

Report n. 173

**Innovazione Finanziaria e Domanda di Moneta
In un Modello Dinamico IS-LM
con Accumulazione**

Luciano Fanti

Pisa, Maggio 2000

Luciano Fanti

INNOVAZIONE FINANZIARIA E DOMANDA DI MONETA IN UN MODELLO DINAMICO IS-LM CON ACCUMULAZIONE.

Abstract

This paper develops an IS-LM dynamic model with capital accumulation and investigates the effects of two different regimes of demand for money, the one mainly depending on the speculative motive, the other mainly depending on the transaction motive, as sequentially emerged in the recent history of the Italian economy according to some empirical papers (i.e. the econometric model of Bank of Italy). The main results are: 1) the monetary policy in terms of a fixed supply of money obviously influences the income and the capital levels, but it is ineffective about the stability; 2) when the rate elasticity of the money demand is relatively high it can be triggered an unstable limit cycle, which can represent a "corridor stability" in the Leijonhufvud's sense; 3) the financial innovation which can explain the emergence of the 'transaction' regime may favour the economic stability, provided that the goods market adjusts in a sufficiently fast way.

Introduzione.

Il presente rinnovato interesse per i problemi del ciclo economico si è concentrato su due principali filoni teorici che si distinguono anche sul piano analitico-metodologico: la teoria del 'Real Business Cycle' e la macroeconomia dinamica nonlineare. La prima ottiene la presenza di fluttuazioni persistenti all'interno di una cornice teorica tipica della nuova macroeconomia classica, grazie all'introduzione di una qualche forzante stocastica su sistemi dinamici lineari ad oscillazioni 'dampened': di fatto, quindi, il ciclo ha una origine esogena, ovvero il modello non fornisce una spiegazione economica dei fenomeni dinamici, ma soltanto incorpora meccanismi di propagazione di influenze esogene, quindi non spiegati, sulle variabili economiche del modello stesso. La seconda invece modella la macroeconomia come un sistema dinamico non lineare, ottenendo una spiegazione economica endogena alle oscillazioni persistenti delle variabili economiche. In questo secondo filone ha un posto preminente la macroeconomia keynesiana, soprattutto nella misura in cui certe nonlinearità possono essere postulate come il risultato degli effetti delle interdipendenze e degli 'accoppiamenti' che risultano dalla procedura di aggregazione dei comportamenti individuali - che possono essere tranquillamente lineari - per formare le tipiche variabili 'aggregate' keynesiane. Il problema che sorge in questo caso è però quello usuale (presente anche con la macroeconomia keynesiana lineare): le assunzioni, in questo contesto relative alle nonlinearità, sembrano ad-hoc e non sono giustificabili su basi microeconomiche.

I più diffusi e semplici modelli della macroeconomia dinamica keynesiana sono del tipo IS-LM dinamico con accumulazione di capitale, la cui struttura di base (prescindendo dal settore pubblico) è la seguente (Boldrin, 1984; Lorenz, 1993,1994):

$$\dot{K} = I(Y, r, K) - dk$$

$$\dot{Y} = \sigma(I(Y, r, K) - S(Y, r, K)) \quad (A)$$

$$\dot{r} = \beta(I(Y, r, K) - S(Y, r, K) + \gamma(L(Y, r) - \bar{M}))$$

dove come usuale K è lo stock di capitale reale, Y è il reddito, r è il tasso di interesse, I è la funzione di investimento, S è la funzione di risparmio, L è la funzione di domanda di moneta, e β (velocità di aggiustamento dello squilibrio sul mercato dei beni), γ (velocità di aggiustamento dello squilibrio nel tasso di interesse), d (tasso di ammortamento) e M (l'offerta di moneta) sono costanti. Il sistema (A) è un modello IS-LM dinamico con accumulazione, che tenendo conto dell'effetto dell'investimento dal lato della capacità produttiva e non solo della domanda effettiva, può essere visto come un vero e proprio modello di 'business-cycle'. La dinamica dell'accumulazione netta è data dall'investimento lordo pianificato dalle imprese meno l'ammortamento fisico. La dinamica del reddito è guidata dagli eccessi di domanda nel mercato dei beni, mentre la dinamica del tasso d'interesse è guidata dagli eccessi di domanda nel mercato dei titoli, che ovviamente dipendono dagli eccessi di domanda verificatisi sia nel mercato dei beni che in quello della moneta. Il comportamento dinamico del sistema (A) e quindi l'eventuale presenza di oscillazioni persistenti regolari o addirittura caotiche¹ dipende fortemente dalle forme funzionali nonlineari scelte per le funzioni $I(\cdot)$, $S(\cdot)$, $L(\cdot)$. In particolare in letteratura sono state scelte funzioni di investimento e/o di risparmio altamente non lineari, di tipo logistico o sigmoide, che ovviamente danno origine a equilibri multipli e sotto certe condizioni a cicli limite. In un altro modello del tipo IS-LM dinamico con accumulazione in tre equazioni differenziali il disequilibrio viene assunto nel mercato del lavoro, anziché nella parte monetaria come nel sistema (A), con una curva di Phillips aumentata per l'inflazione attesa (Franke, 1992): questo modello è specificato con una funzione di produzione Cobb-Douglas, una domanda di moneta specificata come la nostra del 'regime transattivo', la curva di Phillips rappresentata da una funzione logaritmica del tasso di occupazione, la funzione di

¹ Lorenz (1994, p.104) è pessimista sul fatto che simili modelli keynesiani in tempo continuo, anche di maggiore dimensione e addirittura con variabili esogenamente forzate da processi oscillatori, come un intervento pubblico periodico, possano generare un comportamento caotico. In realtà un simile modello, ancor più drasticamente semplificato, in tre dimensioni genera 'robustamente' comportamenti caotici (Fanti, 1999).

investimenti di tipo lineare; questo sistema presenta una biforcazione di Hopf che però appare “degenere” in quanto le orbite periodiche raggiunte da traiettorie con diversi punti di partenza sono diverse fra loro, e il sistema si comporta localmente e globalmente nello stesso modo, come fosse un sistema lineare (Franke rileva infatti che “this is somewhat surprising since in the analysis several nonlinearities had been recognized”, p.254). A differenza del sistema (A), nel presente lavoro assumeremo che il tasso d’interesse è sempre quello che assicura l’equilibrio sul mercato monetario, e a differenza di Franke(1992) non si prende in considerazione il mercato del lavoro, cosicché il nostro modello è solo bidimensionale². Inoltre la nostra unica non linearità emerge solo da una funzione di domanda di moneta in una specificazione che sebbene nonlineare è del tutto standard nella letteratura macroeconomica e ad una funzione dell’investimento basata sull’altrettanto usuale, e qui semplificato, principio dello ‘stock-adjustment’ proposto come teoria dell’investimento in ambito neoclassico e quindi fondato su basi microeconomiche. In questo senso il nostro modello cerca di “minimizzare” sia il carattere ad-hoc delle forme funzionali sia l’assenza di microfondazioni. Inoltre all’interno di questa cornice, abbiamo investigato le proprietà dinamiche di due diverse situazioni relative alla domanda di moneta, che emergono dalle analisi empiriche relative al nostro paese e che Banca d’Italia(1986) ha utilizzato per analizzare la dinamica economica nel suo modello econometrico (Galli, Terlizzese e Visco, 1989): un cosiddetto regime ‘finanziario’ in vigore soprattutto negli anni settanta e gradualmente cessato nei primi anni ottanta, in cui la domanda di moneta è stata detenuta prevalentemente come riserva di valore, ed in funzione quindi della ricchezza finanziaria; un cosiddetto ‘regime transattivo’ affermatosi con la seconda metà degli anni ottanta, in cui la detenzione di moneta è motivata principalmente da scopi transattivi, ed in funzione quindi del reddito totale. L’interpretazione economica che sta dietro al modello di Banca d’Italia è che il passaggio dal primo regime al secondo è il frutto della introduzione, a partire dagli anni ottanta, di nuovi strumenti finanziari (p.e. il mercato telematico dei titoli di stato, etc.): quindi per sintetizzare diremo che l’innovazione finanziaria è associata ad una sostituzione nella funzione di domanda di moneta della ‘ricchezza finanziaria’ con il ‘reddito’. La nostra investigazione risponde quindi anche alla domanda: l’evoluzione tra regimi nella domanda di moneta quali effetti comporta per la stabilità dell’economia e per la effettività della politica monetaria?

