Report n. 123

Sull'estremo superiore di una funzione lineare fratta ristretta ad un insieme chiuso e illimitato

Laura CAROSI

Pisa, Luglio 1997
Questa ricerca é stata finanziata con fondi di Ateneo (ex 60%)

Sull'estremo superiore di una funzione lineare fratta ristretta ad un insieme chiuso e illimitato

Introduzione

Nel caso di non esistenza di soluzioni ottime di un problema di massimo vincolato, si ha interesse a conoscere condizioni sotto le quali l'estremo superiore L della funzione obiettivo è finito o infinito e a stabilire procedimenti atti a determinarlo.
Una tale problematica è pressoché assente in letteratura che è rivolta, al contrario, allo studio delle condizioni di ottimalità.
In questo lavoro si considera un problema di massimo vincolato avente per funzione obiettivo una funzione lineare fratta e per regione ammissibile un insieme S chiuso e illimitato, non necessariamente espresso da funzioni vincolari. Le caratteristiche del problema analizzato, consentono di ritrovare come caso particolare il classico problema di programmazione lineare frazionaria ben noto per le sue molteplici applicazioni nel campo economico e frazionario ([5],[8]).
Per il problema considerato vengono determinate, tramite il cono di recessione dell'insieme S, varie condizioni per le quali l'estremo superiore é finito oppure infinito.
I risultati trovati mettono in evidenza che le proprietà del problema considerato differiscono notevolmente (anche nel caso di regione ammissibile convessa) da quelle del classico problema lineare frazionario in cui la regione ammissibile è poliedrica.
Specificando infine i vari teoremi al caso particolare in cui la funzione obiettivo diviene lineare si trovano nuovi e noti risultati.

1. Cono di recessione di un insieme

Allo scopo di rendere più agevole la lettura del lavoro, richiameremo le principali proprietà del cono di recessione di un insieme. Denoteremo con $\Re_+$ l'insieme dei numeri reali non negativi e con $\Re_{++}$ l'insieme dei numeri reali positivi.

Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme chiuso. Il **cono di recessione** di S è l'insieme $O^+(S)=\{d \in \Re^n :$ esiste $\{\alpha_n\} \subseteq \Re_{++}$, $\alpha_n \rightarrow 0$ ed esiste $\{x_n\} \subseteq S$ tale che $\alpha_n x_n \rightarrow d\}$
Valgono le seguenti note proprietà. ([2], [4], [7])

Proposizione 1.1
i) $0 \in O^+(S)$
ii) S è limitato se e solo se $O^+(S)= \{0\}$
iii) $O^+(S)$ è un cono chiuso

Se l'insieme S è convesso il cono di recessione $O^+(S)$ verifica ulteriori proprietà, così come evidenzia la seguente proposizione.

Proposizione 1.2

Sia $S \subseteq \Re^n$ un insieme convesso

i) $d \in O^+(S)$ se e solo se $x=x_0+td \in S$, per ogni $x_0 \in S$, per ogni $t \geq 0$

ii) $O^+(S)$ è un cono convesso

iii) $O^+(S)= \Re^n$ se e solo se $S=\Re^n$

iv) Se S è un insieme poliedrico allora $O^+(S)$ è una combinazione lineare non negativa di un numero finito di direzioni estreme.

Dim

Siano $\{x_n\} \subseteq S$ e $\{\lambda_n\} \subseteq \Re_{++}$, $\lambda_n \to 0$ tali che $x_n\lambda_n \to d$. Osserviamo preliminarmente che preso un elemento x qualsiasi di S otteniamo $\lambda_n(x_n-x) \to d$ dato che $\lambda_n x \to 0$. Inoltre definiamo la funzione $f:X \to X$ tale che $f(x)=x'+t'x$ con $x' \in X$ e $t' \in \Re$; in virtù delle proprietà della topologia definita su X f è continua. Ciò implica che per ogni intorno I di $x'+t'd$ esiste un intorno I_d di d, tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I_d$.

Poiché $x_n\lambda_n \to d$ esiste un n^* tale che $x_n\lambda_n \in I_d$ per ogni $n>n^*$ e, quindi, $f(x_n\lambda_n)=x'+t'x_n\lambda_n \in I$.

