Report n. 128

Programmazione Frazionaria e Problemi Bicriteria

A. Cambini - L. Martein - E. Moretti

Pisa, Ottobre 1998

Questa Ricerca è stata finanziata dal C.N.R.

1. Introduzione

Scopo di questo lavoro è quello di fissare le fondamenta teoriche come premesse sulle quali costruire algoritmi risolutivi per classi di problemi di programmazione frazionaria e frazionaria generalizzata, nonchè nuovi metodi sequenziali per classi di problemi di ottimo paretiano coinvolgenti due funzioni obiettivo (problemi bicriteria).

Il lavoro si articola nel seguente modo:

- si introduce inizialmente il problema di programmazione frazionaria evidenziando alcuni risultati relativi all'insieme delle soluzioni ottime ed alle condizioni di esistenza e di ottimalità, risultati ottenuti attraverso le proprietà di concavità generalizzata della funzione obiettivo delle quali vengono date dimostrazioni ad "hoc" sia al fine di rendere autonomo questo lavoro sia perchè esse appaiono ancora in modo disorganico in letteratura;
- dopo aver sottolineato la pseudomonotonia di una funzione lineare fratta vengono descritti gli algoritmi principali apparsi in letteratura per problemi di programmazione lineare frazionaria: tra questi è da rilevare l'importanza di un algoritmo di tipo simplesso basato sulla parametrizzazione del problema di programmazione frazionaria e sullo studio della corrispondente funzione marginale; tale metodologia riveste un ruolo di particolare interesse, dovuto alla possibilità di applicazione ad ampie classi di problemi di programmazione matematica quali ad esempio problemi di programmazione frazionaria generalizzata;
- dopo aver osservato che la soluzione ottima di un problema di programmazione frazionaria è una particolare soluzione paretiana di un problema bicriteria avente come funzioni obiettivo il numeratore ed il denominatore dell'obiettivo frazionario, viene introdotto il problema bicriteria e condotto uno studio sulla interrelazione esistente tra l'insieme dei suoi ottimi paretiani e le soluzioni ottime di un problema di estremo vincolato parametrico ad esso associato; tale studio è finalizzato alla formulazione di algoritmi risolutivi atti a generare la frontiera efficiente di alcune classi di problemi bicriteria.

2. Concavità Generalizzata nella Programmazione Frazionaria

Un problema di programmazione frazionaria è un problema del tipo:

$$\text{PF:} \ \max z(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \ x \in S=\{x\in \mathbf{R}^n : h(x) \leq 0\}$$

dove f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, h : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

In particolare diremo che:

- PF è un problema di programmazione lineare frazionaria se le funzioni f(x), g(x), $h_i(x)$, i=1,...m, sono affini ;
- PF è un problema di programmazione quadratica frazionaria se f(x) e g(x) sono funzioni quadratiche e S è un insieme convesso;
- PF è un problema di programmazione frazionaria concavo-convessa se f(x) è concava, g(x) è convessa e S è un insieme convesso.

Si osservi che se il denominatore g(x) cambia segno in S, il problema PF, in generale, non ha soluzioni; senza ledere la generalità possiamo quindi supporre g(x) > 0 per ogni $x\in S$.

Con un approccio che è comune a tutti i problemi di ottimizzazione, si devono:

- stabilire proprietà teoriche del problema quali ad esempio condizioni di esistenza delle soluzioni ottime, condizioni di ottimalità, proprietà dell'insieme delle soluzioni ottime;
- determinare tecniche risolutive per le classi di problemi considerati.

Classi di funzioni che si sono rivelate particolarmente utili per affrontare tali problematiche sono le cosiddette funzioni concave (convesse) generalizzate che assumono un ruolo fondamentale in vari problemi di natura economica (Teoria del Consumatore e Teoria della Produzione).

Come è noto, lo studio della concavità generalizzata ha avuto un notevole sviluppo in quest'ultimo ventennio. Tuttavia, la maggior parte dei risultati appaiono ancora in modo frammentario e disorganico nella letteratura; per tale ragione, al fine di una migliore comprensione del lavoro oltre che di una sua autonomia, forniremo le dimostrazioni delle varie proprietà delle funzioni concave generalizzate utili allo studio di un problema di programmazione frazionaria.

Tra le molteplici classi presenti in letteratura, quelle che più interessano la programmazione frazionaria sono quelle individuate dalle seguenti definizioni:

Definizione 2.1
Si consideri la funzione $z: X \rightarrow \mathbf{R}$, con X insieme convesso contenuto in $\mathbf{R}^n$.
i) z è quasiconcava sull'insieme convesso X se e solo se
$$x,y \in X\ ,\ z(y) \geq z(x) \Rightarrow z(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq z(x),\ \ \forall\ \lambda \in [0,1]\ ;$$
ii) z è semistrettamente quasiconcava sull'insieme convesso X se e solo se
$$x,y \in X\ ,\ z(y) > z(x) \Rightarrow z(\lambda x+(1-\lambda)y) > z(x),\ \ \forall\ \lambda \in]0,1[\ ;$$
iii) sia z differenziabile. z è detta pseudoconcava se e solo se
$$x,y \in X,\ \ z(x) < z(y) \Rightarrow\ \ \nabla z(x)^T\ (y-x) > 0.$$

Definizione 2.2
Si consideri la funzione $z: X \rightarrow \mathbf{R}$, con X insieme convesso contenuto in $\mathbf{R}^n$.
i) z è quasiconvessa sull'insieme convesso X se e solo se -z è quasiconcava;
ii) z è semistrettamente quasiconvessa sull'insieme convesso X se e solo se -z è semistrettamente quasiconcava;
iii) sia z differenziabile. z è detta pseudoconvessa se e solo se -z è pseudoconcava.

Poiché in questo lavoro siamo interessati a problemi di estremo con funzioni obiettivo differenziabili, stabiliremo le relazioni esistenti tra le classi introdotte e le funzioni concave in ipotesi di differenziabilità. Vale al riguardo il seguente Teorema:

Teorema 2.1. Sia $z: X \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, una funzione differenziabile definita su un insieme convesso X.
i) se z è concava allora z è anche pseudoconcava;
ii) se z è pseudoconcava allora z è anche semistrettamente quasiconcava;
iii) se z è semistrettamente quasiconcava allora z è anche quasiconcava.
Dim.
i) Si deve dimostrare che $z(x) < z(y)$ implica $\nabla z(x)^T\ (y-x) > 0$. La concavità di z implica $z(y) \leq\ z(x) + \nabla z(x)\ (y - x)$ da cui $\nabla z(x)\ (y - x) \geq\ z(y) - z(x) > 0$.
ii) Si deve dimostrare che $z(x) < z(y)$ implica $z(x+t\ (y-x)) > z(x)$ per ogni $t \in]0,1[$.
Supponiamo per assurdo che esista $t^* \in]0,1[$ tale che $z(x+t^*(y-x)) \leq z(x)$; allora la funzione $\varphi(t) = z(x+t(y-x))$, $t \in [0,1]$ ha, per il teorema di Weiestrass, un punto di minimo assoluto in $t^{**} \in]0,1[$ e, di conseguenza, $\varphi'(t^{**})=0$.
Risulta allora $z(x+t^{**}(y-x)) < z(y)$ e quindi, per la pseudoconcavità di z, si ha $\nabla z(x+t^{**}(y-x))\ (y - x)\ (1-t^{**}) > 0$, il che è assurdo in quanto $\nabla z(x+t^{**}(y-x))\ (y - x)\ (1-t^{**}) = \varphi'(t^{**})=0$.

iii) Tenuto conto delle due definizioni, si deve dimostrare che $z(y)=z(x)$ implica $\varphi(t)=z(x+t(y-x)) \geq z(x)=\varphi(0)= \varphi(1)$ per ogni $t \in]0,1[$. Supponiamo per assurdo che esista $t^* \in]0,1[$ tale che $\varphi(t^*) < \varphi(1)=z(y)$. Per il Teorema di Weierstrass, la funzione $\varphi(t)$ ha nell'intervallo $[0,1]$ un punto di minimo assoluto t^{**} necessariamente appartenente all'intervallo $]0,1[$. Per continuità esiste un punto t_0 tale che $0<t_0<t^{**}$ e $\varphi(t^{**})< \varphi(t_0)< \varphi(1)$. Per la semistretta quasiconcavità della funzione $\varphi(t)$, si ha $\varphi(t)$? $\varphi(t_0)$ per ogni $t \in]t_0,1[$ e ciò è assurdo in quanto $t^{**} \in]t_0,1[$. ♦

<u>Osservazione 2.1</u>
Per le funzioni convesse generalizzate valgono proprietà analoghe a quelle stabilite nel Teorema 2.1.

Si consideri adesso il problema differenziabile

P: $\max z(x)$; $x \in S=\{x \in \mathbf{R}^n : h_i(x) \leq 0, i=1,...,m\}$

dove $z: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $h_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, h_i quasiconvessa, $i=1,...,m$.
Il seguente Teorema evidenzia il ruolo della concavità generalizzata nei problemi di estremo vincolato.

Teorema 2.2
i) Se z è quasiconcava allora l'insieme delle soluzioni ottime è, se non vuoto, convesso.
ii) Se z è semistrettamente quasiconcava allora un punto di massimo locale per il problema è anche di massimo globale.
iii) Se z è pseudoconcava allora un punto verificante le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker è di massimo globale per il problema.
<u>Dim.</u>
Si osservi preliminarmente che la quasiconvessità di h (cioè di ogni sua componente) implica la convessità della regione ammissibile S.
i) La dimostrazione segue immediatamente dalla definizione di funzione quasiconcava.
ii) Sia x^* un punto di massimo locale per z e supponiamo per assurdo che esista un punto x^{**} della regione tale che $z(x^{**})>z(x^*)$. Per la semistretta quasiconcavità di z si ha $z(x^*+t(x^{**}-x^*))>z(x^*)$ per ogni $t \in]0,1[$. Esiste in particolare $\varepsilon>0$ tale che la disuguaglianza è verificata nell'intervallo $]0,\varepsilon[$ e ciò contraddice l'ottimalità locale di x^*.

iii) Sia x* un punto della regione ammissibile verificante le seguenti condizioni di Karush-Kuhn-Tucker:

$$\nabla z(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0 \qquad \lambda_i \leq 0 \qquad (2.1a)$$

$$\lambda_i h_i(x^*) = 0 \ , \ i = 1, ..., m \qquad (2.1b)$$

$$h_i(x^*) = 0 \ , \ i = 1, ..., m \qquad (2.1c)$$

e supponiamo per assurdo che esista un punto ammissibile x** tale che $z(x^{**})>z(x^*)$. Per la pseudoconcavità di z si ha $(x^{**}- x^*)^T \nabla z(x^*) > 0$, mentre la quasiconvessità di h_i implica $(x^{**}- x^*)^T \nabla h_i(x^*) \leq 0$. Moltiplicando scalarmente membro a membro della (2.1a) per $(x^{**} - x^*)$, si ottiene

$$(x^{**}- x^*)^T \nabla z(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x^{**} - x^*)^T \nabla h_i(x^*) = 0$$

e ciò è assurdo in quanto il primo membro di questa uguaglianza risulta essere strettamente positivo. ♦

Osservazione 2.2

Nella iii) del Teorema precedente l'ipotesi di pseudoconcavità della z non può essere indebolita richiedendo la semistretta quasiconcavità. Al riguardo basta considerare il problema P dove $z(x)=x^5$ e $h(x) =-x^3$; $x^*=0$ verifica le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker ma non è di ottimo per P.