La nostra filosofia è quindi stata quella di mantenere la modellizzazione dell’economia nella cornice IS-LM nei limiti delle specificazioni dei ‘manuali’ e nella minima ‘dimensionalità’, per evidenziare come già essa endogenamente contenga una notevole ‘ricchezza’ della dinamica qualitativa, e dia luogo ad importanti e talvolta non intuitivi risultati utili per la ‘policy’.

Il lavoro è organizzato come segue. Il modello è introdotto nella sezione 1, suddiviso nei vari blocchi che lo compongono e nelle due formulazioni rappresentative delle due tipologie di domanda di moneta. Nella sezione 2 sono presentati i modelli dinamici nei casi dei due ‘regimi’, e per entrambi i casi sono presentate: i) l’analisi di stabilità locale, ii) l’analisi della biforcazione di Hopf, iii) una comparazione dei risultati. La sezione 3 presenta la simulazione numerica, con cui, attraverso alcuni esempi, si illustrano i risultati teorici raggiunti. Nella sezione 4 vi sono le osservazioni conclusive.

1. Il modello.

Nella costruzione del modello, l’obiettivo è quello di focalizzare gli effetti dinamici “basilari” della interazione fra determinazione degli investimenti di tipo neoclassico e determinazione del reddito e del tasso d’interesse sul mercato monetario di tipo keynesiano, restringendo al massimo le non linearità anche quando la loro introduzione sarebbe realistica. Per questo effettueremo delle semplificazioni rispetto ad altri pur fondamentali aspetti di un modello economico: le principali assunzioni semplificatrici sono: 1) il prezzo dell’output è costante (e quindi senza perdita di

² Questo consente di valorizzare, data la minima dimensionalità del modello, la sua ricchezza dinamica, illustrata nel lavoro.

generalità può essere posto pari all'unità), cosicché grandezze nominali e reali vengono a coincidere; 2) il costo dei servizi del capitale è rappresentato sinteticamente dal solo tasso d'interesse; 3) la funzione del risparmio è esogenamente data nel modo keynesiano più semplice; 4) le variabili sono quelle correnti e non quelle attese (evitando così l'introduzione di nonlinearità attraverso il canale per esempio dei ritardi nella formazione delle aspettative).

Investimenti delle imprese

Gli investimenti delle imprese sono assunti dipendere, secondo l'ipotesi dello 'stock adjustment', dall'aggiustamento non istantaneo alla differenza fra domanda di capitale 'desiderata' e stock di capitale effettivo. Secondo questa teoria dell'investimento di tipo neoclassico (Jorgenson, 1963), la domanda di capitale 'desiderata' dipende dall'ipotesi di massimizzazione del profitto dell'impresa, che, com'è noto, nell'ipotesi della più frequentemente usata funzione di produzione Cobb-Douglas (dove p è il prezzo della produzione Y , L e K sono rispettivamente la quantità di lavoro e di capitale usate)³

$$pY = L^{1-a} K^a, \quad p > 0, \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

conduce alla seguente formulazione dello stock di capitale desiderato (K°):

$$K^\circ = \frac{apY}{r} \quad (2)$$

Secondo la (2), la domanda ottima di capitale varia in modo proporzionale con la quantità prodotta, mentre, data quest'ultima, varia in maniera inversa rispetto al tasso d'interesse. Ovviamente per semplicità noi abbiamo considerato il tasso d'interesse come proxy del costo dei servizi del capitale che è invece la definizione rilevante per la scelta del capitale 'desiderato', la quale può comprendere anche l'ammortamento economico e fiscale, l'imposta societaria, il prezzo del bene capitale. Inoltre assumeremo d'ora in avanti la costanza del prezzo dell'output (p) che senza perdita di generalità può essere fissato pari a uno ($p=1$). Quindi la nostra economia è espressa sempre in termini reali e quindi reddito nominale e reale come domanda di moneta nominale e reale semplicemente coincidono.

Gli investimenti netti, in accordo con l'ipotesi dello 'stock adjustment', sono quindi:

$$I = \lambda(K^\circ - K) \quad (3)$$

con $\lambda > 0$.

Gli investimenti lordi allora sono:

$$\dot{K} = I + dK \quad (4)$$

dove d è il tasso costante di ammortamento.

Il mercato dei beni.

Seguendo note formulazioni del mercato dei beni (Sargent, 1987, ch.V; Flaschel, 1994), e per semplicità ipotizzando assenza di intervento pubblico (imposte e spesa), possiamo scrivere il consumo come

$$C = (1-s)(Y - dK) \quad (5.1)$$

dove s è la propensione (costante) al risparmio, ed il risparmio come

$$S = s(Y - dK) \quad (5.2)$$

Quindi il reddito varia per aggiustare lo squilibrio fra investimenti lordi e risparmio:

³ Ovviamente tutte le variabili sono funzioni del tempo (t), salvo ove espressamente indicate come costanti, cosicché abbiamo ommesso gli indici temporali t , in quanto non possono sorgere confusioni.

$$\dot{Y} = \sigma(I + dk - S) \quad (6)$$

Il mercato monetario.

Come è ampiamente riconosciuto nella letteratura, la domanda di moneta può dipendere, oltreché dal tasso d'interesse come costo opportunità delle alternative di investimento e dall'inflazione (qui esclusa), sia dal reddito (come misura del 'lavoro' compiuto dalla moneta) che dalla ricchezza, in particolare come rileva Friedman (1972) nella forma di ricchezza non-umana (in quanto la ricchezza umana a causa di vincoli istituzionali non può essere facilmente convertita in ricchezza non-umana); il medesimo autore ha comunque anche arguito che il reddito o meglio il cosiddetto 'reddito permanente' può essere considerato un indice di ricchezza e quindi usato come sostituto di essa nella funzione di domanda di moneta con un ruolo concettualmente distinto dall'altro ruolo tradizionalmente ricoperto dal reddito quale misura del "lavoro" che deve essere compiuto dalla moneta. In Italia la specificazione della domanda di moneta nel modello econometrico di Banca d'Italia (1986) (Galli, Terlizzese e Visco, 1989; Terlizzese, 1994) ha utilizzato entrambe le componenti ma con una sovrapposizione della ricchezza (che denota un cosiddetto 'regime finanziario') e del reddito (che denota un cosiddetto 'regime transattivo') che ha avuto un peso variabile nel tempo; in particolare a partire dai primi anni ottanta la componente del 'reddito' è divenuta pressochè dominante, tanto che a partire dal 1983 il passaggio dal 'regime finanziario' a quello 'regime transattivo' è stato completo e la variabile reddito ha del tutto sostituito la variabile 'ricchezza finanziaria' nella funzione di domanda di moneta. Anche un più recente studio econometrico sulla domanda di moneta in Italia (Angelini, Hendry e Rinaldi, 1994) ha rilevato una diversità nella struttura di domanda di moneta negli anni settanta e nel decennio successivo: infatti mentre nel periodo 1975-1979 la ricchezza ha un effetto positivo e il reddito non appare influenzare la moneta, nel periodo 1983-1991 prevale il risultato esattamente opposto. L'interpretazione economica che sta dietro al modello di Banca d'Italia e al lavoro di Angelini et al. è che l'introduzione di nuovi strumenti finanziari, a partire dagli anni ottanta, hanno fatto prevalere lo scopo 'transattivo' nella detenzione della moneta, in altre parole l'innovazione finanziaria è associata ad una sostituzione nella funzione di domanda di moneta della 'ricchezza finanziaria' con il 'reddito'. Noi accetteremo queste risultanze, senza entrare nel tema dell'effetto dello sviluppo dei mercati sulla domanda di moneta, che certo non è univoco: per esempio lo sviluppo del mercato secondario dei titoli di stato, iniziato negli anni ottanta ed esploso dopo il 1988, ha sicuramente favorito da un lato la domanda di titoli rispetto a quella dei depositi grazie al fatto di aver reso fortemente 'liquidi' i titoli di stato, ma dall'altro l'aumento delle transazioni sui mercati finanziari e dei capitali ha anche positivamente influenzato la domanda di saldi transattivi. Distingueremo quindi i due 'regimi' attraverso due opportune specificazioni della domanda di moneta:

Caso a) o caso del 'regime transattivo':

La domanda di moneta (M^D) dipende positivamente dal reddito e negativamente dal tasso d'interesse secondo una formulazione standard⁴:

$$M^D = \mu Y^f r^{-\rho}, \quad \mu, f, \rho > 0 \quad (7.1)$$

dove μ è un fattore di scala e f e ρ sono le elasticità della domanda di moneta rispettivamente al reddito e al tasso d'interesse.