Supponiamo per assurdo che esista un x^* ed un t^* tale che $x^*+t^*d \notin S$. Poiché S è chiuso, esiste un intorno I di x^*+t^*d completamente contenuto nel complementare di S. In base a quanto visto in precedenza, esiste un intorno I_d di d tale che $x^*+t^*x \in I$ per ogni $x \in I_d$. Osserviamo che $\lambda_n(x_n-x) \to d$ e ciò implica che esiste un n^* sufficientemente grande tale che $\lambda_n(x_n-x) \in I_d$ per ogni $n>n^*$ e quindi $x^*+t^*\lambda_n(x_n-x^*) \in I$ da cui segue $x^*+t^*\lambda_n(x_n-x^*) \notin S$ per ogni $n>n^*$.

Si prenda adesso n' tale che $t^*\lambda_n<1$ per $n>n'$. Per ogni $n>\max\{n^*,n'\}$, otteniamo, per la convessità di S, $x^*-t^*\lambda_n x^*+t^*\lambda_n x_n =(1- t^*\lambda_n)x^*+ t^*\lambda_n x_n \in S$, ma poiché $n>n^*$ abbiamo anche $x^*+t^*(\lambda_n(x_n-x^*)) \notin S$ che è assurdo.

Viceversa sia $x=x_0+td \in S$, per ogni $x_0 \in S$, per ogni $t \geq 0$ e dimostriamo che $d \in O^+(S)$. Osserviamo che per $t \to \infty$, $\|x_0+td\| \to \infty$ ed inoltre $\dfrac{x_0+td}{\|x_0+td\|} \to \dfrac{d}{\|d\|}$, ovvero $\dfrac{d}{\|d\|} \in O^+(S)$. Poiché $O^+(S)$ è un cono segue che $d \in O^+(S)$ da cui la tesi.

ii) Siano $d_1,d_2 \in O^+(S)$ e dimostriamo che $\lambda d_1+(1-\lambda)d_2 \in O^+(S)$. Dalla i) segue che $x_1=x_0+t\, d_1 \in S$ e $x_2=x_0+t\, d_2 \in S$ e per la convessità di S otteniamo $\lambda\, x_1+(1-\lambda)x_2 = x_0 + \lambda d_1+(1-\lambda)d_2 \in S$ con $t \geq 0$. Segue che $\lambda d_1+(1-\lambda)d_2 \in O^+(S)$

iii) Se $O^+(S)= \Re^n$ allora, per la convessità di S si ha $x_0+t\, d \in S$ per ogni $d \in \Re^n$ da cui $\Re^n =S$. Viceversa, se $S=\Re^n$ allora per ogni $d \in \Re^n$ ed ogni $x_0 \in S$ otteniamo $x_0+t\, d$

$\in S$, da cui $d \in O^+(S)$.

iv) Segue immediatamente dalla i) e dal teorema di rappresentazione degli insiemi poliedrici ♦

2. Posizione del problema e risultati preliminari

Si consideri il problema

$$(1) \qquad \sup_{x \in S} \; f(x) = \left[\frac{a^T x + a_0}{b^T x + b_0} \right] \stackrel{\Delta}{=} L$$

ove $S \subseteq \Re^n$ è un insieme chiuso ed illimitato, $a,b \in \Re^n$, $a_0,b_0 \in \Re$, $b^T x + b_0 > 0$ per ogni $x \in S$.

La non esistenza di una soluzione ottima del problema implica l'esistenza di una successione $\{x_n\} \subseteq S$, divergente in norma, tale che $f(x_n) \to L$.

In questo paragrafo studieremo una generica successione $\{x_n\} \subseteq S$, divergente in norma, soffermandoci in particolare sul comportamento della corrispondente successione $\{f(x_n)\}$.

A tale scopo denotiamo con $Rec(S) = \{d \in O^+(S): \|d\|=1\}$. Si osservi che per la iii) della proposizione 1.1, Rec(S) è un insieme compatto.

Poiché ogni successione limitata contenuta in $\Re^n$ ammette una sottosuccessione convergente, converremo, a meno di ridenominazioni, che ogni successione limitata considerata sia convergente.

Sia $(x_n\} \subseteq S$, con $\|x_n\| \to +\infty$ e sia $d = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\|x_n\|}$; ovviamente $d \in Rec(S)$.