Al fine di individuare le proprietà di un problema di programmazione frazionaria, vediamo sotto quali ipotesi un rapporto di funzioni diviene una funzione concava generalizzata. In generale lo studio della concavità generalizzata di un rapporto di funzioni è condotto utilizzando risultati che coinvolgono prodotti di composizione. Proporremo invece una dimostrazione diretta del seguente Teorema :

Teorema 2.3. Si consideri la funzione $z(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, definita sull'insieme convesso S con f, g differenziabili e $g(x)>0$ in S. Allora z è pseudoconcava in S se:

i) f è concava non negativa e g è convessa positiva;

ii) f è concava e g è affine;

iii) f e g sono affini.

Dim.

i) Si deve dimostrare l'implicazione

$z(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} < z(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}$ implica $\nabla z(x_0)\,(x_1 - x_0) > 0$, ovvero, essendo $\nabla z(x_0) = \dfrac{g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{g(x_0)^2}$, la relazione

$g(x_0)\,\nabla f(x_0)\,(x_1 - x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0) > 0.$

La concavità e la convessità delle funzioni f e g implicano, rispettivamente,

$$f(x_1) \leq f(x_0) + \nabla f(x_0)\,(x_1 - x_0) \tag{2.2}$$

$$g(x_1) \geq g(x_0) + \nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0) \tag{2.3}$$

Moltiplicando la (2.2) e la (2.3) rispettivamente per $g(x_0) > 0$ e $f(x_0) \geq 0$, si hanno le due disuguaglianze

$$f(x_1)\,g(x_0) \leq f(x_0)\,g(x_0) + g(x_0)\,\nabla f(x_0)\,(x_1 - x_0),$$
$$- f(x_0)\,g(x_1) \leq - f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,\nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0).$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$f(x_1)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_1) \leq g(x_0)\,\nabla f(x_0)\,(x_1 - x_0) - f(x_0)\,\nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0).$$

Poiché per ipotesi $z(x_0) < z(x_1)$ risulta $f(x_1)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_1) > 0$ da cui

$$g(x_0)\,\nabla f(x_0)\,(x_1 - x_0) - f(x_0)\,\nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0) > 0.$$

ii), iii). Dimostrazione del tutto analoga alla i), tenendo conto che g affine implica $g(x_1) = g(x_0) + \nabla g(x_0)\,(x_1 - x_0)$. ♦

Quando la regione ammissibile del problema di ottimo è un insieme poliedrico, ovvero le funzioni vincolari h_i sono affini, è possibile specificare una ulteriore proprietà del problema P relativa alla localizzazione dei suoi punti di ottimo.

Teorema 2.4 Si consideri una funzione z definita sull'insieme poliedrico limitato S.

i) Se z è quasiconcava allora il minimo è raggiunto su un vertice.

ii) Se z è quasiconvessa allora il massimo è raggiunto su un vertice.

<u>Dim.</u>

E' noto che un insieme poliedrico compatto può essere espresso come l'insieme delle combinazioni convesse dei suoi punti estremi (vertici) che sono in numero finito.

La dimostrazione segue dal fatto che una funzione è quasiconcava (quasiconvessa) se e solo se la funzione valutata sulla combinazione convessa di p punti è non inferiore (superiore) al minimo (massimo) della funzione valutata su tali punti. ♦

Dal Teorema precedente, tenuto conto delle relazioni tra le classi di funzioni concave generalizzate, segue immediatamente il seguente risultato:

Teorema 2.5 Sia z una funzione definita su un insieme S poliedrico e limitato. Se z è sia quasiconcava che quasiconvessa, oppure è sia semistrettamente quasiconcava che semistrettamente quasiconvessa, oppure è sia pseudoconcava che pseudoconvessa, oppure è sia concava che convessa, allora sia il massimo che il minimo di z su S è raggiunto su un vertice.

Se la regione ammissibile S non è compatta, non è detto che il problema P ammetta ottimo; se però ciò accade, il risultato del caso compatto può essere dimostrato per la classe delle funzioni pseudomonotone (cioè per le funzioni che sono sia pseudoconcave che pseudoconvesse). Vale al riguardo il seguente Teorema :

Teorema 2.6 Sia z una funzione pseudomonotona definita su un insieme poliedrico (non necessariamente limitato). Allora se il problema P ha soluzioni ottime, almeno una di esse è raggiunta su un vertice.

Dim.

Si osservi preliminarmente che un punto x* di una regione poliedrica che non è vertice, può essere espresso come combinazione lineare convessa tra un vertice x_0 ed un punto y della regione ammissibile.

Si denoti con x* una soluzione ottima del problema (ci riferiremo ad x* come punto di massimo; il caso x* punto di minimo segue in modo del tutto analogo) e dimostriamo che la funzione z è costante sul segmento di estremi x_0 ed y.

Sia $\varphi(t) = z(x_0+t(y-x_0))$, $t \in [0,1]$. Si ha $\varphi(0) = z(x_0)$, $\varphi(1) = z(y)$,

$\varphi(t^*) = z(x^*)$ con $t^* \in (0,1)$ e $\varphi'(t^*)=0$.

Se φ non è costante su $[0,1]$, esiste $t^{**} \in [0,1]$ tale che $\varphi(t^*) > \varphi(t^{**})$ e ciò implica, per la pseudoconvessità di z che $\varphi'(t^*) < 0$, il che contraddice la condizione $\varphi'(t^*)=0$. ♦

Si osservi che il Teorema 2.6 non è estendibile alla classe delle funzioni quasimonotone come mostra il seguente esempio

Esempio 2.1

Sia $z(x) = -x^2+2x$ per $0 \le x \le 1$ e $z(x) = 1$ per $x>1$ definita su $S=\{x : x \ge 0\}$.

E' facile verificare che z è quasimonotona (ovvero sia quasiconcava che quasiconvessa) e che i punti di massimo sono tutti i punti $x \geq 1$ che non sono vertici di S.

Per le classi delle funzioni pseudomonotone è possibile stabilire un criterio di ottimalità per i vertici. Vale al riguardo il seguente Teorema:

Teorema 2.7 Sia z una funzione differenziabile pseudomonotona definita sull'insieme poliedrico S. Un vertice x_0 di S è soluzione ottima per il problema P se e solo se $\nabla z(x_0)^T d \leq 0$ per ogni direzione ammissibile d uscente da x_0.

Dim.

Se x_0 è soluzione ottima necessariamente si ha $\nabla z(x_0)^T d \leq 0$ per ogni direzione ammissibile d uscente da x_0 in quanto $\nabla z(x_0)^T d > 0$ implica che d è una direzione ammissibile di crescita per la funzione, il che contraddice l'ottimalità di x_0.

Dimostriamo adesso che la condizione $\nabla z(x_0)^T d \leq 0$ per ogni direzione ammissibile d uscente da x_0 implica l'ottimalità di x_0. Se per assurdo cosí non fosse, esisterebbe un punto ammissibile x^* tale che $z(x^*) > z(x_0)$; per la pseudoconcavità di z risulterebbe $\nabla z(x_0)^T (x^* - x_0) > 0$ il che contraddice l'ipotesi in quanto $d = x^* - x_0$ è una direzione ammissibile uscente da x_0. ♦

Osservando che ogni direzione ammissibile è esprimibile come combinazione lineare non negativa delle direzioni corrispondenti agli spigoli (caso particolare semirette) uscenti da x_0, si ha il seguente Corollario:

Corollario 2.1 Sia z una funzione differenziabile pseudomonotona definita sull'insieme poliedrico S. Un vertice x_0 è soluzione ottima per il problema P se e solo se $\nabla z(x_0)^T d \leq 0$ per ogni direzione d corrispondente ad uno spigolo uscente da x_0.

Osservazione 2.3

L'ipotesi di pseudomonotonia di cui al Corollario precedente è essenziale in quanto in generale non è detto che se la derivata direzionale è non positiva per ogni direzione ammissibile, il punto sia di ottimo per la funzione.

Si consideri al riguardo il problema P: $\max z(x,y) = x^2 - y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Come è facile verificare $x_0 = (0,0)$ è l'unico vertice ammissibile e le direzioni ammissibili sono tutti e soli i vettori $d = (d_1, d_2)$ con componenti $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$ non contemporaneamente nulle. Risulta $\nabla z(x_0) = (0,-1)$, da cui $\nabla z(x_0)^T d = -d_2 \leq 0$.

D'altra parte il punto x_0 non è ottimo per P in quanto valutando la funzione su punti del tipo (x,x^4) con $x>0$, si ha $z(x,x^4)= x^2-x^4= x^2(1-x^2) >0=z(0,0)$ in un intorno destro di x_0.

3. Programmazione Lineare Frazionaria

In questo paragrafo considereremo il problema di programmazione lineare frazionaria specificando per esso i risultati precedenti.

Il problema PF diviene

$$\text{PLF:}\ \max z(x) = \frac{cx+c_0}{dx+d_0} \quad ; \ x \in S=\{x\in \mathbf{R}^n :\ Ax=b,\ x\geq 0\}$$

dove A è una matrice $m\times n$ di rango massimo $m<n$.

Per la iii) del Teorema 2.3 la funzione obiettivo z è pseudomonotona. Pertanto si ha:

- l'insieme delle soluzioni ottime è, se non vuoto, convesso;
- se S è compatto, almeno una soluzione ottima è un vertice di S;
- se esistono soluzioni ottime, almeno una soluzione ottima è un vertice di S.

Vediamo adesso come è possibile specificare il criterio di ottimalità di cui al Corollario 2.1.

Si consideri il vertice $x_0=(x_B=A_B^{-1}b;\ x_N=0)$ ed il cono associato al vertice $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$, $x_N \geq 0$.

Indichiamo con $u^k= (A_B^{-1}A_N^k,\ e^k)$ una direzione associata ad uno spigolo uscente da x_0.

