpha^T d > 0$ e $\alpha^T c_n \geq 0$ da cui ovviamente $\alpha^T(x_n) \rightarrow \infty$.

Poiché $\{x_n\} \subseteq X \cap intC$ e $\|x_n\| \rightarrow \infty$. si ha :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} \in Crec \cap C^{\circ}$$

e ciò è assurdo. ♦

Infine il seguente teorema offre una condizione condizione sufficente a garantire $X-C \neq \Re^n$ in termini di successioni crescenti rispetto all'ordinamento indotto da C.

Teorema 6.4

Se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ con $\|x_n\| \rightarrow \infty$ e tale che $x_{n+1} \in x_n + C$ per ogni n, esiste $\alpha \in C^+$ con $\|\alpha\|=1$ tale che la successione $\{\alpha^T x_n\}$ è convergente, allora $X-C \neq \Re^n$.

Dim.

Supponiamo per assurdo che $X-C=\Re^n$ In analogia con la dimostrazione del teorema 6.3 consideriamo $d \in intC$ e costruiamo la successione $\{x_n\} \subseteq X$ e $\{x_n\} = nd + c_n$ con $c_n \in C$. Segue $\{x_n\} \in intC$ per ogni n. Per ogni $\alpha \in C^+$ otteniamo

$$\alpha^T(x_n) = \alpha^T(nd+c_n) = n(\alpha^T d) + \alpha^T(c_n).$$

Per $n \rightarrow \infty$ allora $\alpha^T(d+nc) \rightarrow \infty$; di conseguenza $\|x_n\| \rightarrow \infty$ e $\alpha^T(x_n) \rightarrow \infty$, ma ciò contraddice l'ipotesi. ♦

Grazie ai precedenti risultati siamo ora in grado di fornire condizioni atte a garantire l'esistenza di un estremo superiore debole finito ovvero

$WCSupX \cap \Re^n \neq \emptyset$. Vale infatti il seguente corollario .

Corollario 6.1

Sia $X \subseteq \overline{\Re}^n$ ordinato dal cono C:

i) Se $WCSupX \cap \Re^n \neq \emptyset$ allora $Crec \cap intC = \emptyset$

ii) Se $Crec \cap C^{\circ} = \emptyset$ allora $WCSupX \cap \Re^n \neq \emptyset$

iii) Se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ con $\|x_n\| \to \infty$ e $x_{n+1} \in x_n + C$ per ogni n, esiste $\alpha \in C^+$ con $\|\alpha\| = 1$ tale che la successione $\{\alpha^T x_n\}$ è convergente, allora $WCSupX \cap \Re^n \neq \emptyset$.

7. Conclusioni

Dall'analisi condotta in questa nota emerge la difficoltà di trasferire tutte le proprietà viste nel caso reale ad insiemi contenuti in spazi euclidei di dimensione finita ed in particolare, i limiti dei vari concetti di estremo superiore sono sempre più evidenti non appena consideriamo insiemi non superiormente limitati.

Nuovi indirizzi di ricerca sembrano quindi interessati ad una rilettura del concetto di estremo superiore allo scopo di riuscire a trovare insiemi che meglio possano interpretare le proprietà del sup nel caso reale. Infine lo studio finora condotto fa riferimento a spazi euclidei di dimensione finita o a spazi topologici caratterizzati da particolare struttura topologica; appare invece interessante l'estensione del concetto di estremo superiore e l'analisi delle sue proprietà, relativamente a spazi topologici di Hausdorff ordinati da relazioni transitive non necessariamente indotte da coni convessi. Tale studio troverebbe una forte motivazione nell'attenzione che la teoria economica dedica a tale tipo di insiemi ed allo stretto legame che intercorre tra il concetto di estremo superiore e la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti a garantire l'esistenza di elementi massimali anche in spazi topologici più generali di quelli euclidei.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Brumelle, "Duality for multiobjective convex programming", in *Mathematics of Operations Research* Vol.6 1981 pag. 159-172

[2] O. Caligaris, P.Oliva *Necessary and Sufficient Conditions for Pareto Problems* in *Bollettino U.M.I* Vol. 18-B 1981 pag. 177-216

[3] J.Jahn, *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear space*, Verlag Peter Lang, Frankfurt 1986

[4] G. Jameson, *Ordered Linear Spaces*, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics N°141, Berlin 1970

[5] H. Kawasaky, *"A duality theorem in multiobjective non linear programming"*, in *Mathematics of Operations Research* Vol.7 1982 pag. 95-110

[6] J.W. Nieuwenhuis, *Supremal points and generalized duality* in *Math. Oper. Stat. Ser. Optimization* Vol. 11 1980 pag. 41-59

[7] A.L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper and Row, New York 1967

[8] H.H. Shaefer *Topological Vector Spaces*, Springer Verlag New-York 1971

[9] T. Tanino, "On Supremum of a Set in Multi-dimensional Space", in *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 130, 1988 pag. 386-397