Si ponga $h_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} - d$, $a^\perp = \{x \in \Re^n: a^T x = 0\}$, $b^\perp = \{x \in \Re^n: b^T x = 0\}$,

$H^\perp = a^\perp \cap b^\perp$, $H = (H^\perp)^\perp$.

Poiché $\Re^n$ è la somma diretta di H e $H^\perp$, ogni elemento h_n può essere unicamente espresso nella forma $h_n = h_n{}^* + h_n{}^\perp$ con $h_n{}^* \in H$ e $h_n{}^\perp \in H^\perp$.

Tenuto conto che $a^T h_n = a^T h_n{}^*$ e $b^T h_n = b^T h_n{}^*$ andiamo a calcolare il seguente limite:

$$l = \lim_{n \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} \cdot \frac{a^T (d + h_n^*) \|x_n\| + a_0}{b^T (d + h_n^*) \|x_n\| + b_0}$$

Posto $h^* = \lim_{n \to \infty} \frac{h_n{}^*}{\|h_n{}^*\|}$ e riferendoci alla notazione appena introdotta, vale il seguente

Teorema 2.1
Valgono i seguenti casi esaustivi:

i) se $b^T d \neq 0$,	allora	$l = \dfrac{a^T d}{b^T d}$
ii) se $b^T d=0$, $a^T d>0$	allora	$l=+\infty$
iii) se $b^T d=0$, $a^T d<0$	allora	$l=-\infty$

iv) se $b^T d=0$, $a^T d=0$ possono verificarsi i seguenti sottocasi

a) se $\|h_n^*\|\|x_n\| \to \beta \neq 0$	allora	$l = \dfrac{\beta a^T h^* + a_0}{\beta b^T h^* + b_0}$
b) se $\|h_n^*\|\|x_n\| \to 0$	allora	$l = \dfrac{a_0}{b_0}$
c) se $\|h_n^*\|\|x_n\| \to +\infty$ e $b^T h^* \neq 0$	allora	$l = \dfrac{a^T h^*}{b^T h^*}$
d) se $\|h_n^*\|\|x_n\| \to +\infty$, $b^T h^*=0$, $a^T h^*>0$ ($a^T h^*<0$)	allora	$l=+\infty$ ($-\infty$)

Dim

i), ii), iii) Ovvie. Basta dividere numeratore e denominatore per $\| x_n\|$.

iv) le ipotesi implicano che

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a^T\left(d + h_n^*\right)\|x_n\| + a_0}{b^T\left(d + h_n^*\right)\|x_n\| + b_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{a^T\|h_n^*\|}{\|h_n^*\|}\|h_n^*\|\|x_n\| + a_0}{\dfrac{b^T\|h_n^*\|}{\|h_n^*\|}\|h_n^*\|\|x_n\| + b_0} \quad \text{da cui seguono}$$

immediatamente a) e b).

Nel caso in cui $\|h_n^*\|\|x_n\| \to +\infty$, c) e d) si ottengono dividendo per $\|h_n^*\|\|x_n\|$ denominatore e numeratore della f. Per quanto riguarda d) infine, si osservi che $b^T h^*=0$ implica necessariamente che $a^T h^* \neq 0$, dato che $h^* \notin H^\perp$. ♦

Osservazione 2.2

Nel caso in cui la funzione obiettivo f sia è lineare (ovvero b=0, $b_0=1$, $a_0=0$), tenuto conto che $H^\perp$ coincide con $a^\perp$, i risultati del teorema precedente si specializzano nel seguente modo.

Corollario 2.3

Si consideri il problema $\max_{x \in S} f(x)= a^T x$. Ripsetto alle notazioni introdote, valgono i seguenti casi esaustivi:

1) se $a^T d>0$	allora	$l=+\infty$
2) se $a^T d<0$	allora	$l=-\infty$

3) se $a^T d=0$ e $\|h_n^*\| \| x_n\| \to \beta \neq 0$	allora	$l=\beta a^T h^*=\beta\|a\|$
4) se $a^T d=0$ e $\|h_n^*\| \| x_n\| \to 0$	allora	$l=0$
5) se $a^T d=0$, $\|h_n^*\| \| x_n\| \to +\infty$ e $a^T h^*>0$ ($a^T h^*<0$)	allora	$l=+\infty$ $(-\infty)$

A chairimento dei risultati presentati, si considerino i seguenti esempi.