Ricordando che $\nabla z(x) = \dfrac{c(dx+d_0)-d(cx+c_0)}{(dx+d_0)^2}$, si ha $\nabla z(x_0)=\dfrac{c\bar{d}_0 - d\bar{c}_0}{\bar{d}_0^{\,2}}$, dove $\bar{c}_0$, $\bar{d}_0$ indicano i valori del numeratore e del denominatore nel vertice x_0.

Ripartendo i vettori c e d rispetto alle variabili di base e non di base, la derivata direzionale rispetto alla direzione u^k è data da

$$\nabla z(x_0)^T u^k = \frac{1}{\bar{d}_0^{\,2}} \{ \bar{d}_0 [c_B(-A_B^{-1}A_N^k)+c_{N_k}] - \bar{c}_0[d_B(-A_B^{-1}A_N^k)+ d_{N_k}]\}$$

Posto $\bar{c}_{N_k} = c_{N_k} - c_B A_B^{-1}A_N^k$ e $\bar{d}_{N_k} = d_{N_k} - d_B A_B^{-1}A_N^k$, si ha

$$\nabla z(x_0)^T u^k = \frac{\bar{c}_{N_k}\bar{d}_0 - \bar{d}_{N_k}\bar{c}_0}{\bar{d}_0^{\,2}} .$$

Il criterio di ottimalità su una direzione uscente dal vertice x_0 diviene quindi

$$\nabla z(x_0)^T u^k \leq 0 \text{ se e solo se } \bar{c}_{N_k}\bar{d}_0 - \bar{d}_{N_k}\bar{c}_0 \leq 0. \qquad (3.1)$$

Al variare dell'indice k, in notazione compatta si ha

$$\bar{c}_N \bar{d}_0 - \bar{d}_N \bar{c}_0 \leq 0 \qquad (3.2)$$

La condizione di ottimalità (3.2) è stata utilizzata per formulare algoritmi simplex-like.

Si osservi che se il denominatore è costante, il problema PLF si riduce ad un problema di programmazione lineare; in tal caso, essendo d=0, si ritrova la nota condizione di ottimalità sui coefficienti ridotti della funzione obiettivo.

A differenza di un problema di programmazione lineare, ove la non esistenza del massimo implica che l'estremo superiore della funzione obiettivo sulla regione ammissibile è $+\infty$, in un problema di programmazione lineare frazionaria si può verificare il caso in cui l'estremo superiore è finito.

Vale al riguardo il seguente Teorema [CM3]

Teorema 3.1

i. Se il problema PLF ha massimo allora esiste un vertice ottimo $x_0 \in S$.

ii. Se il problema PLF non ha massimo allora esiste una semiretta $r=\{x \in S: x= x_0+tu, t \in \mathbf{R}^+\}$, con $x_0 \in S$ e $u \in \mathbf{R}^n$, detta raggio estremo, tale che $\sup\{z(x): x \in S\} = \sup\{z(x): x \in r\} = \lim_{t \to +\infty} \frac{cx_0 + tcu + c_0}{dx_0 + tdu + d_0}$.

iii. Indicato con D l'insieme delle soluzioni ottime del problema di programmazione lineare min $\{dx+d_0: x \in S\}$, la funzione obiettivo z è superiormente illimitata su S se e solo se sup $\{cx+c_0: x \in D\}=+\infty$.

4. Algoritmi per la programmazione lineare frazionaria

Gli algoritmi per la risoluzione del problema di programmazione lineare frazionaria, PLF, definito nel paragrafo 3, sono ampiamente trattati in letteratura, a testimoniare l'importanza che tale classe di problemi ha nelle applicazioni, in particolare in campo economico.

Un primo gruppo di algoritmi per il problema PLF è stato proposto nel corso degli anni '60. Tali algoritmi, pur non completamente equivalenti tra loro, prevedono una linearizzazione della funzione oggetto del problema; tra i più significativi ricordiamo quelli proposti da Isbell e Marlow[IM], Mangasarian [M], Bitran e Novaes [BiNo], Bhatt [Bh]. Anche l'algoritmo di Dinkelbach[D],

se utilizzato per il problema PLF, prevede la linearizzazione della funzione obiettivo ma consente anche, più in generale, di risolvere problemi di programmazione frazionaria concavo-convessa: per tale motivo esso sarà oggetto di studio nel sottoparagrafo 4.4.

Un secondo approccio per la risoluzione di PLF, dovuto a Charnes e Cooper [ChCo], presentato nel paragrafo 4.3, prevede una trasformazione di PLF in un equivalente problema di programmazione lineare, risultando per questo motivo di semplice applicazione.

Sempre negli anni '60 è stato proposto da Martos [Martos] un algoritmo di tipo simplesso che consente l'ottimizzazione di funzioni pseudomonotone definite su regioni ammissibili poliedriche compatte, non applicabile quindi qualora la regione ammissibile sia illimitata.

Più recentemente Cambini e Martein [CM1] hanno proposto un algoritmo di tipo simplesso che, sfruttando sia le proprietà delle soluzioni ottime di un opportuno problema parametrico associato a PLF, che le condizioni di ottimalità stabilite da Martos, consente la risoluzione del problema anche se la regione ammissibile non è limitata. Nel caso di regione ammissibile non limitata in particolare, è opportuno sottolineare che solo gli algoritmi dovuti a Charnes e Cooper e a Cambini e Martein garantiscono la risoluzione del problema, mentre per l'algoritmo di Martos è nota un'estensione, dovuta ad Hartwig [Ha], che, pur consentendo la risoluzione del problema, necessita di una implementazione particolarmente laboriosa.

L'algoritmo di Cambini e Martein, analizzato nel sottoparagrafo 4.2, è fondato sul concetto di soluzione ottima di livello e fornisce, ad ogni iterazione, una soluzione ammissibile che è ottima relativamente a tutte le soluzioni determinate nelle precedenti iterazioni. L'interesse per l'approccio di Cambini e

Martein è inoltre dovuto al fatto che il metodo può essere esteso ad altre classi di problemi di programmazione matematica, come si vedrà nel paragrafo 5.

4.1 L'algoritmo di Cambini e Martein

Dato il problema PLF, definito nel paragrafo 3, diremo problema parametrico ad esso associato il seguente problema di programmazione lineare parametrica

$$PL(\xi): \qquad \max \frac{cx + c_0}{\xi},$$
$$x \in S_\xi = \{x \in \mathbf{R}^n;\ Ax \leq b,\ dx + d_0 = \xi,\ x \geq 0\}\ .$$

Poiché $S = \bigcup_{\xi \in \mathbf{R}_{++}} S_\xi$, essendo $\mathbf{R}_{++}$ l'insieme dei numeri reali strettamente positivi, vale l'uguaglianza

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}} \sup_{x \in S_\xi} \frac{cx + c_0}{\xi} = \sup_{x \in S} \frac{cx + c_o}{dx + d_o}\ ,$$

con la convenzione che l'estremo superiore di una funzione sia $-\infty$ se la regione vuota. Si evidenzia, pertanto, la possibilità di risolvere PLF una volta note le soluzioni di $PL(\xi)$ al variare del parametro ξ. Allo scopo di definire le soluzioni ottime di livello di PLF come le soluzioni dei problemi lineari $PL(\xi)$ ottenute al variare del parametro, definiamo anzitutto i livelli ammissibili del problema:

Definizione 4.1
Il numero reale ξ è detto livello ammissibile di PLF se esiste $x \in S$ tale che $dx + d_0 = \xi$.

Siano, inoltre, $\xi_{min} = \inf\{dx + d_0, x \in S\}$ e $\xi_{max} = \sup\{dx + d_0, x \in S\}$. Dall'ipotesi di positività del denominatore $dx + d_0$ segue $\xi_{min} \in \mathbf{R}$, mentre si ha $\xi_{max} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. L'insieme dei livelli ammissibili di PLF sarà indicato nel seguito con Ξ. Date le ipotesi di convessità della regione ammissibile S e di continuità della funzione obiettivo, Ξ è un intervallo di numeri reali.

Definizione 4.2
$x \in S$ è soluzione ottima di livello (brevemente: *ols*) di PLF se esiste $\xi \in \Xi$ tale che x è soluzione ottima del problema $PL(\xi)$.

Si noti che, qualora $\hat{x} \in S$ sia un punto di massimo globale di PLF, allora $\hat{x}$ è una soluzione ottima di $PL(d\hat{x} + d_0)$ ed è, pertanto, soluzione ottima di livello per PLF. Tale importante proprietà, legata al concetto di soluzione ottima di livello e non allo specifico problema in esame, vale anche per altre classi di problemi di programmazione matematica, alcune delle quali sono presentate nel capitolo 5. L'insieme delle soluzioni ottime di livello di PLF sarà indicato con L; indicando con L_ξ l'insieme delle soluzioni ottime di livello relative al livello ξ si ha evidentemente

$$L = \bigcup_{\xi \in \Xi} L_\xi \ .$$

Si ricordi che qualora sia

$$\sup \left\{ \frac{cx + c_0}{\xi_{min}};\ x \in S_{\xi_{min}} \right\} \quad = \quad +\infty$$

per (iii) del Teorema 3.1 deve essere $\sup\{z(x);\ x \in S\} \ = \ +\infty$. L'algoritmo di Cambini e Martein [CM1], che descriveremo in seguito, è in grado di risolvere PLF analizzando la restrizione della funzione obiettivo all'insieme delle *ols*. L'algoritmo sfrutta, tra le altre, la seguente importante proprietà, immediata conseguenza della linearità di $PL(\xi)$:

Teorema 4.1 Se, per un fissato livello ξ, si ha $L \neq \emptyset$ allora esiste $x \in L$ appartenente ad uno spigolo di S.