⁴ Simili formulazioni sono p.e. in Jarsulic (1993), Franke (1992) – in cui però l'elasticità f è vincolata all'unità - e Gandolfo et al. (1996).

Caso b) o caso del regime 'finanziario':

La domanda di moneta (M^D) dipende positivamente dalla ricchezza (misurata qui dal capitale 'reale') e negativamente dal tasso d'interesse secondo una formulazione standard:

$$M^D = \mu K^m r^{-\rho}, \quad \mu, m, \rho > 0 \quad (7.2)$$

dove μ è un fattore di scala e m e ρ sono le elasticità della domanda di moneta rispettivamente al reddito e al tasso d'interesse.

L'offerta di moneta (M^S) è supposta costante per ragioni di semplicità (essendo comunque un modello che possiede un equilibrio stazionario del reddito, e non di crescita, tale assunzione è plausibile):

$$M^S = \bar{M} \quad (8)$$

Assumiamo che il mercato monetario sia sempre in equilibrio (anche l'aspetto del disequilibrio è trattato in Fanti 1999)

$$M^D = \bar{M} \quad (9)$$

Il tasso di interesse determinato sul mercato della moneta risulta quindi nei due casi:

Caso a)

$$r = \left(\frac{\mu Y^f}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (10.1)$$

Caso b)

$$r = \left(\frac{\mu K^m}{\bar{M}} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad (10.2)$$

Sebbene molti lavori empirici sulla domanda di moneta abbiano rilevato che la domanda di moneta si adegua a variazioni del reddito e del tasso d'interesse con ritardo, questo aspetto sarà qui omesso (per una trattazione di questo aspetto vedi Fanti 1999).

In questo lavoro focalizzeremo l'attenzione sugli effetti dinamici dell'elasticità della domanda di moneta sia al tasso che al reddito (alla ricchezza).

2- Il modello dinamico.

Per ricapitolare, il movimento delle due variabili dinamiche del modello - l'accumulazione lorda del capitale e il reddito - è governato dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= I + dK \\ \dot{Y} &= \sigma(I + dK - S) \end{aligned} \quad (11)$$

Poiché i due diversi 'regimi' della domanda di moneta danno luogo a differenti tassi d'interesse e quindi a differenti valori del capitale desiderato, distingueremo per ogni 'regime' un relativo modello dinamico:

2.1-Caso a)

Tenendo conto delle equazioni (2), (3),(5) e (10.1) il modello dinamico (11) diviene definitivamente

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \lambda \left[a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}} Y^{\frac{\rho-f}{\rho}} - K \right] + dK \\ \dot{Y} &= \sigma \left\{ \lambda \left[a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}} Y^{\frac{\rho-f}{\rho}} - K \right] + dK - sY + sdK \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Analisi statica e dinamica.

Il sistema (12) possiede due equilibri:

l'equilibrio nullo E_0 e l'equilibrio positivo E_1 , con le seguenti coordinate:

$$E_0 = [K = 0, Y = 0,] \quad E_1 = \left[K^* = d^{\frac{\rho-f}{f}} \left(\frac{\lambda A}{\lambda-d} \right)^{\frac{\rho}{f}}, Y^* = \left(\frac{d\lambda A}{(\lambda-d)} \right)^{\frac{\rho}{f}} \right]$$

dove

$$A = a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Noi focalizzeremo l'analisi algebrica sulla stabilità locale dell'equilibrio positivo (essendo quello nullo non interessante sul piano economico), rimandando l'investigazione sia degli eventuali processi di 'nascita e morte' di tale equilibrio, sia della stabilità globale all'evidenza della simulazione numerica.

Vogliamo evidenziare adesso il ruolo di alcuni parametri di interesse (in specie delle elasticità della domanda di moneta) sulla stabilità locale del sistema (12). La linearizzazione del sistema (8) nel suo punto di equilibrio E_1 conduce alla seguente matrice jacobiana:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -d + \lambda & \frac{\rho-f}{\rho} \lambda A Y^{*\frac{-f}{\rho}} \\ -\sigma(\lambda-d-sd) & \sigma \left(\frac{\rho-f}{\rho} \lambda A Y^{*\frac{-f}{\rho}} - s \right) \end{bmatrix} \quad (13)$$

e sostituendo per il valore di equilibrio il jacobiano si semplifica definitivamente in

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -d + \lambda & \frac{(\rho-f)[(\lambda-d)]}{\rho d} \\ -\sigma(\lambda-d-sd) & \sigma \left\{ \frac{(\rho-f)[(\lambda-d)]}{\rho d} - s \right\} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Com'è noto, le condizioni di stabilità sono

$$\text{Traccia } (J) = (\lambda-d) \left[\sigma \frac{(\rho-f)}{\rho d} - 1 \right] - \sigma s < 0 \quad (15.1)$$

$$\text{Determinante } (J) = \sigma s \left[(\lambda-d) \left(1 - \frac{\rho-f}{\rho} \right) \right] > 0 \quad (15.2)$$

Tali condizioni possono essere riassunte nelle due seguenti disequazioni espresse in termini delle due elasticità della domanda di moneta:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J) < 0 &\Leftrightarrow \frac{\rho-f}{\rho} < \frac{d}{\sigma} + \frac{sd}{(\lambda-d)} \\ \text{Det}(J) > 0 &\Leftrightarrow 1) \quad \lambda > d \end{aligned} \quad (16)$$

E' facile vedere che la diseuguaglianza del determinante è soddisfatta, cioè l'equilibrio positivo non può mai essere un punto di sella, quando la velocità di aggiustamento dello stock è sufficientemente elevata relativamente al tasso di ammortamento il che in termini economici equivale ad assumere un flusso di investimento netto sufficientemente alto rispetto alle necessità del solo rimpiazzo del capitale. Noi assumeremo d'ora in poi che valga questo caso, del resto empiricamente il più plausibile, non essendo significativa un'analisi della cosiddetta 'saddle-path stability', dato che né il reddito né l'accumulazione lorda possono essere in questo contesto variabili cosiddette 'jump'.

Tale equilibrio può allora perdere stabilità solo quando la traccia diventa positiva, ovvero quando, per esempio, l'elasticità rispetto al tasso è sufficientemente più elevata di quella rispetto al reddito.

Quindi vale la seguente *Proposizione 1* (la cui dimostrazione è affidata alla semplice ispezione della (16)):

condizione sufficiente affinché il sistema economico sia sempre stabile è che l'elasticità rispetto al reddito sia superiore a quella rispetto al tasso. Quando tale condizione è violata in modo quantitativamente significativo e concorrono altre condizioni economiche - quali un basso tasso di risparmio, uno scarso deprezzamento fisico del capitale e aggiustamenti troppo 'rapidi' sia dello stock di capitale effettivo rispetto a quello desiderato, sia dello squilibrio fra domanda e offerta nel mercato dei beni - l'equilibrio del sistema perde la sua stabilità.

L'intuizione della proposizione è come segue. Quando l'elasticità al tasso diviene maggiore di quella al reddito, gli incrementi di reddito fanno crescere lo stock di capitale desiderato e quindi l'investimento più di quanto gli aumenti indotti nel tasso tendano a ridurlo, al punto che (soprattutto se il tasso di risparmio è sufficientemente basso da rendere il risparmio sempre inferiore all'investimento) la crescita del reddito tende a diventare cumulativa ed anche il suo effetto sull'accumulazione diventa positivo, rafforzando così la tendenza esplosiva.

Osservazione 1: è importante osservare che ben tre parametri economici del modello non giocano alcun ruolo sulla stabilità del sistema economico; la tecnologia misurata dal parametro tecnologico a ; il fattore di scala della domanda di moneta e soprattutto lo stock costante di moneta. Quindi eventuali shocks alla funzione di produzione o nella scala della domanda di moneta non rilevano, come, cosa ancor più importante, non può avere alcun effetto in tema di stabilità la politica monetaria in termini di fissazione della quantità di moneta.

L'analisi di biforcazione.