<u>Esempio 2.4</u>: $S:=\{(x,y)\in\Re^2 : y=-\dfrac{1}{x} ; x\geq 1\}$ $Rec(S)=\{(1,0)\}$.Poniamo $d=(1,0)$ e consideriamo la successione $\{n,-1\backslash n\}\subseteq S$; ovviamente $\|(x_n,y_n)\|\to+\infty$.

1) $f(x,y)=\dfrac{2x + 3y + 2}{x + y + 2}$ $a=(2,3)$, $b=(1,1)$, da cui $a^T d=2$ e $b^T d=1$.

$$l=\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{a^T d}{b^T d} =2$$

2) $f(x,y)=\dfrac{2x + 3y + 2}{y + 2}$ $a=(2,3)$, $b=(0,1)$, da cui $a^T d=2>0$ e $b^T d=0$.

$$l=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$$

3) $f(x,y)=\dfrac{-2x + 3y + 2}{y + 2}$ $a=(2,3)$, $b=(0,1)$, da cui $a^T d=-2<0$ e $b^T d=0$.

$$l=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty$$

4) $f(x,y)=\dfrac{3y + 2}{y + 2}$ $a=(0,1)$, $b=(0,1)$, da cui $a^T d=0$ e $b^T d=0$.

Con semplici calcoli si ottiene $h_n^* = \left(0,-\dfrac{1}{n^2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}\right)$, $\dfrac{h_n^*}{\|h_n^*\|}\to h^*=(0,-1)$, e

$\|h_n^*\|\|x_n\|\to 0$ da cui $l=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$

<u>Esempio 2.5</u>: $S:=\{(x,y)\in\Re^2 : y = -\dfrac{1}{n} +2, x\geq 1\}$ $Rec(S)=\{(1,0)\}$.Poniamo $d=(1,0)$ e consideriamo la successione $\{n,-1\backslash n+2\}\subseteq S$; banalmente $\|(x_n,y_n)\|\to+\infty$.

$f(x,y)=\dfrac{3y+2}{y+1}$ $a=(0,3)$, $b=(0,1)$, da cui $a^T d=0$ e $b^T d=0$. E' agevole verificare che

$h_n^* = \left(0,-\dfrac{1+2n}{n^2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}}\right)$, $\dfrac{h_n^*}{\|h_n^*\|}\to h^*=(0,1)$, e $\|h_n^*\| \| x_n\|\to 2\neq 0$.

$$l=\frac{\beta a^T h^* + a_0}{\beta b^T h^* + b_0} = 8/3$$

Esempio 2.6: $S:=\{(x,y)\in\Re^2 : y\geq x^2, x\geq 0\}$ $Rec(S)=\{(0,1)\}$. Poniamo $d=(0,1)$ e consideriamo $\{x_n,y_n\}\subseteq S$ tale che $(x_n,y_n)=(n,n^2)$;ovviamente $\|(x_n,y_n)\|\to+\infty$.

$f(x,y)=\dfrac{x+2}{x+1}$ $a=b=(1,0)$, da cui $a^Td=0$ e $b^Td=0$.

Otteniamo $h_n^*=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}},0\right)$, $\dfrac{h_n^*}{\|h_n^*\|}\to h^*=(1,0)$, $\|h_n^*\|\|(x_n,y_n)\|\to+\infty$, $b^T h^*\neq 0$.

$f(x_n,y_n)\to l=\dfrac{a^Th^*}{b^Th^*}=1$

Esempio 2.7: $S=\{(x,y,z)\in\Re^3 : (x,y,z)=(x,\sqrt{x},-\sqrt{x}), x\geq 0\}$.

$f(x,y,z)=\dfrac{y-z+2}{y+z+1}$ $Rec(S)=(1,0,0)$. $a=(0,1,-1)$ $b=(0,1,1)$. E' facile ricavare che

$\dfrac{h_n^*}{\|h_n^*\|}\to\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\|h_n^*\|\|x_n\|\to\infty$, $b^T h^*=0$ e $a^T h^*>0$. Segue $l=+\infty$.

3. Sull'estremo superiore del problema considerato

Vediamo adesso come i risultati precedenti permettano di ottenere utili indicazioni riguardo all'estremo superiore del problema di massimo vincolato considerato.

Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente affinché la funzione f ammetta estremo superiore finito.