Il Teorema precedente afferma che l'insieme L, se non è vuoto, è costituito da spigoli della regione ammissibile. Poiché, come già evidenziato, l'insieme delle soluzioni ottime di livello di PLF contiene gli eventuali punti di ottimo del problema di programmazione lineare frazionaria, ai fini della formalizzazione di un algoritmo risolutivo del problema stesso è di primaria importanza caratterizzare le *ols* di PLF. Il Teorema 4.2 riportato di seguito, fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un vertice della regione ammissibile S sia *ols* di PLF e risponde quindi in maniera esauriente all'esigenza sopra espressa.
Utilizzando le notazioni del capitolo 3, poniamo

$$J_1 = \{j \in N; \overline{d}_j > 0\}\ ,\ J_2 = \{j \in N; \overline{d}_j < 0\}\ ,\ J_3 = \{j \in N; \overline{d}_j = 0\}\ .$$

Si dimostra che vale il seguente Teorema [CM3]

Teorema 4.2 Il vertice $x^* \in S$ è soluzione ottima di livello di PLF se e solo se valgono le condizioni:

i. per ogni $j \in J_3$ si ha $\overline{c}_j \leq 0$;
ii. se J_1 e J_2 sono insiemi non vuoti allora

$$\frac{\overline{c}_k}{\overline{d}_k} \ = \ \max_{j \in J_1} \frac{\overline{c}_j}{\overline{d}_j} \ \leq \ \min_{j \in J_2} \frac{\overline{c}_j}{\overline{d}_j} \ = \ \frac{\overline{c}_h}{\overline{d}_h}\ .$$

Il Teorema 4.2 fornisce una regola di facile applicazione per passare da un vertice soluzione ottima di livello ad un vertice adiacente che sia anch'esso soluzione ottima di livello, qualora un tale vertice esista.
L'idea su cui si basa l'algoritmo di Cambini e Martein si può infatti sintetizzare come segue: a partire da un vertice che è soluzione ottima di livello corrispondente al minimo livello ammissibile (qualora non sia $\sup\{z(x); x \in S\} = +\infty$) visitare un vertice adiacente cui corrisponda un livello maggiore del precedente, mantenendo l'ottimalità di livello. La procedura ha termine quando viene raggiunto un vertice che è soluzione ottima di PLF oppure non appena si verifica che il problema non ha massimo ma ha estremo superiore finito. In particolare, dato un vertice $x_0 \in S$ che sia *ols* di PLF si può dimostrare che se è possibile far entrare in base una variabile x_{N_k} , con $N_k \in N$, tale che

$$\frac{\overline{c}_{N_k}}{\overline{d}_{N_k}} = \max_{j \in J_1} \frac{\overline{c}_j}{\overline{d}_j}$$

si ottiene una nuova soluzione ottima di livello corrispondente ad un livello superiore al precedente, aumentando, nel contempo, il valore della funzione oggetto. Se tale operazione di pivot non è possibile, ogni punto della semiretta di equazione

$$x_B = {A_B}^{-1}b - {A_B}^{-1}{A_N}^k x_{N_k} \ , \ x_{N_k} \geq 0 \ ,$$

è soluzione ottima di livello di PLF. Ricordiamo che il criterio di ottimalità per un vertice della regione ammissibile è fornito dalla (3.2), ovvero

$$\gamma = \overline{d}_0 \overline{c}_N - \overline{c}_0 \overline{d}_N \ \leq \ 0$$

La garanzia che l'algoritmo termini, quando il problema ha estremo superiore finito ma non ha massimo, è fornita dal Teorema seguente

Teorema 4.3 Sia x un vertice che è soluzione ottima di livello di PLF; se $\gamma_k > 0$ e ${A_B}^{-1}{A_N}^k \leq 0$ allora la semiretta r di equazione

$$x_B = {A_B}^{-1}b - {A_B}^{-1}{A_N}^k x_{N_k} \ , \ x_{N_k} \geq 0 \ ,$$

è un raggio estremo di PLF e si ha

$$\sup\{z(x); x \in x\} \ = \ \sup\{z(x); x \in r\} \ = \ \frac{\overline{c}_{N_k}}{\overline{d}_{N_k}} \ .$$

Se PLF non è superiormente illimitato, l'algoritmo di Cambini e Martein genera una sequenza finita di vertici di S che sono tutti soluzioni ottime di livello di

PLF. Esso termina individuando un vertice che è soluzione ottima, oppure è origine di un raggio estremo del problema.

Algoritmo di Cambini e Martein

<u>Procedure</u> Cambini-Martein;
$\xi_{min} := \min\{dx + d_0;\ x \in S\}$;
risolvi il problema
$PL(\xi_{min})$:$\max\{(cx + c_0)/\xi_{min}; x \in S, dx + d_0 = \xi_{min}\}$;
<u>if</u> $PL(\xi_{min})$ NON ha soluzione ottima <u>then</u> STOP ;
$\{PLF$ ha estremo superiore $+\infty\}$
<u>else</u> siano
x_0 un vertice ottimo di $PL(\xi_{min})$ e
B una base di ordine $(m + 1)$ corrispondente;
$x_{ottimo} := x_0$;
$\xi := \xi_{min}$;
$MAX := (cx + c_0)/\xi_{min}$;
$i := i + 1$
<u>while</u> $J_1 \neq \emptyset$ <u>and</u> $\gamma \not\leq 0$ <u>do</u>
<u>begin</u>
sia k tale che
$(\overline{c}_{N_k}/\overline{d}_{N_k}) = \max_{j \in J_1}(\overline{c}_j/\overline{d}_j)$;
la variabile x_{N_k} entra in base con una operazione di pivot;
<u>if</u> tale operazione non è possibile <u>then</u> STOP ;
$\{supf(x) = (\overline{c}_{N_k}/\overline{d}_{N_k})\}$
$i := i + 1$;
<u>end</u>
<u>end</u>
$\{x_{ottimo}$ è il punto di ottimo del problema$\}$
$\{MAX$ è il valore ottimo del problema$\}$

4.2 La trasformazione di Charnes-Cooper

La trasformazione di Charnes-Cooper consente di risolvere PLF mediante la risoluzione di un problema di programmazione lineare ad esso associato. Tale trasformazione, proposta da Charnes e Cooper nel 1962 [ChCo], è una biiezione tra la regione ammissibile del problema frazionario, sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$, e un sottoinsieme poliedrico di $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} T: \quad & S \to S' \\ & x \to (y,t) = (x/(dx+d_0), 1/(dx+d_0)) \end{aligned}$$

dove $S' = \{(y,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; Ay - bt \leq 0, dy + d_0 t = 1, y \geq 0, t > 0\}$. Tramite T il problema PLF viene trasformato nel problema

$$\begin{aligned} PL': \quad & \max(cy + c_0 t) \\ & (y,t) \in S' \;. \end{aligned}$$

Se $(y,t) = (x/(dx+d_0), 1/(dx+d_0)$ si ha evidentemente:

$$(cx + c_0)/(dx + d_0) \;=\; cy + c_0 t \quad \forall x \in S.$$

Si noti che PL' non è un problema di programmazione lineare a causa del vincolo di disuguaglianza stretta $t > 0$ presente nella definizione della regione ammissibile S'. Tuttavia, se si considera l'insieme

$$S" = \{(y,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; Ay - bt \leq 0, dy + d_0 t = 1, y \geq 0, t \geq 0\},$$

che differisce da S' solo per l'ultimo vincolo, si ha che, se S è compatto, $S' = S"$; infatti in questo caso esiste $k > 0$ tale che $dx + d_0 \leq k \quad \forall x \in S$, pertanto $t \geq (1/k) > 0 \quad \forall (y,t) \in S"$. Si consideri allora il problema

$$\begin{aligned} PL: \quad & \max(cy + c_0 t) \\ & (y,t) \in S" \;. \end{aligned}$$

PL può essere risolto, per esempio, con l'algoritmo del simplesso e, nel caso S sia compatto, le soluzioni di PLF si possono ottenere da quelle di PL utilizzando T^{-1}, funzione inversa di T. Nel caso S non sia limitato è ancora possibile risolvere PLF tramite PL ma è necessario precisare il legame tra le soluzioni dei due problemi se PLF non ammette massimo. Ciò può creare qualche difficoltà nell'interpretazione della soluzione determinata e diversifica ulteriormente l'approccio risolutivo di Charnes e Cooper da quello di Cambini e Martein.
Eliminando l'ipotesi di regione ammissibile limitata la trasformazione T non è più necessariamente suriettiva su $S"$: gli eventuali punti di $S"$ aventi componente $t = 0$ non sono immagine di punti di S. Posto

$$S"_0 = \{(y,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; Ay - bt \leq 0, dy + d_0 t = 1, y \geq 0, t = 0\},$$
$$S"_+ = \{(y,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; Ay - bt \leq 0, dy + d_0 t = 1, y \geq 0, t > 0\},$$

si ha $T(S) = S"_+$ e quindi $S" = T(S) \cup S"_0$; gli (eventuali) punti di $S"$ per i quali si ha $t = 0$ sono i corrispondenti degli (eventuali) punti impropri di S. Se PLF non ammette massimo ma ammette estremo superiore finito, è interessante, anche in vista delle applicazioni, conoscere l'equazione di un raggio estremo, ovvero di una semiretta lungo la quale viene ottenuto l'estremo superiore del problema.

Il seguente Teorema [ChCo][EM1] sintetizza alcune note proprietà che consentono di risolvere PLF una volta risolto PL.

Teorema 4.4 Dati il problema PLF, avente regione ammissibile S non vuota, e il problema PL, associato a PLF tramite la trasformazione T, si ha:

i. Se PL (PLF) ha soluzione ottima (y^*, t^*) con $t^* \neq 0$ (x^*) allora PLF (PL) ha soluzione ottima $x^* = T^{-1}(y^*, t^*)$ $((y^*, t^*) = T(x^*))$.
ii. PLF ha estremo superiore finito ma non ha massimo (ha quindi raggio estremo) se e solo se PL ha massimo e ogni soluzione ottima (y^*, t^*) di PL ha coordinata $t^* = 0$.
iii. PLF ha estremo superiore non finito se e solo se PL ha estremo superiore non finito.
iv. Gli estremi superiori di PLF e di PL coincidono.

Si può completare l'enunciato del Teorema precedente con la seguente Proposizione [EM1]:

Proposizione 4.1 Posto $r = \{x \in S; x = x_0 + ku, k \geq 0\}$, se

$$\frac{cx_0 + c_0}{dx_0 + d_0} < sup\left\{\frac{cx + c_0}{dx + d_0}; x \in r\right\} = sup\left\{\frac{cx + c_0}{dx + d_0}; x \in S\right\} \in \mathbf{R}$$

allora $du \neq 0$, una soluzione ottima di PL è $(u/(du), 0)$ e

$$sup\left\{\frac{cx + c_0}{dx + d_0}; x \in S\right\} = \lim_{k \to +\infty} \frac{cx_0 + c_0 + kcu}{dx_0 + d_0 + kdu} = \frac{cu}{du}.$$

Inoltre, se $(y^*, 0)$ è soluzione ottima di PL allora esiste un raggio estremo di PLF di direzione $u = y^*$.