Assumendo d'ora in avanti che ragionevolmente il determinante è sempre positivo mentre la traccia può cambiare di segno, che implica notoriamente che la perdita di stabilità può avvenire solo per il cambiamento di segno (da negativo a positivo) di una coppia di autovalori complessi, noi siamo in

grado di applicare il Teorema della biforcazione di Hopf al sistema (12). Definiamo $R = \frac{f}{\rho}$.

Proposizione: Per tutti i valori di $R > 0$ il sistema (12) ha un equilibrio positivo tale che quando gli autovalori del sistema linearizzati in tale equilibrio, $\xi_1(R)$ e $\xi_2(R)$ sono puramente immaginari quando $R=R_H$, e se le parti reali degli autovalori, $\text{Re}[\xi_1(R)]$ e $\text{Re}[\xi_2(R)]$ soddisfano la condizione

di attraversamento dell'asse immaginario a velocità non nulla, cioè $\frac{\partial \{\text{Re}[\xi_i(R)]\}}{\partial R} \Big|_{R=R_H} > 0, \quad i = 1, 2,$

allora: i) $R=R_H$ è un punto dello spazio parametrico che è di biforcazione del sistema, e in tale punto emerge un ciclo limite che circonda il punto d'equilibrio del sistema e la cui ampiezza e frequenza dipendono dal valore assunto da R .

Prova: gli autovalori risultano:

$$\xi_i = \frac{\text{Tr}(J) \pm \sqrt{\Theta}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda - d) \left[\sigma \frac{(\rho - f)}{\rho d} - 1 \right] - \sigma_s \right\} \pm \sqrt{\Theta}, \quad i = 1, 2,$$

dove Θ è il discriminante $(\text{Tr}(J)^2 - 4\text{Det}(J)) < 0$; tali autovalori diventano puramente immaginari quando $\text{Tr}(J)$ si annulla ovvero quando $R=R_H$:

$$\text{Tr}(J) = 0 \Leftrightarrow R = R_H = \frac{d}{\sigma} + \frac{s}{(\lambda - d)}$$

Inoltre è facile notare che differenziando le parti reali degli autovalori rispetto a R , noi abbiamo

$$\frac{\partial \{\text{Re}[\xi_i(R)]\}}{\partial R} \Big|_{R=R_H} > 0$$

2.2 - Caso b)

Tenendo conto delle equazioni (2), (3), (5) e (10.2) dal sistema (11) si ricava il seguente modello dinamico:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \lambda \left[a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}} K^{-\frac{m}{\rho}} Y - K \right] + dK \\ \dot{Y} &= \sigma \left\{ \lambda \left[a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}} K^{-\frac{m}{\rho}} Y - K \right] + dK - sY + sdK \right\} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Analisi statica e dinamica.

Il sistema (12.1) possiede due equilibri:

l'equilibrio nullo E_0 e l'equilibrio positivo E_1 , con le seguenti coordinate:

$$E_0 = [K = 0, Y = 0,] \quad E_1 = \left[K^* = d^{\frac{\rho}{m}} \left(\frac{\lambda A}{(\lambda - d)} \right)^{\frac{\rho}{m}}, Y^* = \left(\frac{\lambda A}{(\lambda - d)} \right)^{\frac{\rho}{m}} d^{\frac{m+\rho}{m}} \right]$$

dove

$$A = a \left(\frac{\bar{M}}{\mu} \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Studiamo la stabilità locale del sistema (12.1). La linearizzazione del sistema (12.1) nel suo punto di equilibrio E_1 conduce alla seguente matrice jacobiana:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\lambda AY^* \frac{m}{\rho} K^{*\frac{-(\rho+m)}{\rho}} - (\lambda - d) & \lambda AK^{*\frac{-m}{\rho}} \\ \sigma \left(\lambda AY^* \frac{m}{\rho} K^{*\frac{-(\rho+m)}{\rho}} + (\lambda - d) \right) & \sigma \left(\lambda AK^{*\frac{-m}{\rho}} - s \right) \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

e sostituendo per il valore di equilibrio il jacobiano si semplifica definitivamente in

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(\lambda - d) \frac{\rho + m}{\rho} & \frac{[\lambda - d]}{d} \\ -\sigma \left[-(\lambda - d) \frac{\rho + m}{\rho} + sd \right] & \sigma \left\{ \frac{[\lambda - d]}{d} - s \right\} \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

Le condizioni di stabilità sono

$$\text{Traccia}(J) = (\lambda - d) \left[\sigma d - \frac{\rho + m}{\rho} \right] - \sigma s < 0 \quad (15.1.1)$$

$$\text{Determinante}(J) = \sigma \left[s(\lambda - d) \left(\frac{\rho + m}{\rho} - 1 \right) \right] > 0 \quad (15.1.2)$$

Tali condizioni possono essere riassunte nelle due seguenti disequazioni espresse in termini delle due elasticità della domanda di moneta:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J) < 0 &\Leftrightarrow \frac{\rho + m}{\rho} > \frac{\sigma}{d} - \frac{s\sigma}{(\lambda - d)} \\ \text{Det}(J) > 0 &\Leftrightarrow \lambda > d \end{aligned} \quad (16.1)$$

E' facile vedere che la disequazione del determinante è la medesima del caso a).

Quindi vale la seguente *Proposizione 2*:

favoriscono la stabilità dell'equilibrio positivo del sistema: una bassa elasticità al tasso, una elevata elasticità alla ricchezza, un basso tasso di risparmio, uno scarso deprezzamento fisico del capitale e un rapido aggiustamento dello stock di capitale effettivo. Il ruolo della velocità di aggiustamento sul mercato dei beni, al contrario del caso a), è ambiguo: esso favorisce la stabilità (rispettivamente la instabilità) quando $d(1+s) > (\text{risp. } <) \lambda$.

Anche per il caso b) si dimostra l'esistenza di una biforcazione di Hopf, seguendo la medesima procedura del caso a) (vedi Appendice).

Osservazione 2: in aggiunta alle considerazioni già espresse per il caso a) nella osservazione 1 e valide anche per il caso b), si rileva che nel caso b) non esiste più la condizione sufficiente del caso a) per cui affinché il sistema economico fosse sempre stabile bastava che l'elasticità rispetto al reddito fosse superiore a quella rispetto al tasso. Quindi se le elasticità fossero parametri in qualche misura sotto il 'controllo' dell'autorità monetaria, nel 'regime finanziario' quest'ultima perde la possibilità di avere uno strumento 'sufficiente' per la stabilizzazione.

Vale infine la pena osservare che la dimostrazione dell'esistenza di un ciclo limite locale in entrambi questi modelli bidimensionali è un risultato importante, visto che per esempio il modello tridimensionale presentato in Franke (1992) non mostra nulla di più che un comportamento pressochè simile a quello di un sistema lineare.

2.3 – Confronto dei due casi.

I due modelli in esame si differenziano solo per la diversa variabile di scala nella funzione di domanda di moneta. Appare quindi utile effettuare un confronto fra i due modelli, per evidenziarne le differenze principali; intanto rispetto alla stabilità locale, l'assunzione $\lambda > d$ esclude in entrambi i casi che l'equilibrio sia un punto di sella.

Ma per quanto riguarda l'eventuale instabilità sia monotona che oscillatoria tanto quanto la comparsa di cicli limite, i due casi sono molto diversi. Dopo qualche manipolazione possiamo così riscrivere la traccia dei due casi:

$$\text{Caso a) } \text{Traccia}(J) = H - (\lambda - d) \frac{\sigma f}{\rho d} < 0$$

$$\text{Caso b) } \text{Traccia}(J) = H - (\lambda - d) \frac{m}{\rho} < 0,$$

$$\text{dove } H = (\lambda - d) \frac{\sigma}{d} - \sigma s$$

Per favorire in modo intuitivo il confronto possiamo fare la conveniente (e peraltro a priori plausibile) assunzione che le elasticità rispetto al reddito e alla ricchezza siano uguali (cioè $m=f$): vediamo che in questo caso gli equilibri sarebbero i medesimi tranne che per l'effetto dell'ammortamento che nel caso del 'regime finanziario' determina un livello di reddito e di

accumulazione inferiore che nel caso precedente, mentre si semplificano le differenze in tema si stabilità.

Infatti vale allora la seguente *Osservazione*: dalla semplice ispezione delle tracce sopra esposte il caso b) appare più (meno) stabile se $\sigma > (<)$ d .