Teorema 3.1

Si consideri il problema

$$(1)\qquad \max_{x\in S}\quad f(x)=\left[\frac{a^Tx+a_0}{b^Tx+b_0}\right]$$

Allora l'estremo superiore L é finito se si verifica una delle seguenti condizioni;

i) $\max_{d\in Rec(S)} a^Td<0$;

ii) $b^\perp\cap Rec(S)=\emptyset$. In particolare se $b^\perp\cap Rec(S)=\emptyset$ e non esiste massimo di f, allora

$$\sup f(x)=\max_{d\in Rec(S)}\frac{a^Td}{b^Td};$$

iii) $\max_{d\in Rec(S)} a^Td\leq 0$ e per ogni $d\in Rec(S)\cap H^\perp$ la successione $\|h_n^*\|\|x_n\|$ ammette limite finito

iv) $\max\limits_{d \in Rec(S)} a^T d \leq 0$ e per ogni $d \in Rec(S) \cap H^{\perp}$ si ha $\|h_n^*\| \| x_n\| \to +\infty$ e $b^T h^* \neq 0$.

Dim

i) Per assurdo supponiamo che sup $f(x) = +\infty$, ovvero esista una successione $\{x_n\} \subseteq S$, $\| x_n\|$ tale che $f(x_n) \to +\infty$ e sia $d' = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. A norma del teorema 2.1 segue che $a^T d' \geq 0$ (cfr. ii) e iv)d di 2.1) contro l'ipotesi $\max\limits_{d \in Rec(S)} a^T d < 0$

ii) Dalla i) del teorema 2.1 segue direttamente che l'estremo superiore è finito. Per dimostrare la seconda parte dell'asserto, osserviamo preliminarmente che il problema (p): $\max\limits_{d \in Rec(S)} \frac{a^T d}{b^T d}$ ammette soluzione dato che Rec(S) è compatto e $\frac{a^T d}{b^T d}$ è una funzione continua ; indichiamo con d^* la soluzione di (p). Inoltre poiché $d^* \in Rec(S)$, esiste una successione $\{y_n\}$, $\|y_n\| \to \infty$ tale che $\frac{y_n}{\|y_n\|} \to d^*$ e di conseguenza $f(y_n) \to \frac{a^T d^*}{b^T d^*}$. Per ogni successione $\{x_n\} \subseteq S$, $\|x_n\| \to \infty$ abbiamo $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to d$ con $d \in Rec(S)$ e quindi $f(x_n) \to \frac{a^T d}{b^T d} \leq \frac{a^T d^*}{b^T d^*}$.

Poiché $\sup f(x) = L < \infty$ e non esiste massimo , esiste una successione $\{x_n\}$, $\|x_n\| \to +\infty$ tale che $f(x_n) \to L = \frac{a^T d}{b^T d} \geq \frac{a^T d^*}{b^T d^*}$, da cui segue immediatamente $\sup f(x) = \frac{a^T d^*}{b^T d^*}$

iii) Per assurdo supponiamo $f(x) = +\infty$. In virtù del teorema 2.1 $a^T d \geq 0$. $a^T d > 0$ è assurdo perché contro l'ipotesi. Se $a^T d = 0$ in virtù del teorema 2.1, $\|h_n^*\| \| x_n\| \to +\infty$ e ciò contraddice l'ipotesi.

iv) Per assurdo supponiamo $f(x) = +\infty$. In virtù del teorema 2.1 $a^T d \geq 0$. $a^T d > 0$ è assurdo perché contro l'ipotesi. Se $a^T d = 0$ in virtù del teorema 2.1 $\|h_n^*\| \| x_n\| \to +\infty$, $b^T h^* = 0$ e ciò contraddice l'ipotesi. ♦

I risultati appena enunciati offrono condizioni di esistenza dell'estremo superiore finito, ma non danno alcuna informazione riguardo all'esistenza del massimo. Si veda al riguardo la 1) dell'esempio 2.4.

Proponiamo il seguente teorema che offre una condizione sufficiente a garantire l'esistenza del massimo di f.

Teorema 3.2

Sia dato il problema

$$(1) \qquad \max_{x \in S} f(x) = \left[\frac{a^T x + a_0}{b^T x + b_0} \right]$$

Se $\max_{d \in Rec(S)} a^T d<0$ ed esiste $x' \in S$ tale che $f(x') \geq 0$, allora $\max f(x)=L<+\infty$.