4.3 L'algoritmo di Dinkelbach

In questo paragrafo viene presentato un algoritmo per la soluzione del problema PF di programmazione frazionaria concavo-convessa con funzione obiettivo definita su regione ammissibile limitata e poliedrica:

$$PF: \qquad \max \frac{f(x)}{g(x)},$$
$$x \in S = \{x \in \mathbf{R}^n;\ Ax = b, x \geq 0\},$$

dove $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ e si suppone $S \neq \emptyset$.
Anche l'approccio di Dinkelbach [D], come quello di Cambini e Martein, si basa su una tecnica di parametrizzazione la quale però si diversifica da quella esaminata nel precedente paragrafo. C'è da osservare, inoltre, che l'algoritmo di Dinkelbach permette di risolvere un problema di programmazione frazionaria non necessariamente lineare. Tuttavia è importante sottolineare che nel caso lineare tale algoritmo non consente, in generale, di risolvere problemi con regione ammissibile non limitata.
L'algoritmo di Dinkelbach prevede la definizione della funzione

$$F: \qquad \mathbf{R} \to \mathbf{R} \; ; \qquad F(q) = \max_{x\in S}\{f(x) - qg(x)\} \; .$$

Le proprietà principali di F sono evidenziate nel seguente Teorema [D]:

Teorema 4.5

i. $F(q)$ è convessa e monotona strettamente decrescente.
ii. $F(q) = 0$ ha un'unica soluzione $q = q^*$.
iii. Siano $x^* \in S$ e $q^* = f(x^*)/g(x^*)$. Si ha che x^* è punto di ottimo di PF se e solo se

$$F(q^*) = F\left(\frac{f(x^*)}{g(x^*)}\right) = \max_{x\in S}\{f(x) - q^* g(x)\} = \; 0$$

L'algoritmo proposto da Dinkelbach è una procedura iterativa che, iniziando da un opportuno valore di q tale che $F(q) \geq 0$, ad ogni iterazione incrementa q determinando una successione di valori di $F(q)$ che convergono, decrescendo, a zero.
Un valore iniziale q tale che $F(q) \geq 0$ può essere facilmente calcolato determinando un punto qualsiasi della regione ammissibile. Vale infatti la Proposizione seguente:

Proposizione 4.2 Se $\hat{x} \in S$ posto $\hat{q} = f(\hat{x})/g(\hat{x})$ si ha $F(\hat{q}) \geq 0$.

Algoritmo di Dinkelbach

<u>Procedure</u> Dinkelbach
<u>begin</u>

$k := 0$;
determina una soluzione ammissibile $x_0 \in S$;
<u>repeat</u>

$k := k + 1$;

$q_k := f(x_{k-1})/g(x_{k-1})$;

$F(q_k) := \max_{x \in S}\{f(x) - q_k g(x)\} = f(x_k) - q_k g(x_k)$

<u>until</u> $F(q_k) = 0$

$\{x_{ottimo} = x_k\}$

<u>end</u>.

Si dimostra, inoltre, che

$$\lim_{k \to +\infty} F(q_k) = F(q^*) = 0$$

il che prova la convergenza dell'algoritmo sopra schematizzato.

4.4 Confronto tra gli algoritmi: alcune osservazioni

È stato dimostrato da Wagner e Yuan [WaYu] che, nel caso in cui la regione ammissibile sia compatta, vi è equivalenza tra l'algoritmo di Martos e quello di Charnes-Cooper. Tale equivalenza deve essere intesa nel senso che entrambi gli algoritmi generano la stessa sequenza ordinata di vertici della regione ammissibile qualora la soluzione di base iniziale sia la stessa e la regola di scelta dell'elemento cardine per l'algoritmo di Charnes-Cooper sia opportunamente fissata. Utilizzando un'altra, opportuna, regola per la scelta dell'elemento cardine nell'algoritmo di Charnes-Cooper è possibile dimostrare l'equivalenza di tale algoritmo con quello di Cambini e Martein [CM3]. Al contrario, poiché l'algoritmo di Isbell e Marlow può "visitare" lo stesso vertice più volte, mentre quello di Charnes e Cooper genera vertici corrispondenti a valori non decrescenti della funzione oggetto, risulta evidente che i due algoritmi non possono essere equivalenti.

I metodi di Martos-Hartwig e di Cambini-Martein, riconducibili dal punto di vista teorico all'approccio di Charnes-Cooper hanno il pregio di risolvere PLF mantenendo la regione ammissibile originale del problema. Essi consentono pertanto una immediata leggibilità della soluzione ottenuta nonché del "cammino" seguito per ottenerla.

Da un punto di vista computazionale, dalle esperienze condotte da Bitran [Bi] si è potuto rilevare che su regioni ammissibili compatte l'algoritmo di Isbell-Marlow necessita per la risoluzione di PLF di un maggior numero di operazioni di cardine rispetto all'algoritmo di Martos e di riflesso, vista la menzionata equivalenza, rispetto a quello di Charnes-Cooper. Il confronto computazionale è stato poi esteso da Ellero e Moretti [EM1] a regioni ammissibili non necessariamente compatte per gli algoritmi di Charnes-Cooper e di Cambini-Martein, scegliendo come regola di cardine per il primo algoritmo quella usuale dell'algoritmo del simplesso. Dall'esperienza computazionale condotta emerge che il numero medio di vertici esaminati dall'algoritmo di Cambini-Martein risulta generalmente molto inferiore al numero medio di vertici esaminati dall'algoritmo di Charnes-Cooper. Questo è dovuto al fatto che la sequenza di vertici è costruita sfruttando le particolari proprietà delle soluzioni ottime di livello. La superiorità dal punto di vista computazionale dell'algoritmo di Cambini e Martein ha suggerito l'utilizzo della metodologia basata sul concetto di soluzione ottima di livello per altre classi di problemi di programmazione matematica, in particolare per problemi di programmazione lineare frazionaria generalizzata.

5. Metodo delle soluzioni ottime di livello

Negli ultimi anni sono stati proposti algoritmi di tipo simplesso che consentono di risolvere problemi di programmazione matematica mediante l'esame di sottoinsiemi della regione ammissibile costituiti dalle soluzioni ottime di problemi di programmazione parametrica opportunamente definiti (si veda ad esempio [E]).

Si consideri il problema di programmazione matematica

$$\begin{aligned} P: \quad & \max \ \Phi(x) = F(x, g(x)), \\ & x \in S \subseteq \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

dove g è una funzione continua a valori reali definita nell'insieme convesso e non vuoto $S \subseteq \mathbf{R}^n$, F è una funzione continua a valori reali definita in un opportuno sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$.

Diremo problema parametrico associato a P il seguente

$$\begin{aligned} P(\xi): \quad & \max \ \Phi(x) = F(x, \xi), \\ & x \in S = \{x \in S, \quad g(x) = \xi \ \} \subseteq \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Si noti che, analogamente a quanto avviene per il problema PLF precedentemente analizzato, si ha

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}} \sup_{x \in S_\xi} F(x, \xi) \ = \ \sup_{x \in S} \Phi(x) \ .$$

Si intuisce pertanto la possibilità di poter risolvere P una volta note le soluzioni di $P(\xi)$ al variare del parametro ξ.

Per ciascun fissato valore del parametro, il problema $P(\xi)$ ha una funzione oggetto più semplice di Φ. Ciascuna regione ammissibile S_ξ potrebbe risultare anch'essa più semplice da gestire, dipendendo questo, ovviamente, dalla struttura di g.

Definiamo ora per il problema P le soluzioni ottime di livello in modo del tutto analogo a quanto fatto per il problema di programmazione lineare frazionaria.

Definizione 5.1

Il numero reale ξ è detto livello ammissibile per P se esiste $x \in S$ tale che $g(x) = \xi$.

Si indichi con Ξ l'insieme dei livelli ammissibili per il problema P. Date le ipotesi di convessità della regione ammissibile S e di continuità della funzione oggetto Ξ è un intervallo di numeri reali.

Definizione 5.2
$x \in S$ è una soluzione ottima di livello (brevemente: *ols*) di P se esiste $\xi \in \Xi$ tale che x è soluzione ottima del problema $P(\xi)$.

Si può notare che, posto $g(x) = dx + d_0$, $F(x, g(x)) = (cx + c_0)/g(x)$ e considerando come regione ammissibile S un sottoinsieme poliedrico di $\mathbf{R}^n$, si riottiene la definizione di soluzione ottima di livello data in precedenza per il problema di programmazione lineare frazionaria.
Si indichi con L_ξ l'insieme delle soluzioni ottime di livello relative al livello ξ e con L l'insieme $L = \cup_{\xi \in \Xi} L_\xi$ delle soluzioni ottime di livello di P. Nel seguito si supporrà S compatto, di conseguenza si ha $L \neq \emptyset$.
Si noti che qualora $\hat{x} \in S$ sia un punto di massimo globale di Φ in S allora $\hat{x} \in L_\xi \subseteq L$ con $\xi = g(\hat{x})$: ovvero ogni soluzione ottima di P è, evidentemente, *ols*.
Viste le proprietà delle *ols*, un algoritmo per risolvere P dovrebbe consentire di determinare un sottoinsieme di L che sia connesso e che contenga una, possibilmente unica, *ols* per ogni livello ammissibile. Un tale sottoinsieme sarebbe in grado di fornire tutta e sola l'informazione necessaria (una *ols* "rappresentante" per ogni livello). Nelle istanze reali di P accade tuttavia molto spesso di doversi accontentare di determinare sottoinsiemi di L che sono connessi ma che contengono, per qualche fissato livello, più soluzioni ottime di livello. Per poter eliminare l'informazione ridondante, il prezzo da pagare sarebbe la perdita della proprietà di connessione dell'insieme da esaminare, che complicherebbe non poco l'analisi parametrica delle soluzioni di $P(\xi)$.

Esempio 5.1
Nel problema di programmazione frazionaria generalizzata
$$\max\left(x - y + \frac{-2x + 1.5y + z - 1}{y + z + 1}\right)$$
$$x,\ y\ ,z\ \in\ [0,1]$$
si consideri la parametrizzazione $g(x, y, z) = y + z + 1$. L'insieme delle soluzioni ottime di livello del problema è costituito da tre spigoli del cubo unitario che costituisce la regione ammissibile. Più precisamente gli spigoli r_1, che congiunge l'origine con il punto $P = (0, 0, 1)$, r_2, che congiunge P con il punto $Q = (1, 0, 1)$, ed r_3 che congiunge Q con $R = (1, 1, 1)$: lo spigolo r_2 è costituito dalle (infinite) soluzioni ottime di livello relative al livello $\xi = 2$.

Proposizione 5.1 Se $\forall\ \xi \in \Xi$ l'insieme S_ξ è un insieme poliedrico e la restrizione $\Phi|S_\xi$ è pseudoconvessa allora esiste almeno un punto di massimo globale di P appartenente ad uno spigolo di S.

