Report n. 122

Una nota sugli insiemi C-limitati e L-limitati

Laura CAROSI

Pisa, Giugno 1997
Questa ricerca é stata finanziata con fondi di Ateneo (ex 60%)

Una nota sugli insiemi C-limitati e L-limitati

1. Introduzione

In alcuni lavori apparsi recentemente in letteratura ([1], [2], [5]) vengono stabiliti alcuni teoremi di esistenza di elementi massimali tramite condizioni relative a diversi concetti di limitatezza di un insieme. Scopo di questa breve nota è quello di estendere a generici spazi vettoriali topologici, alcuni risultati stabiliti in [2] relativamente a spazi di dimensione finita. Più precisamente, facendo riferimento ad uno spazio topologico vettoriale ordinato da una relazione indotta da un cono convesso, confrontiamo tra loro il concetto di C-limitatezza di un insieme caratterizzato tramite il cono di recessione dell'insieme stesso, e quello di L-limitatezza definito attraverso la limitatezza delle sezioni di un insieme. Si dimostra che la L-limitatezza di un insieme permette di stabilire una condizione di esistenza di elementi massimali più generale rispetto a quella stabilita in [2].

2. Generalità

Al fine di rendere autonomo questo lavoro, riportiamo le seguenti definizioni e proprietà che saranno in seguito richiamate.

Un insieme $C\subseteq\Re^n$ è un **cono** se $\alpha x\in C$ ogni qualvolta $x\in C$ e $\alpha\geq 0$; inoltre C è un cono convesso se C è convesso come insieme. Allo stesso modo C è un cono chiuso se C è chiuso come insieme. C è detto corretto se $\mathrm{cl}C+C\backslash l(C)\subseteq C$ dove $C\backslash l(C)$ rappresenta lo spazio di linealità del cono. Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato dalla relazione indotta da un cono convesso C. E' noto che tale ordinamento è riflessivo, transitivo e compatibile con la struttura lineare di X stesso.

In riferimento alla relazione d'ordine, C è un cono di **Daniell** se ogni rete crescente avente maggiorante converge al suo estremo superiore ([5], [1]).

Ricordiamo che per un insieme $S\subseteq X$:

- $x^*\in\Re^n$ è detto **maggiorante** di S rispetto al cono C se $S\subseteq x^*-C$.

- $x^*\in\Re^n$ è detto **estremo superiore** di S rispetto al cono C se x^* è un maggiorante di S e se per ogni $z\in X$ tale che $S\subseteq z-C$ si ha $x^*\in z-C$.

- $x^*\in\Re^n$ è detto **elemento massimale** di S rispetto a C se $x^*\in S$ e se $(x^*+C\backslash l(C))\cap S=\emptyset$. L'insieme degli elementi massimali di S è denotato con E(S,C)

- l'insieme $S_x=\{y\in S\text{: } y\in x+C\}$ è detto sezione di S in $x\in S$.

- l'insieme $S^+=\{d\in S \text{ : esiste } \alpha_n\to 0 \text{ con } \alpha_n>0 \text{ e } \{x_n\}\subseteq S \text{ tale che } \alpha_n x_n\to d\}$ è detto **cono di recessione** di S.

Con riferimento all'ordinamento indotto da C un insieme $S\subseteq X$ è :

- **diretto** se per ogni coppia x,y di elementi S esiste $z\in X$ tale che $z\in x+C$ e $z\in y+C$.

- **superiormente limitato** (rispetto all'ordinamento) se esiste un elemento $z\in X$

tale che $S \subseteq z-C$.

La ricchezza dello spazio, consente di definire proprietà su S, compatibili con la struttura vettoriale e\o topologica di X, che giocano un ruolo significativo nella determinazione di condizioni necessarie e/o sufficienti a garantire l'esistenza di elementi massimali.

In particolare:

- S è **limitato** se S è assorbito da ogni intorno di 0 I_0, ovvero se per ogni I_0 esiste un $\lambda>0$ tale che $\lambda S \subseteq I_0$. E' noto che S è limitato se e solo se $\{\lambda_n x_n\}$converge a 0 per ogni $\{x_n\} \subseteq S$ e $\lambda_n \to 0$ ovvero S è limitato se e solo se $S^+=\{0\}$. ([6]).

- S è un insieme **C-limitato** se e solo se $S^+ \cap clC = \{0\}$

- S è **C-completo** se non esiste un ricoprimento di S della forma $\{(x_\alpha+clC)^c : \alpha \in I\}$ con $\{x_\alpha\}$ rete crescente in S[5].