Dim

Dal teorema precedente $\sup f(x)=L<+\infty$. Per ipotesi, per ogni successione $\{x_n\} \subseteq S$, $\|x_n\| \to \infty$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n)<0$. Poiché $f(x') \geq 0$ esiste una successione limitata $\{y_n\} \subseteq S$ tale che $\lim_{n \to \infty} = \sup f(x)$. Essendo limitata, $\{y_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente in S, $y_n \to y^*$,ed in virtù della continuità di f, si ha: $f(y^*)= \lim_{n \to \infty} f(y_n)=\sup f(x)$ da cui la tesi. ♦

Infine presentiamo il seguente teorema che offre condizioni sufficienti a garantire che l'estremo superiore non sia finito.

Teorema 3.3

Sia dato il problema

$$(1) \qquad \max_{x \in S} \quad f(x) = \left[\frac{a^T x + a_0}{b^T x + b_0} \right]$$

Allora l'estremo superiore L è infinto se si verifica una delle seguenti condizioni;

i)esiste $d' \in b^{\perp} \cap Rec(S)$ tale che $a^T d>0$;

ii) esiste $d \in H^{\perp} \cap Rec(S)$ tale che la corrispondente successione $\|h_n^*\| \|x_n\| \to +\infty$, e $b^T h^*=0$, $a^T h^*>0$

Dim

i) Sia $\{ x_n \} \subseteq S$ tale che $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to d'$.

In base alla ii) del teorema 2.1 segue $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \to +\infty$

ii) Sia $\{ x_n \} \subseteq S$ tale che $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = \to d'$. Segue banalmente dalla iv) d del teorema 2.1 ♦

Riprendendo gli esempi 2.4 e 2.7 possiamo chiarire i risultati appena esposti

<u>Esempio 2.4</u>

1) $b^{\perp} \cap Rec(S)=\emptyset$, non esiste massimo e $\sup f(x,y)=2=\frac{a^t d}{b^t d}$.

2) $b^{\perp} \cap Rec(S)=(1,0)$, $a^T d=2>0$ segue $\sup f(x)= +\infty$.

4) Poiché $\|h_n^*\| \| x_n\| \to 0$ e $a^T d \leq 0$ per $d \in b^{\perp} \cap Rec(S)$ segue l'estremo superiore è finito. In paticolare $\sup f(x)=1$

<u>Esempio 2.7</u>

$H^{\perp} \cap Rec(S)=d=(1,0)$, $\|h_n^*\| \|x_n\| \to \infty$, $b^T h^*=0$ e $a^T h^*>0$. Segue $\sup f(x)=+\infty$.

L'esempio 2.6 mette in evidenza che nel problema di massimo vincolato considerato, non è vero in generale che l'estremo superiore è raggiunto su una direzione di recessione, così come accade al contrario per il classico problema di programmazione lineare frazionaria, nel quale la regione ammissibile é poliedrica. Daremo una dimostrazione di tale proprietà, non basandoci su procedimenti algoritmici così come avviene in letteratura ([3], [6] [8]), ma sfruttando il teorema di rappresentazione degli insiemi poliedrici .

Presentiamo dapprima il seguente lemma

Lemma 3.5

Sia dato il seguente rapporto

$$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n}{\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 \ldots + \delta_n y_n}$$

ove $y_i \geq 0$, $\delta_i > 0$ i=1,2...n,

Risulta $$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n}{\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 \ldots + \delta_n y_n} \leq \max_i \frac{\gamma_i}{\delta i}$$

Dim

Sia $\frac{\gamma^*}{\delta^*} = \max_i \frac{\gamma_i}{\delta i}$.

Otteniamo $$\frac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n}{\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 \ldots + \delta_n y_n} - \frac{\gamma^*}{\delta^*} =$$

$$= \frac{(\gamma_1 \delta^* - \delta_1 \gamma^*) y_1 + (\gamma_2 \delta^* - \delta_2 \gamma^*) y_2 + \ldots + (\gamma_n \delta^* - \delta_n \gamma^*) y_n}{(\delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 \ldots + \delta_n y_n)\delta^*} .$$

Essendo $(\delta\iota^*\gamma_i - \delta_i \gamma_i^*) y_i \leq 0$ segue la tesi ♦