Dim Sia x^* soluzione ottima di P e sia $\xi = g(x^*)$. Poichè $\Phi|S_\xi$ è pseudoconvessa esiste almeno un vertice di $\hat{x} \in S_\xi$ che è punto di massimo globale di $\Phi|S_\xi$. Pertanto $\Phi(x^*) = \Phi(\hat{x})$ e $\hat{x} \in S_\xi$ appartiene ad uno spigolo di S. $\diamondsuit$

Definiamo funzione valore ottimo associata alla famiglia di problemi $P(\xi)$, la seguente funzione:

$$v \ : \ \Xi \to \mathbf{R} \ \ ; \ v(\xi) = \max_{x \in S_\xi} \Phi(x) \ .$$

Si può dimostrare che vale il seguente Teorema [E]:

Teorema 5.3
Se ξ è un punto di massimo locale di v allora ogni $x \in L_\xi$ è punto di massimo locale di P.

Si può pertanto anche affermare che un livello ξ è punto di massimo globale di v se e solo se $x \in L_\xi$ è punto di massimo globale di P. Invece, l'implicazione inversa di quanto affermato nel Teorema non vale. Infatti, la funzione valore ottimo relativa al problema trattato nell'esempio 5.1 ha un solo punto di ottimo locale (che è anche globale) in corrispondenza del livello $\xi = \sqrt{5} - 2$ mentre il problema originario possiede un ottimo locale in $P = (0, 0, 1)$ ma il corrispondente livello $\xi = 2$ non è punto di ottimo locale per v.
Si osservi che parametrizzazioni diverse danno evidentemente luogo anche a funzioni valore ottimo differenti.

Esempio 5.2
Dato il problema

$$\max(-2x^2 + y^2)$$
$$x + y \leq 1 \ , \ x, y \geq 0$$

posto $g(x, y) = y$ si ha

$$\max \ F(x, y, g(x, y)) = -2x^2 + (g(x, y))^2$$
$$x + y \leq 1 \ , \ x, y \geq 0 \ , y \ = \ \xi$$

con funzione valore ottimo $v(\xi) = \xi^2$ convessa. Ponendo $g(x, y) = x$ si ha invece

$$\max \ F(x, y, g(x, y)) = -2(g(x, y))^2 + y^2$$
$$x + y \leq 1 \ , \ x, y \geq 0 \ , x \ = \ \xi$$

con funzione valore ottimo $v(\xi) = -\xi^2 - 2\xi + 1$ concava.

5.1 Un algoritmo di tipo simplesso per il problema P

Le proprietà ricordate in questo capitolo consentono la stesura di un algoritmo per la risoluzione del problema P in ipotesi abbastanza generali. In particolare supporremo che:

i. la regione ammissibile S sia poliedrica e limitata;
ii. $g(x)$ sia una funzione affine oppure lineare fratta;
iii. le restrizioni $\Phi|S_\xi$ siano pseudomonotone $\forall \xi \in \Xi$.

In particolare, si osservi che la pseudoconvessità di $\Phi|S_\xi$ consente di sfruttare la Proposizione 5.1, la pseudoconcavità di $\Phi|S_\xi$ garantisce la convessità dell'insieme delle *ols* relative al livello ξ.

<u>Procedure</u> OLS;
<u>begin</u>

$\xi_{min} := \min\{g(x);\ x \in S\}$;
risolvi il problema
$P(\xi_{min}) :\ \max\{F(x, \xi_{min});\ x \in S,\ g(x) = \xi_{min}\}$;
siano
x_0 un vertice ottimo di $P(\xi_{min})$,
B una base di ordine $(m+1)$ di $x_0 \in S_{\xi_{min}}$;
$x_{ottimo} := x_0$;
$\xi := \xi_{min}$;
$MAX := F(x_0, \xi_{min})$;
fine–esplorazione := false;

<u>repeat</u>

siano
$x(\xi, \theta)$ un vertice di $S_{\xi+\theta} = \{x \in S;\ g(x) = \xi + \theta\}$;
B una base corrispondente ad $x(\xi, \theta)$;
si calcolino:
$\theta_A := \max\{\theta \in \mathbf{R}; x(\xi, \theta) \in S, \theta \geq 0\}$;
$\theta_{OLS} := \max\{\theta \in \mathbf{R}; x(\xi, \theta)$ vertice ottimo di $\mathrm{P}(\xi + \theta)\}$;
$\hat{\theta} := \min\{\theta_A, \theta_{OLS}\}$;
<u>if</u> $\hat{\theta} > 0$ <u>then</u>
sia $\xi + \theta^*$ un punto di massimo globale di v in $[\xi, \xi + \hat{\theta}]$;
<u>if</u> $v(\xi + \theta^*) > MAX$ <u>then</u>
$x_{ottimo} := x(\xi + \theta^*)$;
$MAX := v(\xi + \theta^*)$;

$\xi := \xi + \hat{\theta}$;

<u>else</u> $\{\hat{\theta} = 0\}$

si determini una base B' di $x(\xi)$ non ancora esplorata ;

<u>if</u> tale base esiste <u>then</u> $B := B'$

<u>else</u> fine–esplorazione:=true

<u>until</u> fine–esplorazione

<u>end</u>.

{ x_{ottimo} è punto di ottimo del problema }

{ MAX è il valore ottimo del problema }

Nella tabella seguente, a titolo esemplificativo, sono riportate le funzioni oggetto di alcuni problemi di programmazione matematica per i quali sono noti in letteratura metodi risolutivi che sfruttano le proprietà delle soluzioni ottime di livello. In grassetto sono evidenziate le componenti della funzione oggetto che sono state parametrizzate. Per ciascun problema la regione ammissibile è un poliedro convesso di $\mathbf{R}^n$. I simboli c, d, h, x indicano vettori di $\mathbf{R}^n$ mentre c_0, d_0, h_0 sono numeri reali. Per una rassegna più completa si rinvia a [E].

$F(x, \mathbf{g(x)})$	$F(x, \xi)$
$(cx + c_0)/(\mathbf{dx} + \mathbf{d_0})$	$(cx + c_0)/\xi$
$(cx + c_0) \cdot (\mathbf{dx} + \mathbf{d_0})^\alpha$	$(cx + c_0) \cdot \xi^\alpha$
$hx + (cx + c_0)/(\mathbf{dx} + \mathbf{d_0})$	$hx + (cx + c_0)/\xi$
$(cx + c_0)^{\mathbf{dx}+\mathbf{d_0}}$	$(cx + c_0)^\xi$
$(\mathbf{hx} + \mathbf{h_0}) \cdot (cx + c_0)/(dx + d_0)$	$\xi \cdot (cx + c_0)/(dx + d_0)$
$(hx + h_0) \cdot (\mathbf{cx} + \mathbf{c_0})/(\mathbf{dx} + \mathbf{d_0})$	$(hx + h_0) \cdot \xi$

6. Dalla Programmazione Frazionaria al Problema Bicriteria

La programmazione frazionaria si presta in modo particolare a determinare indici di efficienza in vari problemi di natura economico-finanziaria, quali ad esempio il minimo valore assunto dal rapporto tra materiale sprecato e materiale prodotto in problemi di taglio, il massimo valore assunto da rapporti del tipo (profitto)/(capitale investito), (profitto)/(costo), (profitto)/ (tempo).
Tali tipi di problemi permettono di ottenere, in un certo senso, una soluzione di "compromesso" tra due obiettivi in contrasto tra loro. Ad esempio, nel problema della selezione del portafoglio, il portafoglio ottimo secondo il criterio di Roy si ottiene come soluzione ottima di un problema frazionario avente come numeratore il rendimento medio e come denominatore la misura del rischio dell'investimento. Poiché a rendimenti medi più alti corrispondono rischi più alti, il portafoglio così individuato non ha la caratteristica di corrispondere sia al minimo rischio che al massimo rendimento.
Faremo vedere che una soluzione ottima di un problema di programmazione frazionaria PF è una soluzione ottima paretiana di un problema bicriteria P* avente come funzioni obiettivo il numeratore ed il denominatore dell'obiettivo frazionario.

6.1 Formulazione di un Problema Bicriteria

Siano f e g due funzioni definite su un sottoinsieme aperto X di $\mathbf{R}^n$ e sia S un sottoinsieme di X. Il problema :

$$P^*: \max\,(f(x)\,,\,g(x)\,)\,,\; x \in S$$

è detto un problema di ottimo secondo Pareto (ovvero problema bicriteria in quanto coinvolge due funzioni obiettivo) quando si ricercano soluzioni x_0 verificanti la seguente condizione :

$$\nexists\; x \in S :\; f(x) \geq f(x_0)\;,\quad g(x) \geq g(x_0) \tag{6.1}$$

con almeno una delle disuguaglianze verificata in senso stretto.

Definizione 6.1
Un punto ammissibile x_0 che verifica (6.1) è detto soluzione ottima secondo Pareto (ovvero soluzione non dominata, o, anche, soluzione efficiente).

Si osservi che la (6.1) è equivalente ad affermare che se per un certo x- S risulta f $(x)>f(x_0)$ $(g(x)>g(x_0))$, allora necessariamente deve risultare $g(x)<g(x_0)$ $(f(x)<f(x_0))$. Si ritrova così il seguente significato di soluzione ottima paretiana: x_0 è un ottimo paretiano se in corrispondenza di esso non è possibile migliorare una funzione obiettivo senza che, contemporaneamente, si peggiori l'altra.

Ricordando che $\min g(x) = -\max(-g(x))$, si ha che problemi del tipo $(\max f(x), \min g(x))$, $x \in S$ oppure $\min(f(x), g(x))$, $x \in S$ etc., possono essere ricondotti alla formulazione precedente, alla quale ci riferiremo in questa trattazione.

L'efficienza di un punto $x_0 \in S$ può essere equivalentemente espressa nello spazio degli obiettivi, nel seguente modo:

$$\nexists\ x \in S : F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}\ ;$$

ovvero $\nexists\ x \in S : F(x) \in F(x_0) + \mathbf{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$,

ovvero $F(x) \notin F(x_0) + \mathbf{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}\ \ \forall\ x \in S$,

ovvero, posto $F(S) = \{F(x)=(f(x),g(x)) : x \in S\}$,

$$F(S) \cap (F(x_0) + \mathbf{R}^2_+) = \{F(x_0)\} \qquad (6.2)$$

Si ha così che un punto ammissibile $x_0 \in S$ è efficiente se e solo se l'intersezione tra il codominio della F ed il "cono paretiano" di vertice $F(x_0)$ è costituito dal solo punto $F(x_0)$. Si può inoltre osservare che nello spazio degli obiettivi un punto efficiente è sempre di frontiera. Per tale motivo si denomina frontiera efficiente l'immagine dell'insieme E degli ottimi paretiani, cioè l'insieme $F(E) = \{F(x): x \in S\}$.