Riguardo alle proprietà degli insiemi contenuti in X, richiamiamo la seguente definizione; X è **boundely order complete** se ogni sottoinsieme limitato e diretto ha un estremo superiore ([6]).

3. Insiemi L-limitati.

Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso C e sia $S \subseteq X$.

S è **L-limitato** se ogni sezione S_x di S è limitata.

In questo paragrafo stabiliremo alcuni legami intercorrenti tra le diverse definizioni relative alla limitatezza di un insieme.

Teorema 1

Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso C e sia $S \subseteq X$.

S è limitato $\Rightarrow$ S è C-limitato $\Rightarrow$ S è L-limitato

Dim

Poiché S è limitato se e solo se $S^+=\{0\}$, la prima implicazione è banalmente verificata. Relativamente alla seconda, supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in S$ tale che $(x_0+clC) \cap S$ non sia limitato, ovvero esista $d \in S_{x_0}{}^+$ con $d \neq 0$. Di conseguenza esiste $\{x_n\} \subseteq S_{x_0}$,$\{\lambda_n\}$con $\lambda_n>0$ e $\lambda_n \to 0$ tale che $x_n\lambda_n \to d$.

Poiché $\{x_n\} \subseteq S_{x_0}$ allora $x_n \in x_0+clC$ ovvero $x_n=x_0+c_n$ con $c_n \in clC$, da cui $(x_n-x_0) \in clC$. Inoltre osserviamo che $\lambda_n x_n = \lambda_n(x_0+c_n) = \lambda_n x_0+\lambda_n c_n$; da $x_n\lambda_n \to d$. e $\lambda_n x_0 \to 0$ segue $\lambda_n c_n \to d$ e di conseguenza $d \in clC$.

Questo implica che $d \in clC \cap S_{x_0}{}^+ \subseteq S^+ \cap clC$ contro l'ipotesi di C-limitatezza di S.

♦

In generale non è vero che un insieme C-limitato è anche L-limitato. Il lettore interessato può vedere un controesempio in [2]

La L-limitatezza e la C-limitatezza coincidono se S è chiuso e convesso.

All'enunciato ed alla dimostrazione di questo risultato premettiamo il seguente lemma.

Lemma 2
Sia $S \subseteq X$ un insieme chiuso e convesso. Se $d \in S^+$ allora $x+td \in S$, $x \in S$ e $t>0$.
Dim.

Siano $\{x_n\} \subseteq S$ e $\{\lambda_n\} \subseteq \Re$, $\lambda_n>0$, $\lambda_n \to 0$ tali che $x_n\lambda_n \to d$. Osserviamo preliminarmente che preso un elemento x qualsiasi di S otteniamo $\lambda_n(x_n-x) \to d$ dato che $\lambda_n x \to 0$. Inoltre definiamo la funzione $f: X \to X$ tale che $f(x)=x'+t'x$ con $x' \in X$ e $t' \in \Re$; in virtù delle proprietà della topologia definita su X f è continua. Ciò implica che per ogni intorno I di $x'+t'd$ esiste un intorno I_d di d, tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I_d$. Poiché $x_n\lambda_n \to d$ esiste un n^* tale che $x_n\lambda_n \in I_d$ per ogni $n>n^*$ e, quindi, $f(x_n\lambda_n)=x'+t'x_n\lambda_n \in I$.

Supponiamo per assurdo che esista un x^* ed un t^* tale che $x^*+t^*d \notin S$. Poiché S è chiuso, esiste un intorno I di x^*+t^*d completamente contenuto nel complementare di S. In base a quanto osservato in precedenza, $\lambda_n(x_n-x) \to d$ implica che esiste un n^* sufficientemente grande tale che $x^*+t^*\lambda_n(x_n-x^*) \in I$ per ogni $n>n^*$ e conseguentemente $x^*+t^*\lambda_n(x_n-x^*) \notin S$ per ogni $n>n^*$.

Si prenda adesso n' tale che $t^*\lambda_n<1$ per $n>n'$. Per ogni $n>\max\{n^*,n'\}$ otteniamo per la convessità di S, $x^*-t^*\lambda_n x^*+t^*\lambda_n x_n =(1- t^*\lambda_n)x^*+ t^*\lambda_n x_n \in S$, ma poiché $n>n^*$ abbiamo anche $x^*+t^*(\lambda_n(x_n-x^*)) \notin S$ che è assurdo. ♦

Teorema 3
Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso C e sia $S \subseteq X$.
Se S è chiuso e convesso allora S è C-limitato se e solo se S è L-limitato
Dim

In virtù del teorema 1 è sufficiente dimostrare che se S è L-limitato allora S è C-limitato.