Come é noto[1], per il teorema di rappresentazione degli insiemi poliedrici, ogni $x \in S$ si può esprimere nella forma $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x^i + \sum_{j=1}^{l} \beta^j d^j$, ove $\sum_{i=1}^{k} \alpha^i = 1$ e $\beta^j \geq 0$, $\alpha^i \geq 0$ x^i e d^j rappresentano rispettivamente i punti e le direzioni estreme di S. In modo equivalente, possiamo scrivere $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x^i + \sum_{j \in J} \beta^j d^j + \sum_{j \in J^*} \beta^j d^j$ ove $J^* = L/J$ con $L = \{ 1,2,\ldots l\}$, $J = \{j \in L : a^T d^j = 0 \text{ e } b^T d^j = 0\}$.

Utilizzando la notazione introdotta otteniamo il seguente lemma.

Lemma 3.6

Sia dato il problema

(P_F) $$\max_{x \in S} \quad f(x) = \left[\frac{a^T x + a_0}{b^T x + b_0} \right]$$

con S insieme chiuso, poliedrico .

Se il problema P_F non ammette massimo, e se $\{ x_n \}$ è una successione tale che $\sup f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ con $x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J} \beta_n^j d^j + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j$, allora si ha $\beta_n^j \to +\infty$ per almeno un $j\in J^*$

Dim

Si osservi preliminarmente che da $x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J} \beta_n^j d^j + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j$

si ricava $\|x_n\| \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i \left\|x^i\right\| + \sum_{j\in J} \beta_n^j \left\|d^j\right\| + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j \left\|d^j\right\| \le$

$$\max_i \|x^i\| + \sum_{j\in J} \beta_n^j \left\|d^j\right\| + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j \left\|d^j\right\| .$$

Essendo $\|x_n\| \to +\infty$ otteniamo $\beta_n^j \to +\infty$ per almeno un $j\in L=J\cup J^*$.

Supponiamo adesso che per assurdo $\beta_n^j \to +\infty$ non valga per ogni $j\in J^*$.

In tal caso abbiamo $\{\alpha_n^i\},\{\beta_n^j\}$ $j\in J^*$ sono successioni limitate e quindi convergenti (a meno di ridenominazioni), da cui

$$f(x_n) = \frac{a^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J} \beta_n^j d^j + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j\right) + a_0}{b^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J} \beta_n^j d^j + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j\right) + b_0} =$$

$$= \frac{a^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j\right) + a_0}{b^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j\in J^*} \beta_n^j d^j\right) + b_0} \to l \text{ con}$$

$$l = \frac{a^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i x^i + \sum_{j\in J^*} \beta_0^j d^j\right) + a_0}{b^T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i x^i + \sum_{j\in J^*} \beta_0^j d^j\right) + b_0}$$

Se $\sup f(x) = +\infty$.abbiamo immediatamente raggiunto l'assurdo. Se al contrario $\sup f(x)$ è finito, si noti che $f(x_n) \to l = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i x^i + \sum_{j\in J^*} \beta_0^j d^j\right)$ e, per il teorema di rappresentazione, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i \left\|x^i\right\| + \sum_{j \in J^*} \beta_0^j \left\|d^j\right\| \in S$, contro l'ipotesi che P_F non ammette massimo. ♦

Siamo quindi in grado di dimostrare il seguente noto risultato della programmazione frazionaria

Teorema 3.7
Sia dato il problema

$$(P_F) \qquad \max_{x \in S} \quad f(x) = \left[\frac{a^T x + a_0}{b^T x + b_0}\right]$$

con S insieme chiuso, poliedrico.
Se P_F non ammette massimo, allora ;

i) $\sup f(x) = +\infty$ se e solo se esiste una direzione estrema d^j tale che $a^T d^j > 0$ e $b^T d^j = 0$.

ii) se $\sup f(x) \neq +\infty$ allora $\sup f(x) = \max_{j \in J^*} \dfrac{a^T d^j}{b^T d^j}$

Dim

Sia $\overline{d}^j$ una direzione estrema verificante le ipotesi del teorema e $x = x_0 + t\overline{d}^j$ con $x_0 \in S$ e $t>0$. Otteniamo $f(x_0 + t\overline{d}^j) = \dfrac{a^T x_0 + a^T t\overline{d}^j + a_0}{b^T x_0 + b^T t\overline{d}^j + b_0}$ e quindi

$\lim_{n \to \infty} f(x_0 + t\overline{d}^j) = +\infty$ da cui la tesi.