Tramite la (6.2), lo studio dell'efficienza è ricondotto allo studio della separazione tra due insiemi dei quali uno è il traslato del cono paretiano. Questa visione del problema è particolarmente utile per affrontare varie problematiche quali, ad esempio, l'esistenza di punti efficienti, la caratterizzazione dell'insieme dei punti efficienti, la determinazione di condizioni di ottimalità.

6.2 Sulla generazione dell'insieme dei punti efficienti

Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni ottime paretiane, si ha una perfetta analogia con il caso scalare: se le funzioni obiettivo sono continue ed S è compatto allora si ha esistenza di soluzioni.

A differenza però del caso scalare, ove si ha interesse a determinare una qualunque soluzione ottima del problema, in quanto con essa si realizza il proprio obiettivo (l'esistenza di soluzioni ottime alternative è irrilevante sotto questo aspetto), nel caso vettoriale è di estrema importanza conoscere tutte le possibili soluzioni in quanto ad esse corrispondono "scelte" diverse rispetto ai valori assunti dagli obiettivi (anche in questo caso non interessano soluzioni ottime alternative intese come punti nei quali tutti gli obiettivi assumono lo stesso valore).
Allo scopo di caratterizzare, per ampie classi di problemi bicriteria, l'insieme E di tutte le soluzioni ottime paretiane, premettiamo alcuni Teoremi.

Teorema 6.1 Sia x_0 un punto efficiente per il problema bicriteria P*. Allora x_0 è soluzione ottima del problema scalare max $f(x)$, $x \in \{x \in S : g(x) \geq g(x_0)\}$.
Dim.
Se x_0 non è soluzione ottima, esiste $x^* \in S$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$, $g(x^*) \geq g(x_0)$ e ciò implica la non efficienza del punto x_0, contro l'ipotesi. ♦

Il seguente esempio mostra che il Teorema precedente non è invertibile.

Esempio 6.1
Si consideri il problema bicriteria max $(f(x_1, x_2) = -(x_2 - x_1)^2, g(x_1, x_2) = x_2)$, con $(x_1, x_2) \in S = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq x_1, x_1 \leq 4, x_2 \geq 0\}$.
Il problema scalare max $-(x_2 - x_1)^2$, $(x_1, x_2) \in S$, ha una soluzione ottima in (0,0), soluzione che non è un ottimo paretiano in quanto dominata dal punto (4,4).

Teorema 6.2
Se ogni soluzione ottima del problema

$$P_\alpha : \max f(x), \; x \in S_\alpha = \{x \in S : g(x) \geq \alpha\}$$

è aderente al vincolo $g(x) \geq \alpha$, allora ciascuna di esse è una soluzione ottima paretiana per il problema P*.
Dim.
Sia x_0 una soluzione ottima di P_α e supponiamo per assurdo che non sia un ottimo paretiano; esiste allora $x^* \in S$ tale che
i) $f(x^*) > f(x_0)$, $g(x^*) \geq g(x_0) = \alpha$ oppure
ii) $f(x^*) \geq f(x_0)$, $g(x^*) > g(x_0) = \alpha$.
Il caso i) è incompatibile con il fatto che x_0 sia soluzione ottima di P_α poiché $g(x^*) \geq \alpha$ implica $x^* \in S_\alpha$ e, conseguentemente, $f(x^*) \leq f(x_0)$.

Nel caso ii), $g(x^*)>\alpha$ implica $x^*\in S_\alpha$ e quindi $f(x^*)\leq f(x_0)$, da cui $f(x^*)=f(x_0)$. Il punto x^* risulta allora una soluzione ottima di P_α non aderente al vincolo $g(x)\geq\alpha$, contro l'ipotesi. ♦

Teorema 6.3 Si consideri il problema bicriteria P* con g continua ed f avente la proprietà di non avere massimi locali distinti da quelli globali e si consideri una soluzione ottima x_0 del problema P_α.
Se x_0 non è aderente al vincolo $g(x)\geq\alpha$, allora x_0 è punto di massimo globale per f.
Dim.
Sia $g(x_0) > \alpha$. Per la continuità di g esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $g(x)>\alpha$ per ogni $x \in I(x_0) \cap S$. Ne consegue che $I(x_0) \cap S \subset S_\alpha$ per cui $f(x)\leq f(x_0)$ per ogni $x \in I(x_0) \cap S$. Il punto x_0 risulta quindi di massimo locale per f e, per le ipotesi del Teorema, di massimo globale. ♦

Siamo ora in grado di caratterizzare l'insieme dei punti efficienti E del problema P* tramite le soluzioni ottime R_α del problema scalare parametrico P_α.
Si denoti con $\alpha_{max} = \max g(x)$, $x\in S$; $M = \max f(x)$, $x\in S$; e con $\alpha_{min}= \max g(x)$, $x\in\{x\in S : f(x) = M\}$.
Vale il seguente

Teorema 6.4 Si consideri il problema bicriteria P* dove S è un insieme compatto, f e g sono funzioni continue ed f non ha punti di massimo locale distinti da quelli di massimo globale. Si ha allora

$$E = \bigcup_{\alpha\in[\alpha_{min},\alpha_{max}]} R_\alpha \tag{6.3}$$

Dim.
A norma del Teorema 6.1, $E\subseteq \bigcup_{\alpha\in[\alpha_{min},\alpha_{max}]} R_\alpha$. Per il Teorema 6.3, le soluzioni ottime di P_α aderiscono al vincolo e ciò comporta, per il Teorema 6.2 che $E\supseteq \bigcup_{\alpha\in[\alpha_{min},\alpha_{max}]} R_\alpha$. Segue l'asserto. ♦

Osservazione 6.1
Poiché le funzioni semistrettamente quasiconcave, concave, pseudoconcave (in particolare le funzioni lineari e le lineari fratte) hanno la proprietà di non avere massimi locali distinti dai globali, si ha che per la classe dei problemi bicriteria

aventi funzioni obiettivo concave e/o pseudoconcave e/o semistrettamente quasiconcave, vale la caratterizzazione (6.3).
In particolare, per un problema lineare bicriteria, la (6.3) esprime il fatto che E coincide con l'unione delle soluzioni ottime generate da un problema lineare parametrico e ciò implica che E è connesso per spigoli, nel senso che dati due punti efficienti è possibile trovare un cammino che li congiunge, costituito da spigoli e vertici (una tale importante proprietà vale per un qualsiasi problema lineare multiobiettivo).

Osservazione 6.2 (Generazione di E con il metodo delle somme pesate)
Considerando tutte le possibili somme pesate p_1f+p_2g, $p_1, p_2 > 0$, si generano, in generale, infinite soluzioni ottime paretiane.
Si può dimostrare che nel caso di un problema bicriteria (o multiobiettivo) lineare si ottengono tutte le soluzioni paretiane; nel caso di funzioni obiettivo concave occorre considerare anche i casi in cui i pesi sono nulli, scartando però alcune soluzioni ottime.
La tecnica dimostrativa impiegata è basata in modo essenziale su teoremi di separazione tra insiemi convessi. Il vantaggio di un tale approccio è quello di ottenere risultati validi per un qualsiasi numero di obiettivi; nel caso di due obiettivi, però, ha lo svantaggio, rispetto all'approccio proposto nei Teoremi 6.1-6.4, di individuare classi più ristrette di funzioni.

6.3 Un algoritmo per il Problema Lineare Bicriteria

Come applicazione della caratterizzazione dell'insieme dei punti efficienti data nel precedente paragrafo, illustriamo un algoritmo relativo al problema bicriteria lineare, ovvero ad un problema avente due funzioni obiettivo lineari soggette a disuguaglianze lineari. Ci riferiremo a tale problema nella seguente formulazione:

$$\max\ (c^T x, d^T x)\ ,\ x \in S = \{x : Ax \leq b\ , x \geq 0\}.$$

A norma del Teorema 6.4, E è l'unione delle soluzioni ottime del problema lineare parametrico

$$L_\alpha :\ \max\ (c^T x, d^T x)\ ,\ x \in S_\alpha = \{x \in R : d^T x \geq \alpha\}$$

con α parametro variabile nell'intervallo indicato nella (6.3).
Poiché le soluzioni ottime di L_α sono, per il Teorema 6.3, aderenti al vincolo $d^Tx \geq \alpha$, esse divengono soluzioni ottime di livello e pertanto possiamo applicare

al problema bicriteria il metodo sequenziale proposto per il problema lineare frazionario con alcune modifiche, tra le quali una nuova condizione di arresto. Tale metodo, relativamente al caso in cui S è compatto, può essere descritto sommariamente nel seguente modo:

- si determina inizialmente il vertice $x^{(1)}$ soluzione ottima del problema $L_{\alpha_{max}}$ con $\alpha_{max} = \max \{d^T x : x \in S\}$;
- in corrispondenza della soluzione ottima $x^{(k)}$ siano $\bar{c}_N$ e $\bar{d}_N$ i costi ridotti dei due obiettivi. Si calcola

$$\min_{\bar{d}_j<0} \frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j} = \frac{\bar{c}_s}{\bar{d}_s} \qquad (6.4)$$

  se $\bar{c}_s \leq 0$ l'algoritmo termina , altrimenti la variabile corrispondente all'indice s entra in base applicando l'algoritmo del simplesso; si determina così un nuovo vertice $x^{(k+1)}$ e si itera il procedimento.

L'insieme dei punti efficienti è dato dall'unione di tutti gli spigoli che congiungono due vertici adiacenti generati dall'algoritmo (con esclusione delle soluzioni ottime alternative di ogni vertice $x^{(k)}$).

Per illustrare il procedimento, risolviamo il problema :

$$\max (- x_1 + x_2 , 2x_1 - x_2), x \in S = \{(x_1 , x_2): - x_1 + x_2 \leq 2 , 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4\}$$

Si risolve dapprima il problema max $(2x_1 - x_2)$, $x \in S$; si trova un'unica soluzione ottima in (4,0) per cui il vertice V_1 = (4,0) è la prima soluzione ottima paretiana generata.