Poiché plausibilmente $\sigma > d$ (per esempio dato un plausibile tasso di deprezzamento fra il 5% e il 10% sarebbe necessario un ritardo medio nell'aggiustamento sul mercato dei beni da dieci a venti anni affinché i due casi avessero la medesima condizione di stabilità, il che appare quindi poco verosimile), allora il passaggio riscontrato nella funzione di domanda di moneta fra il ruolo della ricchezza e quello del reddito, storicamente accertato dall'analisi empirica a cui abbiamo fatto riferimento fra gli anni settanta e il periodo corrente e ascrivito all'innovazione finanziaria, ha avuto probabilmente l'importante conseguenza di influenzare negativamente le condizioni di stabilità del sistema economico.

Le proposizioni stabiliscono l'esistenza di orbite periodiche, ma non dicono se prevale il caso cosiddetto subcritico che significa che l'orbita periodica sarebbe localmente repulsiva ovvero si avrebbe un ciclo limite instabile oppure il caso cosiddetto supercritico col quale l'orbita periodica sarebbe localmente attrattiva ovvero avremmo un ciclo limite stabile. Mentre il caso di ciclo stabile ha un ovvio significato economico in quanto può approssimare l'evidenza delle fluttuazioni economiche, nell'altro caso il ciclo non può ovviamente mai essere realmente osservabile. Ma anche il caso di ciclo instabile ha ricevuto un certo interesse grazie a una interessante interpretazione economica: esso di fatto rappresenta il concetto della cosiddetta 'corridor stability' nella nota accezione di Leijonhufvud. Purtroppo l'accertamento analitico di quale dei due casi prevalga dipende dai termini nonlineari di ordine più elevato nella espansione in serie di Taylor dei membri al lato destro delle equazioni del sistema (12) (rispettivamente del sistema 12.1); pertanto anche svolgendo tale complicata algebra, le risultanti condizioni per la stabilità dell'orbita non sarebbero passibili di alcuna interpretazione economica (Gandolfo, 1996). Per questo ricorremo alla simulazione numerica nella prossima sezione, con la quale accerteremo che per qualsiasi plausibile set parametrico le soluzioni periodiche emergenti dalle condizioni della Proposizione 1 sono di tipo repulsivo.

3 - La simulazione numerica.

Come detto, il comportamento qualitativo dell'orbita periodica prossima al valore della biforcazione di Hopf per il parametro composito R può essere ulteriormente investigato per mezzo della simulazione numerica. Poiché come noto la biforcazione di Hopf è soltanto locale in carattere, nulla ci può dire sul comportamento globale del sistema (12) (rispettivamente del sistema 12.1); allora la simulazione può in questo caso fornire sufficienti basi per congetturare le caratteristiche delle proprietà globali del sistema lontano dall'equilibrio. Nel seguito presenteremo i set numerici dei parametri e riporteremo i principali risultati concernenti la biforcazione di Hopf e il comportamento globale. Il set parametrico di base usato per illustrare la dinamica è il seguente:

$$a = 0.5, \bar{M} = \mu = 1, s = 0.05, d = 0.1, \lambda = 1, \sigma = 1.13.$$

Per il caso a) quando l'elasticità al tasso è minore di quella al reddito, cioè $R > 1$, vi sarà sempre convergenza all'equilibrio positivo; vedi per esempio la fig.1, dove $R = 1.05$. Inoltre in questi casi la simulazione permette di congetturare l'esistenza di stabilità anche globale.

Investigando il caso in cui invece l'elasticità al tasso è maggiore di quella al reddito, trova conferma la predizione analiticamente provata dell'occorrenza di un ciclo limite locale secondo Hopf; per i dati di sopra, allora per ogni R prossimo a (ma maggiore di) $R_H = 0.901$ (p.e. $\rho = 1.11$ e $f = 1$) vi sarà l'emergenza di un ciclo instabile attorno all'equilibrio dato da $K^* = 0.415$ e $Y^* = 0.046$, come si osserva nelle figure 2-3. E' facile vedere nelle medesime figure, per i dati sopra riportati, anche la misura della regione dello spazio delle fasi contenente i valori delle condizioni iniziali dell'accumulazione e del reddito che giacciono all'interno del cosiddetto 'corridor stability'; tale

regione è abbastanza limitata, cosicchè anche contenuti shocks esogeni sul reddito e/o sull'accumulazione possono condurre il sistema fuori di questa regione dove le traiettorie presto esploderanno. Infatti la simulazione rivela che globalmente, al di fuori del 'corridor stability', tutte le traiettorie diventano esplosive.

Per il caso b) la convergenza richiede (a parità degli altri parametri) una elasticità al tasso fortemente minore di quella rispetto alla ricchezza⁵, cioè $R^o > 10.16$. Anche in questo caso quando il rapporto fra le elasticità R^o scende sotto un certo valore critico emerge il ciclo limite locale predetto analiticamente; ed anche in questo caso tale ciclo appare instabile: per ogni R^o prossimo a (ma maggiore di) $R^o_H = 10.16$ (p.e. $\rho = 1.11$ e $m = 11.28$) vi sarà l'emergenza di un ciclo instabile attorno all'equilibrio dato da $K^* = 0.76$ e $Y^* = 0.082$, come si osserva in fig. 4, dove l'ellissi in neretto rappresenta il ciclo limite instabile. A scopo illustrativo presentiamo l'effetto dinamico di una variazione estremamente piccola dell'elasticità al tasso: con riferimento al modello del 'regime transattivo' nelle figg. 1 e 2, con riferimento al modello del 'regime finanziario', nella fig. 4, usando due valori dell'elasticità al tasso molto vicini fra loro, $\rho = 1.1025$ e $\rho = 1.103$. Nel primo caso ($\rho = 1.1025$) le traiettorie nel piano (K, Y) spiraleggiano verso l'esterno, come si vede nella fig. 2 e nella regione esterna al ciclo instabile nella fig. 4; nel secondo caso ($\rho = 1.103$) spiraleggiano verso l'interno convergendo all'equilibrio E_1 , come si vede nella fig. 3 e nella regione interna al ciclo instabile nella fig. 4. Ciò evidenzia, anche intuitivamente, l'esistenza di uno "spartiacque", cioè di una orbita chiusa tale che tutte le traiettorie che iniziano al suo interno convergono all'equilibrio di lungo periodo, mentre quelle che partono dall'esterno di tale orbita (ma in prossimità di essa) si allontanano in modo oscillatorio. Il caso dell'orbita chiusa che è "respingente" da entrambi i lati, rappresenta la situazione di 'corridor stability' per usare il termine coniato da Leijonhufvud (1973): in questa situazione sia i) piccole perturbazioni sia dei valori dei parametri che non influenzano l'equilibrio che dell'equilibrio stesso, sia ii) piccoli shocks esogeni sulle variabili non impediscono all'economia di proseguire nella convergenza verso l'equilibrio stazionario, ma più significativi cambiamenti e shocks possono invece far definitivamente allontanare l'economia dall'equilibrio di lungo periodo.

La simulazione rivela anche che la stabilità nel 'corridor' e il ciclo limite instabili sono solo fenomeni locali, e che globalmente prevale l'instabilità.

Inoltre con la simulazione si conferma che la stabilità nel caso b) richiede una elasticità rispetto alla ricchezza decisamente elevata e quindi, nella misura in cui l'aggiustamento sul mercato dei beni giace in un range realistico, la stabilità viene favorita quando la domanda di moneta è determinata in 'regime transattivo' anziché 'finanziario' (nel caso puramente illustrativo di sopra, nel 'regime transattivo' il sistema è stabile con una elasticità al reddito unitaria, decisamente plausibile, mentre nel 'regime finanziario' per essere stabile richiede almeno una elasticità alla ricchezza superiore a undici, decisamente troppo elevata).

INSERT FIGG.

Fig.1- Traiettorie globalmente convergenti all'equilibrio nel piano delle fasi (k,y), per $R=1.05$ (condizioni iniziali $k=0.416$, $y=0.047$).

Fig.2- Traiettorie localmente divergenti in modo oscillatorio nel piano delle fasi (k,y), per $R=0.907$ (condizioni iniziali $k=0.416$, $y=0.047$).

Fig.3- Traiettorie localmente convergenti all'equilibrio nel piano delle fasi (k,y), per $R=0.906$ (condizioni iniziali $k=0.416$, $y=0.047$).