Supponiamo per assurdo che esista $d \in S^+ \cap clC$, $d \neq 0$. Per la convessità di S ed il lemma 2 si ha che la semiretta $x=x_0+td$, $t \geq 0$, $x_0 \in S$ è contenuta in clS e, d'altra parte, è contenuta anche in (x_0+clC) dato che clC é un cono convesso; segue che $(x_0+td) \cap clS$ non è limitato e ciò comporta anche la non limitatezza dell'insieme $(x_0+clC) \cap clS$, contro l'ipotesi. ♦

4. L-limitatezza ed esistenza di elementi massimali

Le proprietà vettoriali e\o topologiche dello spazio X, consentono, come è noto, di stabilire teoremi di esistenza di elementi massimali che sfruttano le proprietà stesse dello spazio. Tra i numerosi risultati presenti in letteratura ricordiamo il seguente che sfrutta le ipotesi di C-completezza dell'insieme ordinato S e di correttezza del cono C.

Teorema 4 (D.T. Luc [5])
Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso C. Sia $S \subseteq X$.
Se è C-completo e C è corretto allora $E(S,C) \neq \emptyset$.

Tale risultato, unitamente al teorema 3 presentato nel paragrafo precedente, consente di generalizzare a spazi vettoriali topologici il risultato di esistenza presentato da Cambini-Martein [2] relativamente ad insiemi contenuti in $\Re^n$ e di ritrovare come corollario un teorema stabilito da Borwein [1]

Al riguardo dimostriamo che sotto opportune ipotesi, la L-limitatezza di un insieme S implica la sua C-completezza di S.

Teorema 5.
Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso C e sia $S \subseteq X$.
Se X è boundely order complete, S è chiuso, L-limitato e C è un cono di Daniell, allora S è C-completo
Dim

Si consideri una sezione S_x di S ed una generica rete $\{x_\alpha\}$crescente in S_x. Poiché S_x è limitata e X è uno spazio boundely order complete, allora ogni rete crescente ammette estremo superiore ed in particolare, ha un maggiorante. Inoltre l'ipotesi che il cono C sia di Daniell implica che $\{x_\alpha\}$converge al suo estremo superiore x^*.

Essendo S un insieme chiuso, x^* appartiene a S ed inoltre $x^* \in (x_\alpha + clC)$ per ogni α. Quindi la famiglia $\{(x_\alpha + clC)^c\}$ non può ricoprire S_x, da cui la tesi ♦

Dal precedente teorema segue direttamente il seguente risultato di esistenza degli elementi massimali.

Teorema 6
Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso, corretto e di Daniell C e sia $S \subseteq X$.
Se X è boundely order complete, S è chiuso, L-limitato , allora $E(S,C) \neq \emptyset$
Dim

Dal teorema 5 segue che S è C-completo; in virtù del teorema 4 la tesi è banalmente verificata. ♦

Siamo ora in grado di ritrovare come corollari i risultati di esistenza di elementi massimali legati all'ipotesi di C-limitatezza e di limitatezza dell'insieme S.

Corollario 7
Sia X uno spazio vettoriale topologico ordinato da un cono convesso corretto C, boundely order complete. Se $S \subseteq X$ è chiuso, C-limitato e il cono C è di Daniell allora $E(S,C) \neq \emptyset$.

Corollario 8
Sia X uno spazio vettoriale topologico boundely order complete ordinato da un cono

convesso, corretto C e sia $S \subseteq X$. Se X è, S è chiuso, limitato e C è un cono di Daniell, allora $E(S,C) \neq \emptyset$

Osservazione 9
Poiché un cono chiuso è anche corrretto [5], il corollario 7 estende un risultato dato da Cambini-Martein [2], mentre il corollario 8 ne estende uno dato da Borwein [1]

Bibliografia

[1] J. Borwein *"On the existence of Pareto Efficient Points,"* in Mathematics Operation Research N°8, 1983, pag. 64-73

[2]A. Cambini, L.Martein *"On the existence of efficient points"* in Optimization, Vol. 28, 1994 , pag. 283-290

[3] J.P.Dedieu *"Cone asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimization"* in C. R. Acad. Sc. Paris N° 285 Série A pag. 501-503

[4]J. Jahn *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces* Peter lang 1986, Frankfurt

[5] D.T. Luc *Theory of Vector Optimization* Springer Verlag Berlin Heidelberg 1989

[6] A.L.Peressini *"Ordered Topological Vector Spaces"* Harper and Row Publ., New York 1967