La tabella del simplesso associata al vertice (4,0) è data da

z_1	4	0	1	0	0	1
z_2	-8	0	-1	0	0	-2
x_3	6	0	1	1	0	1
x_4	4	0	1	0	1	0
x_1	4	1	0	0	0	1

L'applicazione della (6.4) individua nella x_2 la variabile che deve entrare in base (si osservi che il coefficiente -1 del denominatore implica la decrescenza della funzione z_2 mentre il coefficiente 1 del numeratore indica la crescenza di z_1); si ottiene la seguente tabella del simplesso:

z_1	0	0	0	0	-1	1
z_2	-4	0	0	0	1	-2
x_3	2	0	0	1	-1	1
x_2	4	0	1	0	1	0
x_1	4	1	0	0	0	1

alla quale è associato il vertice $V_2=(4,4)$ che è anche il secondo ottimo paretiano generato; ogni punto dello spigolo di vertici V_1 e V_2 è un ottimo paretiano.
Poiché si ha un solo coefficiente negativo nei costi ridotti del denominatore con un corrispondente valore positivo del denominatore, la variabile x_5 entra in base ed esce la variabile x_3; si ottiene la seguente tabella del simplesso:

z_1	-2	0	0	-1	0	0
z_2	0	0	0	2	-1	0
x_5	2	0	0	1	-1	1
x_2	4	0	1	0	1	0
x_1	2	1	0	1	1	0

Il vertice V_3 è la terza soluzione ottima paretiana generata; ogni punto dello spigolo di vertici V_2 e V_3 è un ottimo paretiano.
Poiché in corrispondenza dell'unico coefficiente negativo del denominatore si ha un costo nullo del numeratore, l'algoritmo termina: l'insieme dei punti efficienti è dato dall'unione dei due spigoli precedentemente indicati.

6.4 Dal Problema Bicriteria al Problema Frazionario

Dimostriamo adesso quanto affermato all'inizio del capitolo, ovvero che ogni soluzione ottima x_0 del problema frazionario P_F : $\max \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in S$, con f e g positive su S, è anche una soluzione ottima paretiana per il problema

$$P^* : \max\ (f(x); - g(x)) \ , x \in S.$$

Se, per assurdo, così non fosse, esisterebbe $x^* \in S$ tale che:

i) $f(x^*) > f(x_0)$, $- g(x^*) \geq - g(x_0)$

oppure

ii) $f(x^*) \geq f(x_0)$, $- g(x^*) > - g(x_0)$.

Dalla i), tenuto conto della positività di f e g , si ha

$$\frac{1}{g(x^*)} \geq \frac{1}{g(x_0)} \quad \text{da cui} \quad \frac{f(x^*)}{g(x^*)} \geq \frac{f(x^*)}{g(x_0)} > \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

e ciò contraddice l'ottimalità di x_0.

In modo analogo dalla ii) si ha

$$\frac{1}{g(x^*)} > \frac{1}{g(x_0)} \quad \text{da cui} \quad \frac{f(x^*)}{g(x^*)} > \frac{f(x^*)}{g(x_0)} \geq \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

e ciò contraddice nuovamente l'ottimalità di x_0 .

Bibliografia

[A] Avriel M., Diewert W., Schaible S., Zang I., *Generalized concavity*, Plenum Press, 1988.

[Be1] Bector C.R., Non-linear indefinite functional programming with non-linear constraints, *Cahiers du C.E.R.O.*, 9, n.4, 1967.

[Be2] Bector C.R., Some aspects of non-linear indefinite-fractional functional programming, *Cahiers du C.E.R.O.*, 12, 1970, pp.22-34

[Bh] Bhatt S.K., Linearization technique for linear fractional and pseudo-monotonic programs revisited, *Cahiers du C.E.R.O.*, 23, 1981, pp. 53-56.

[Bi] Bitran G.R., Experiments with linear fractional problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 1979, 689-693.

[BiNo] Bitran G.R., Novaes A.G., Linear programming with a fractional objective function, *Operations Research*, 24, 1976, pp.675-699.

[Ca1] Cambini A., Un algoritmo per il massimo del quoziente di due forme affini con vincoli lineari, *Report* n. A-42, Dipartimento di Ricerca Operativa, Università di Pisa, Italy, 1977.

[Ca2] Cambini A., An algorithm for a special class of generalized convex programs, in Schaible S., Ziemba W.T.(eds.) *Generalized concavity in optimization and economics*, Academic Press, 1981.

[Ca3] Cambini A., Concavità generalizzata e programmazione frazionaria: stato dell'arte, *Atti dell'XI Convegno A.M.A.S.E.S.*, Aosta, Italy, 1987.

[CM1] Cambini A., Martein L., A modified version of Martos's algorithm, *Methods of Operation Research*, 53, 1986, pp.33-44.

[CM2] Cambini A., Martein L., Linear fractional and bicriteria linear fractional programs, in Cambini A., Castagnoli E., Martein L., Mazzoleni P., Schaible S. (eds.), *Generalized convexity and fractional programming with economic applications*, Proceedings Pisa, Italy, 1988, Springer Verlag, 1990, pp. 155-166.

[CM3] Cambini A., Martein L., Equivalence in linear fractional programming, *Optimization*, 23, 1992, pp.41-51.

[CMP] Cambini A., Martein L., Pellegrini L., Decomposition methods and algorithms for a class of non-linear programming problems, *First Meeting AFCET-SMF*, Palaiseau, Ecole Polytechnique Palaiseau, Paris, vol.2, 1978, pp.179-189.

[CMSc] Cambini A., Martein L., Schaible S., On maximizing a sum of ratios, *Journal of Informations & Optimization Sciences*, 10, n.1, 1989, pp.65-79.

[CMSo]Cambini A., Martein L., Sodini C., An algorithm for two particular nonlinear fractional programs, *Methods of Operations Research*, 45, 1983, pp. 61-70.

[CaR] Cambini R., A class of non-linear programs: theoretical and algorithmical results, in Komlosi S., Rapcsac T.,Schaible S. (eds.), *Generalized Convexity*, Proceedings, Pecs, Hungary, 1992, Springer Verlag, 1994, pp.294-310.

[ChCo] Charnes A., Cooper W.W., Programming with linear fractional functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 1962, pp.181-186.

[ClCa] Climaco J.C.N., Cardoso D.M., Linear fractional programming a new bicriteria approach, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, Vol.29, n.3, pp.3-24.

[D] Dinkelbach W., Nonlinear fractional programming, *Management Science*, 13, 1967, pp.492-498.

[E] Ellero A., The optimal level solutions method, *Journal of Information & Optimization Sciences*, 17, n.2, 1996, pp.355-372.

[EM1] Ellero A., Moretti E., A computational comparison between algorithms for linear fractional programming, *Journal of Information & Optimization Sciences*, 13, n.3, 1992, pp.343-362.

[EM2] Ellero A., Moretti E., A parametric simplex-like algorithm for a quadratic fractional programming problem, in Mazzoleni P. (ed.), *Optimization of generalized convex problems*, Proceedings, Milan, 1994, pp. 163-176.

[EM3] Ellero A., Moretti E., A parametric simplex-like algorithm for a fractional programming problem, *Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali*, Anno 16, Fasc. 2, 1993, pp. 77-88.

[EM4] Ellero A., Moretti E., Analisi di sensitività in un problema di programmazione frazionaria generalizzata, *Rendiconti del Comitato per gli studi economici*, Venezia, 1993, pp. 187-208.

[Ha] Hartwig H., Ein simplexartigen Lösungsalgorithmus für pseudolinear Optimierungsprobleme, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 10, 1975, pp.213-236.

[Hi] Hirche J., Zur Lösung von Optimierungsprobleme mit monoton-linear zusammengesetzten Zielfunctionen, *Beiträge zur Numerischen Mathematik*, 9, 1981, pp.87-94.

[IM] Isbell J.R., MarlowW.R., Attrition games, *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 1956, pp.181-186.

[KYM] Konno H., Yajima Y., Matsui T., Parametric simplex algorithms for solving a special class of nonconvex minimization problems, *Journal of Global Optimization*, 1, 1991, pp.65-81.

[M] Mangasarian, Experiments with linear fractional problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 1979, 689-693.

[Ma] Marchi A.E., On the relationship between bicriteria problems and non-linear programming, in Komlosi S., Rapcsac T.,Schaible S. (eds.), *Generalized Convexity*, Proceedings, Pecs, Hungary, 1992, Springer Verlag, 1994, pp.392-400.

[MaSo] Marchi A.E., Sodini C., An algorithm for a non-differentiable non-linear fractional programming problem, *Atti del XVII Convegno A.M.A.S.E.S.*, Ischia, 8-11 settembre 1993, pp.597-608.

[Mt] Martein L., Massimo della somma tra una funzione lineare ed una funzione lineare fratta, *Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali*, 1, 1985, pp.13-20.

[MP1] Martein L., Pellegrini L., Un algoritmo per la determinazione del massimo di una particolare funzione fratta soggetta a vincoli lineari, *Atti Giornate A.I.R.O.*, 1977.

[MP2] Martein L., Pellegrini L., Su una classe di problemi non lineari e non convessi, *Report* n. A-48, Dipartimento di Ricerca Operativa, Università di Pisa, Italy, 1977.

[MP3] Martein L., Pellegrini L., Su un'estensione di una particolare classe di problemi di programmazione lineare frazionaria, *Atti del I Convegno A.M.A.S.E.S.*, 1977, pp.213-228.

[MS] Martein L., Schaible S., On solving a linear program with one quadratic constraint, *Report n.8*, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata ai Problemi Economici, Università di Pisa, Italy, 1987.

[Martos]Martos B., *Nonlinear programming theory and methods*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[NZ] Nykowski I., Zolkiewski Z., On some connections between bicriteria and fractional programming problems, in *Essays and surveys on multiple criteria decision making*, Springer Verlag, 1983.

[OP] Ottaviani M., Pacelli G., Fractional Programming and Characterization of Some Vertices of the Feasible Region, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 79, n.2, 1993, pp. 333-344.

[P] Patkar V., Stancu-Minasian I.M., Approaches for solving a class of non differentiable non linear Fractional Programming Problems, *Nat. Acad. Sci. Letters*, Vol.4, n.12, 1981, pp. 477-479.

[S1] Schaible S., Maximization of quasiconcave quotients and products of finitely many functionals, *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle*,16, pp.45-53, 1974.

[S2] Schaible S., *Analyse und Anwendungen von Quotienten-programme*, Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 1978.

[ScSo] Schaible S., Sodini C., A finite algorithm for generalized linear multiplicative programming, *Report* n.71, Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa, Italy, 1993.

[Se] Seelbach H., Renatabilitäts maximierung bei variablem Eigenkapital, *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 38, 1968, 237-256.

[So1] Sodini C., Minimizing the sum of a linear function and the square root of a convex quadratic form, *Methods of Operations Research*, 53, 1985, pp.171-182.

[So2] Sodini C., Equivalence and parametric analysis in linear fractional programming, in Cambini A., Castagnoli E., Martein L., Mazzoleni P., Schaible S. (eds.), *Generalized convexity and fractional programming with economic applications*, Proceedings Pisa, Italy, 1988, Springer Verlag, 1990.

[WaYu]Wagner H.M., Yuan J.S.C., Algorithmic equivalence in linear fractional programming, *Management Science*, 14, 1978.

[Wo] Wolf H., A parametric method for solving linear fractional programming problem, *Operations Research*, 33, n.4, 1985, pp.835-841.