⁵ Definiamo $R^o = \frac{m}{\rho}$

Fig.4- Ciclo limite instabile (in neretto) nel piano delle fasi (k,y); all'esterno traiettorie localmente divergenti in modo oscillatorio per $R^0=10.227$ ed all'interno traiettorie localmente convergenti all'equilibrio per $R^0=10.232$ (condizioni iniziali $k=0.765$, $y=0.083$).

4 - Conclusioni.

In questo lavoro abbiamo sviluppato un modello IS-LM con accumulazione con lo scopo di investigarne la dinamica qualitativa, seguendo un filone in crescita di macroeconomia dinamica nonlineare. Abbiamo cercato di evitare l'introduzione di nonlinearità ad-hoc: per questo la funzione di investimento netto è derivata dal principio dello 'stock-adjustment' con una tecnologia Cobb-Douglas e il mercato monetario è formulato secondo una tradizionale specificazione da manuale. Inoltre poiché Banca d'Italia e altri recenti lavori econometrici hanno evidenziato un passaggio graduale da una domanda di moneta detenuta principalmente come riserva di valore (in funzione quindi della variabile ricchezza finanziaria), negli anni settanta e primi ottanta e chiamato 'regime finanziario', ad una domanda di moneta detenuta prevalentemente per motivi transattivi (in funzione quindi del reddito totale) nel periodo più recente e chiamato 'regime transattivo' abbiamo investigato le proprietà dinamiche dei due diversi modelli. Entrambi i modelli presentano simili ed interessanti proprietà qualitative: 1) sebbene come atteso l'offerta di moneta influenzi positivamente reddito e accumulazione di lungo periodo, essa non ha alcun effetto sulla stabilità dell'equilibrio, mostrando quindi l'inefficacia della politica monetaria in termini di fissazione di uno stock costante di moneta relativamente all'obiettivo di stabilizzazione dell'economia; 2) l'instabilità di sella viene esclusa purchè la velocità di aggiustamento dello stock ovvero l'investimento netto sia sufficientemente elevato relativamente alle necessità del solo rimpiazzo del capitale; 3) la stabilità richiede basse elasticità rispetto al tasso relativamente a quelle rispetto al reddito o alla ricchezza, bassi tassi di risparmio ed elevate "velocità" di aggiustamento dello stock di capitale; in tal caso la stabilità appare anche globale; 4) emergono per opportuni e ben identificati valori dei parametri cicli limiti locali; la simulazione numerica evidenzia come essi siano instabili. In altre parole entrambi i modelli esibiscono la proprietà della 'corridor stability' che secondo Leijonhufvud (1973, 1981) è la situazione 'tipica' delle economie di mercato, in cui sono presenti forti tendenze all'equilibrio ma emergono anche difetti di coordinamento e fallimenti del mercato che possono fare allontanare dall'equilibrio. Il confronto dettagliato fra le condizioni di stabilità dei due modelli rivela però che, quando la velocità di aggiustamento della produzione è sufficientemente normale, il 'regime finanziario' può essere decisamente più instabile di quello 'transattivo'; allora, seguendo l'interpretazione di Banca d'Italia, l'innovazione finanziaria dell'ultimo decennio può aver favorito le condizioni di stabilità dell'economia⁶. La direzione di ulteriori ricerche è sia quella di permettere la variabilità dei prezzi (e dell'inflazione) quanto di tener conto delle aspettative delle variabili e dei ritardi di aggiustamento per esempio nel mercato monetario; inoltre gli strumenti di 'policy' monetaria qui del tutto ridotti debbono essere estesi (modalità di finanziamento del debito, riserva obbligatoria per i depositi, etc.) il che implica una maggiore estensione del modello. Ma i risultati analitici e le simulazioni numeriche qui presentate possono essere le basi di una più ambiziosa agenda di ricerca di macroeconomia dinamica nella cornice IS-LM con accumulazione.

BIBLIOGRAFIA

⁶ Merita qui rilevare che, sebbene le analisi econometriche di BI e di Angelini et al. evidenzino la scomparsa del cosiddetto regime 'finanziario', il recente e relativamente nuovo campo d'indagine empirica nato col pionieristico lavoro di Friedman (1988), col quale si evidenzia come i prezzi delle azioni influenzino la domanda di moneta, può di nuovo segnalare l'influenza dell'accumulazione di capitale (finanziario e 'reale') sulla domanda di moneta: infatti una influenza positiva di tali prezzi può testimoniare in primis l'importanza di un effetto ricchezza di tipo finanziario ma anche l'esistenza di un più sottile meccanismo di trasmissione che finisce col collegare direttamente domanda di moneta e stock di capitale 'reale' (Caruso, 1996).

- Angelini P. – Hendry D.F. e Rinaldi R., Un'analisi econometrica della domanda di moneta in Italia, in Banca d'Italia, *Ricerche quantitative per la politica economica* 1993, Numero speciale dei Contributi all'analisi economica, 1994.
- Banca d'Italia, *Modello trimestrale dell'economia italiana*, Temi di discussione n.80, 1986.
- Boldrin M., *Applying Bifurcation Theory: Some Simple Results on Keynesian Business Cycles*, DP 8403, University of Venice, 1984.
- Caruso M., *Stock Prices and Money Velocity: A Multi-Country Analysis*, Banca d'Italia, Temi di discussione n. 264, Febbraio, 1996.
- Fanti L., *La dinamica macroeconomica secondo un modello IS-LM con accumulazione*, mimeo, Università di Pisa, 1999.
- Flaschel P., Keynes-Friedman and Keynes Marx models of monetary growth, *Ricerche Economiche*, 48, 1994, pp. 45-70.
- Flaschel P.- Franke R. and Semmler W., *Dynamics Macroeconomics*, Cambridge,MA, The MIT Press, 1997.
- Franke R., Stable, Unstable and Persistent Cyclical Behaviour in a Keynes-Wicksell Monetary Growth Model, *Oxford Economic Papers*, 44, 1992, pp. 242-256.
- Friedman M., Uno schema teorico per l'analisi monetaria, in Bellone G. (a cura di), *Il dibattito sulla moneta*, Il Mulino, Bologna, 1972.
- Friedman M., Money and the Stock Market, *Journal of Political Economy*, Vol.96, n. 2, 1988, pp. 221-245.
- Gandolfo G., *Economic Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- Gandolfo G.-Padoan P.C.-De Arcangelis G. and Wymer C.R., Nonlinear estimation of a nonlinear continuous time model, in Barnett W.A.-Gandolfo G. and Hillinger C. (eds.), *Dynamic Disequilibrium Modeling*, Cambridge University Press, 1996.
- Galli G. – Terlizzese D. e Visco I., Un modello trimestrale per la previsione e la politica economica: le proprietà di breve e di lungo periodo del modello della Banca d'Italia, *Politica Economica*, n.1, aprile, 1989.
- Guckenheimer J.- Holmes P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer verlag, Berlin, 1984.
- Kuznetsov A., *Elements of Theory of Bifurcations*, Berlin, Springer-verlag, 1995.
- Kydland F.-Prescott E., Time to Build an Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, November, 1982.
- Jarsulic M., The Implications of Finance Constraints and Debt for Macroeconomic Stability, *Economic Notes*, vol.22, no. 3, 1993, pp.487-504.

Jorgenson D.W., Capital Theory and Investment Behavior, *American Economic Review*, 53, 1963, pp.247-259.

Leijonhufvud A., On Keynesian Economics and the Economics of Keynes, 75, *Swedish Journal of Economics*, pp. 27-48, 1973.

Leijonhufvud A., (ed.), *Information and coordination*, OUP, Oxford, 1981.

Lorenz H.W., *Non linear dynamical economics and chaotic motion*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.

Lorenz H.W., Analytical and Numerical methods in the study of nonlinear dynamical systems in Keynesian Macroeconomics, in Semmler W. (ed.), *Business Cycles: Theory and Empirical Methods*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1994, pp.73-112.

Medio A., *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Sargent T., *Macroeconomic Theory*, Academic Press, New York, 1987.

Terlizzese D., Il modello econometrico della banca d'Italia: una versione in scala 1:15, in Banca d'Italia, *Ricerche quantitative per la politica economica 1993*, Numero speciale dei Contributi all'analisi economica, 1994.

APPENDICE I

Assumendo d'ora in avanti che ragionevolmente il determinante è sempre positivo mentre la traccia può cambiare di segno, che implica notoriamente che la perdita di stabilità può avvenire solo per il cambiamento di segno (da negativo a positivo) di una coppia di autovalori complessi, noi siamo in grado di applicare il Teorema della biforcazione di Hopf al sistema (12). Definiamo $R^\circ = \frac{m}{\rho}$.