Viceversa se $\sup f(x) = +\infty$, allora esiste una successione $\{x_n\} \subseteq S$, divergente in norma, tale che $f(x_n) \to +\infty$. Sia $x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_n^i x^i + \sum_{j \in J} \beta_n^j d^j + \sum_{j \in J^*} \beta_n^j d^j$

A norma del lemma 3.6 esiste almeno $\beta_n^j \to +\infty$ con $j \in J^*$.

Si ponga adesso $\beta_n = \sum_{j \in J^*} \beta_n^j$ e ovviamente, $\beta_n \to +\infty$, $0 \leq \dfrac{\beta_n^j}{\beta_n} \leq 1$ per ogni j e $\sum_{j \in J^*} \dfrac{\beta_n^j}{\beta_n} = 1$. Inoltre ogni successione $\dfrac{\beta_n^j}{\beta_n}$ è convergente (a meno di ridenominazioni della successioni stesse) ed almeno una di esse converge ad $m^j \neq 0$.

Dividendo denominatore e numeratore di $f(x_n)$ per β_n otteniamo :

$$f(x_n)=\frac{\sum\frac{\alpha_n^i}{\beta_n}(a^Tx^i)+\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(a^Td^j)+\frac{a_0}{\beta_n}}{\sum\frac{\alpha_n^i}{\beta_n}(b^Tx^i)+\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(b^Td^j)+\frac{b_0}{\beta_n}}$$ da cui

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(a^Td^j)}{\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(b^Td^j)}.$$

Poiché $f(x_n)\to\infty$ necessariamente $\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(b^Td^j)=\sum_{j\in J^*}m^j(b^Td^j)=0$ e $\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J^*}\frac{\beta_n^j}{\beta_n}(a^Td^j)=\sum_{j\in J^*}m^j(a^Td^j)\geq 0$ e. Poiché $m^j\geq 0$ per ogni j e $m^j\neq 0$ per almeno un j, segue che, per almeno una direzione d^j, si ha $b^Td^j=0$ e $a^Td^j\geq 0$; inoltre poiché $j\in J^*$, $b^Td^j=0$ implica $a^Td^j>0$.

Di conseguenza esiste almeno una direzione estrema d^j, tale che $\sup f(x)=\lim_{t\to\infty} f(x+td^j)=+\infty$ con $x\in S$.

ii) Analogamente a quanto dimostrato per la i) otteniamo $f(x_n)\to\frac{\sum_{j\in J^*}m^j(a^Td^j)}{\sum_{j\in J^*}m^j(b^Td^j)}$

In virtù del lemma 3.5 otteniamo $\frac{\sum_{j\in J^*}m^j(a^Td^j)}{\sum_{j\in J^*}m^j(b^Td^j)}\leq\max_{j\in J^*}\frac{(a^Td^j)}{(b^Td^j)}$ e di conseguenza

$\sup f(x)=\lim_{t\to\infty} f(x+td^{j'})=\frac{a^Td^{j'}}{b^Td^{j'}}$, con $\frac{a^Td^{j'}}{b^Td^{j'}}=\max_{j\in J^*}\frac{(a^Td^j)}{(b^Td^j)}$. ♦

Bibliografia

[1] M.S.Bazaraa H.D.Sherali C.H.Shetty *Non linear Programming* II edition John Wiley & Sons Inc. 1993 Toronto

[2] K.C. Border *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory",* Cambridge University Press, New York, 1985

[3] A.Cambini, L. Martein *"A modified version of Martos' algorithm"*, in Methods of operation Research, Vol. 53, pag. 33-34

[4] J.P. Dedieu *Cone asymptote d'un ensemble non convexe. Application à*

l'optimization, in Comptes Rendues.Acàdemie de Scèances Paris, t.287 Sèrie A- pag.941-943

[5] L. Martein *Applicazione delle programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario,* Report 14 1988Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia Economia e Commercio - Università degli studi di Pisa 1988

[6] B. Martos , *Nonlinear programming theory and methods,* North Holland, Amsterdam, 1975

[7] R.T. Rockafeller *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton New Jersey,1970

[8] S.Schaible *Fractional Programming* in Handbook of Global Optimization pag. 495-608 Edited by R. Horst, P.M. Pardalos, Kluwer Academic Publishers 1995