Proposizione: Per tutti i valori di $R^\circ > 0$ il sistema (12) ha un equilibrio positivo tale che quando gli autovalori del sistema linearizzati in tale equilibrio, $\xi_1(R^\circ)$ e $\xi_2(R^\circ)$ sono puramente immaginari quando $R^\circ = R^\circ_H$, e se le parti reali degli autovalori, $\text{Re}[\xi_1(R^\circ)]$ e $\text{Re}[\xi_2(R^\circ)]$ soddisfano la condizione di attraversamento dell'asse immaginario a velocità non nulla, cioè $\frac{\partial \{\text{Re}[\xi_i(R^\circ)]\}}{\partial R^\circ} \Big|_{R^\circ=R^\circ_H} > 0$, $i = 1, 2$, allora: i) $R^\circ = R^\circ_H$ è un punto dello spazio parametrico che è di

biforcazione del sistema, e in tale punto emerge un ciclo limite che circonda il punto d'equilibrio del sistema e la cui ampiezza e frequenza dipendono dal valore assunto da R° .

Prova: gli autovalori risultano:

$$\xi_i = \frac{\text{Tr}(J) \pm \sqrt{\Theta}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda - d) \left[\sigma d - \frac{\rho + m}{\rho} \right] - \sigma s \right\} \pm \sqrt{\Theta}, \quad i = 1, 2,$$

dove Θ è il discriminante $(\text{Tr}(J))^2 - 4\text{Det}(J) < 0$; tali autovalori diventano puramente immaginari quando $\text{Tr}(J)$ si annulla ovvero quando $R^\circ = R^\circ_H$:

$$\text{Tr}(J) = 0 \Leftrightarrow R^\circ = R^\circ_H = \frac{\sigma - d}{d} - \frac{s\sigma}{(\lambda - d)}$$

Inoltre è facile notare che differenziando le parti reali degli autovalori rispetto a R° , noi abbiamo

$$\frac{\partial \{\operatorname{Re}[\xi_i(R^\circ)]\}}{\partial R^\circ} \Big|_{R^\circ=R^\circ_H} > 0$$

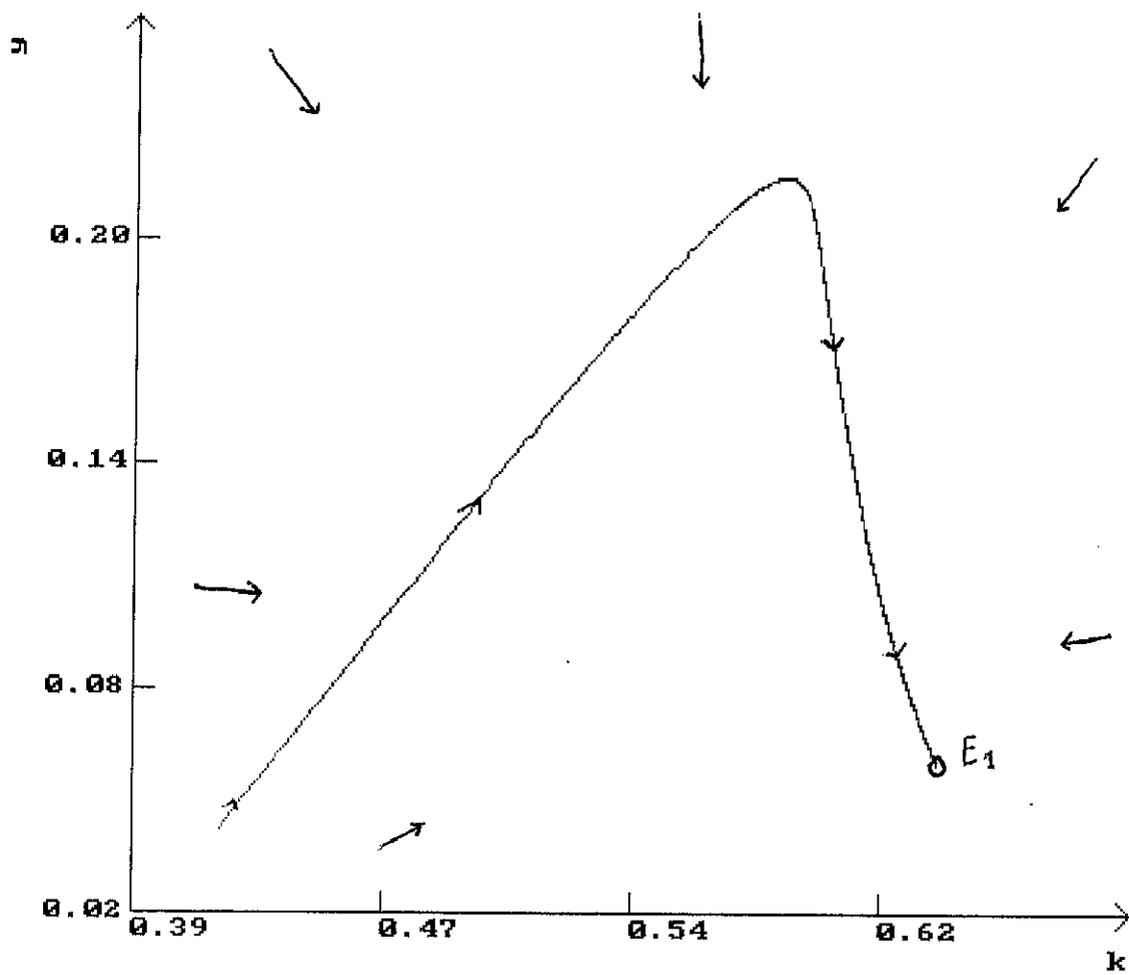


FIG. 1

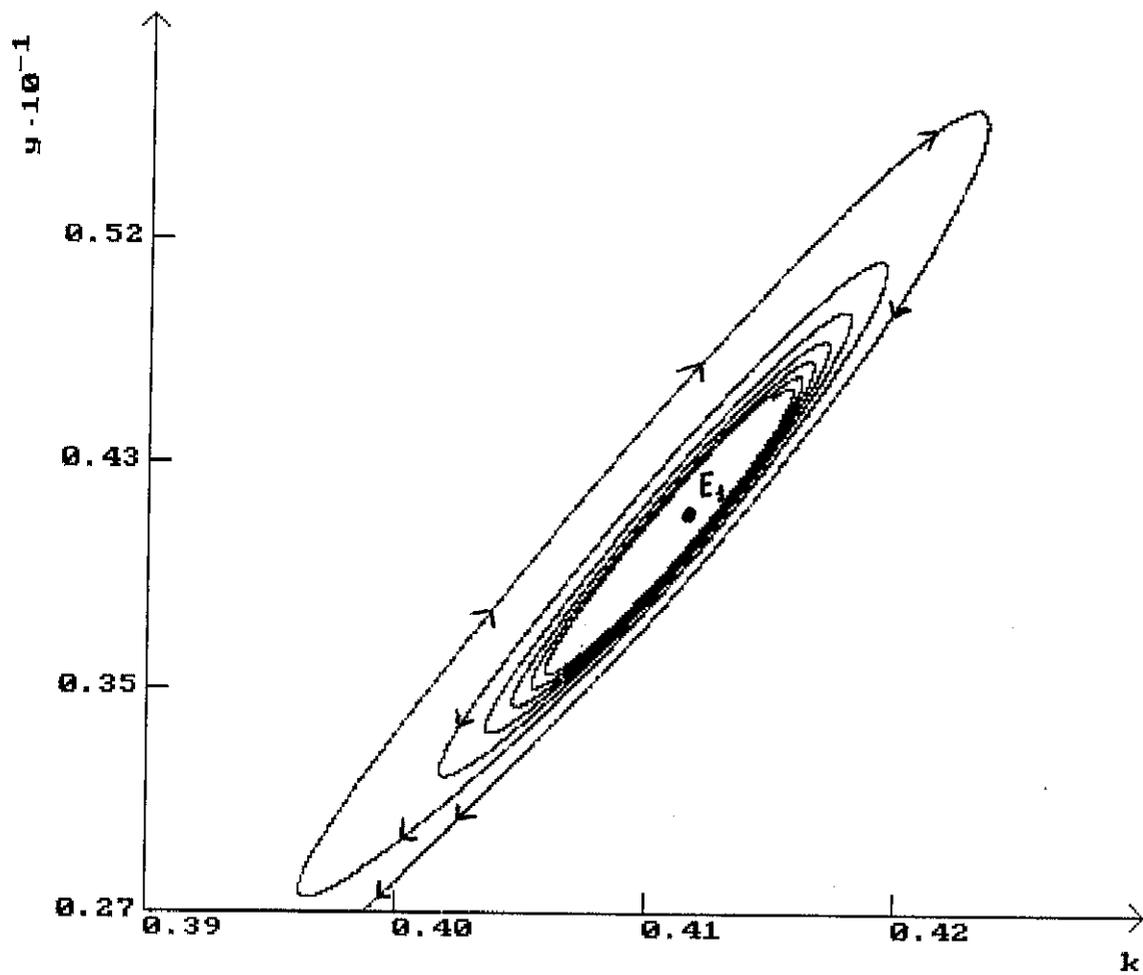


FIG. 2

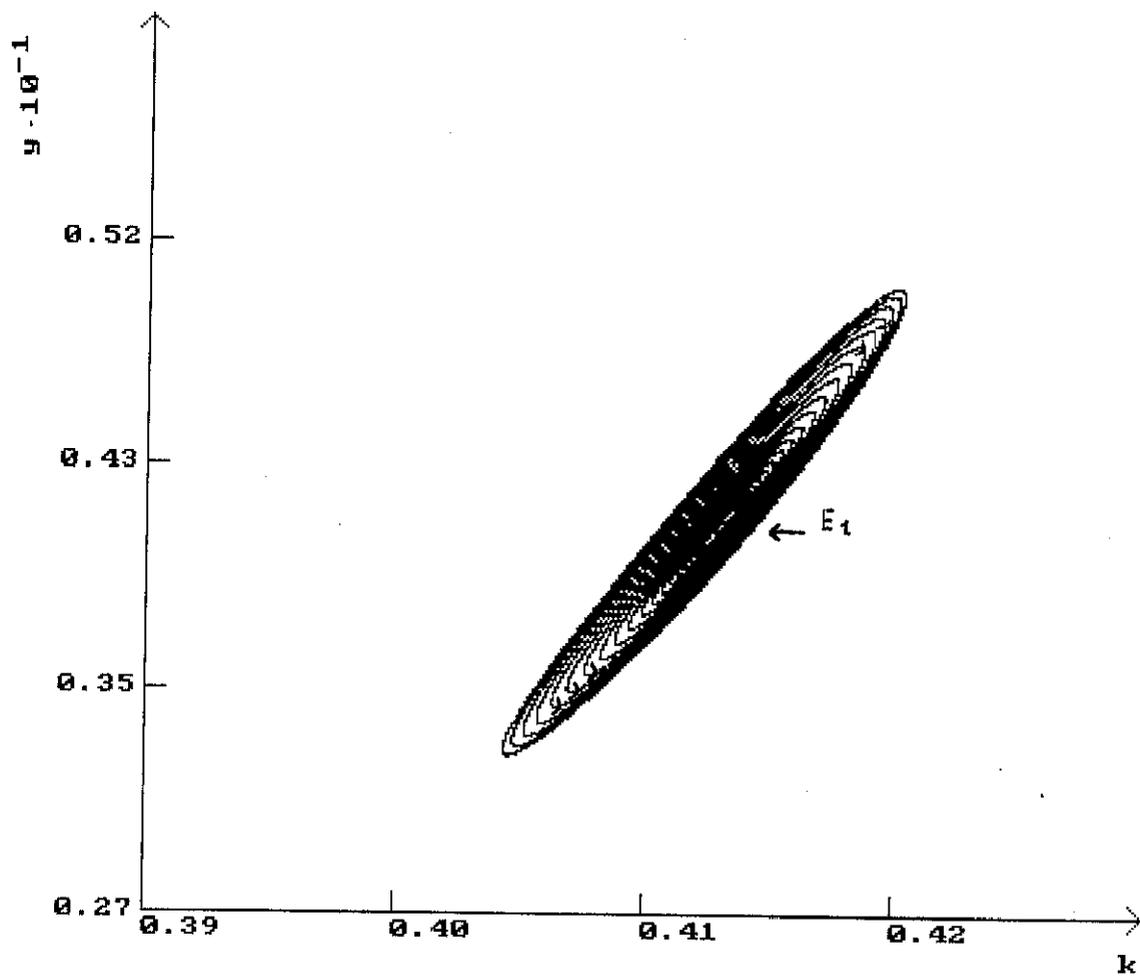


FIG. 3

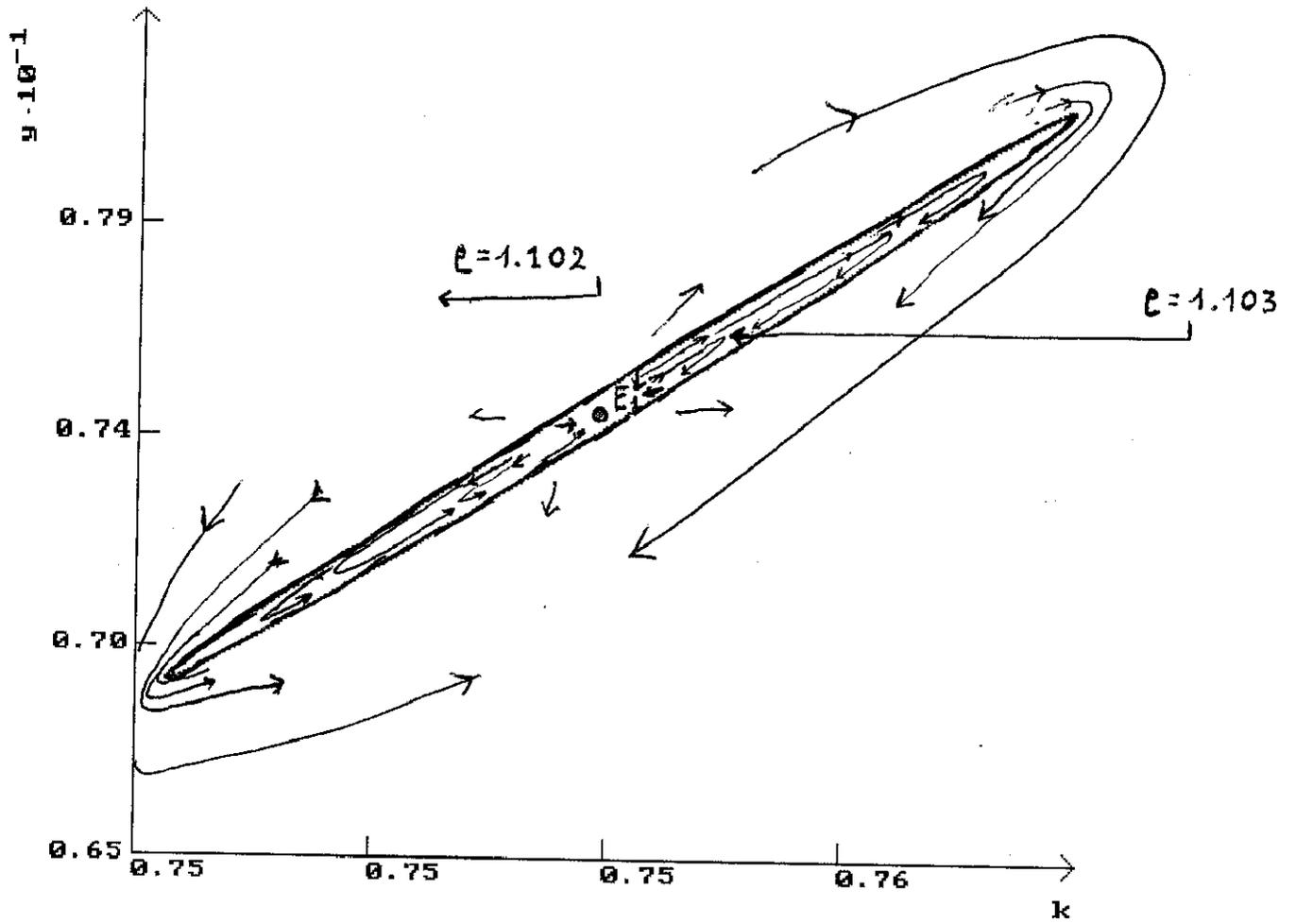


FIG. 4