Report n. 175

Modelli per formazione di coppie e modelli di Dinamica familiare

Piero Manfredi e Ernesto Salinelli

Pisa, Maggio 2000

Modelli per formazione di coppie e modelli di dinamica familiare

Piero Manfredi* e Ernesto Salinelli**

*Dipartimento di statistica e matematica applicata all'economia
Università di Pisa
Via Ridolfi 10, 56124 Pisa
email: manfredi@ec.unipi.it

**Dipartimento di Statistica e Matematica "Diego de Castro"
Università di Torino
Piazza Arbarello 8,-10122 Torino
email: salinelli@econ.unito.it

Modelli per formazione di coppie e modelli di dinamica familiare

Piero Manfredi - Ernesto Salinelli

Novembre 1996

Abstract

Dopo avere passato in rassegna alcuni modelli e risultati notevoli concernenti la dinamica nonlineare dei processi di formazione di coppie, si mostra come modelli di formazione di coppie possano essere utilizzati come punto di partenza per la costruzione di modelli di dinamica familiare. Si presenta come esempio un modello aggregato (senza struttura di età). Si propone anche in alternativa un modello ad un solo sesso, che per quanto molto più semplificato, e quindi meno ricco, rispetto al precedente, ha il pregio di seguire l'intero ciclo di espansione familiare con il massimo dettaglio.

1 Modelli di "pair formation": con e senza struttura d'età

I modelli di formazione di coppie hanno una lunga storia in demografia, avendo costituito il laboratorio in cui si è cercata una soluzione teorica al cosiddetto "problema dei due sessi" (two-sex problem). Il più semplice tipo di modello di formazione di coppie è espresso dal seguente sistema di equazioni differenziali utilizzato per la prima volta da Kendall (1949):

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -\mu_m M + (\mu_f + \sigma + \beta_m)W - R(M,F) \\ \dot{F} &= -\mu_f F + (\mu_m + \sigma + \beta_f)W - R(M,F) \\ \dot{W} &= -(\mu_m + \mu_f + \sigma)W + R(M,F) \end{aligned} \tag{1}$$

Nella (1) M,F,W sono funzioni del tempo che rappresentano rispettivamente i numeri di individui "single" (ossia: non viventi in unione con un individuo del sesso opposto) maschi M e femmine F ed il numero di coppie presenti nella popolazione. I parametri $\mu_m, \mu_f, \sigma, \beta_m, \beta_f$, tutti positivi per ipotesi e assunti per semplicità costanti, definiscono rispettivamente i tassi generici di mortalità maschili e femminili, il tasso di separazione delle coppie ed i tassi generici di natalità maschile e femminile. Infine la funzione R definisce il tasso istantaneo di formazione di coppie, ossia la funzione "aggregata" di nuzialità, FAN d'ora in poi.

Come noto i modelli con formazione di coppie, a differenza della teoria demografica standard, sono essenzialmente nonlineari a causa della presenza della funzione di nuzialità R, che, come riconosciuto più volte in letteratura, costituisce l'unica "autentica nonlinearità" del "sistema demografico" (Kendall 1949, Hadeler 1989). La più rilevante tra le proprietà di FAN, ormai sufficientemente chiarite sul piano teorico (Fredrickson 1971, McFarland 1972) è senz'altro l'omogeneità di primo grado (FDH), corrispondente al requisito intuitivo per cui aumenti nella stessa misura del numero di soggetti single dei due sessi presenti sul mercato matrimoniale dovrebbero generare un corrispondente aumento nel numero di matrimoni.

Le proprietà dinamiche del sistema con formazione di coppie (1) con funzione di formazione di coppie omogenea di primo grado sono state studiate in Pollard (1973) con riferimento alla sola esistenza di soluzioni di tipo esponenziale, e più in dettaglio in Samuelson-Yellin (1974). Recentemente risultati di tipo più generale per sistemi di tipo FDH sono stati sviluppati dal gruppo di Tubinga (Hadeler et al. 1988, Waldstaetter (1989), Hadeler and Ngoma 1990) con riferimento a sistemi demografico-epidemici. Hadeler et al. (1988) hanno in particolare mostrato come, finchè si rimane nell'ambito di sistemi a dimensione 3, come (1), i risultati tipicamente attesi dalla teoria demografica standard, ossia l'esistenza di un comportamento di lungo periodo di tipo esponenziale stabile (in questo caso ovviamente non rispetto alla struttura per età ma per "stato civile") sembrano rimanere veri in generale, indipendentemente dalla forma concreta della funzione di nuzialità. A partire dal sistema (1) vari risultati notevoli della teoria "classica" di popolazione sono stati estesi a modelli con formazione di coppie, tra cui la nozione di crescita logistica (Castillo-Chavez e Huang 1995).

Modelli per formazione di coppie con struttura d'età, pur mantenendo i medesimi ingredienti, sono di gran lunga più complessi.

La loro struttura standard (Fredrickson 1971, Hadeler 1989, Castillo-Chavez, Busenberg and Gerow 1991) consta di tre PDE di McKendrick-Von Foerster definenti rispettivamente l'evoluzione dovuta al processo di invecchiamento nel numero, o meglio, nella densità $m(a;t)$ di maschi singoli di età a, di femmine single di età a', ed infine di coppie $w(a, a', x; t)$ formate da partner di età a, a'. Una tipica formulazione riconoscente anche la "durata" specifica della vita di coppia è la seguente (Hadeler 1988):

$$
\begin{aligned}
\partial_{a,t} m(a,t) &= -\mu_m(a,t)\, m(a,t) - \int_{\mathbb{R}_+} \rho(a,a',t)\, da' + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[\sigma(a,a',x,t) + \mu_f(a',t)\right] W(a,a',x,t)\, da'dx \\
\partial_{a',t} f(a',t) &= -\mu_f(a',t)\, f(a',t) - \int_{\mathbb{R}_+} \rho(a,a',t)\, da + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[\sigma(a,a',x,t) + \mu_m(a,t)\right] W(a,a',x,t)\, dadx \\
\partial_{a,a',x,t} W(a,a',x,t) &= -\left[\mu_m(a,t) + \mu_f(a',t) + \sigma(a,a',x,t)\right] W(a,a',x,t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

In particolare:

$$
\partial_{x_1,\ldots,x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad\qquad \int_{\mathbb{R}_+^n} = \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{n \text{ times}}
$$

ove $\partial_{x_1,\ldots,x_n}$ definisce il classico "operatore di invecchiamento" di Ross-McKendrick-Von Foerster.

In analogia ai parametri precedentemente introdotti, nella (2) le funzion-idell'età μ_m e μ_f definiscono rispettivamente i tassi specifici di mortalità per età maschili e femminili, σ è il tasso specifico di dissoluzione delle unioni, ρ la funzione di nuzialità tipica delle età (a,a') e così via.

Le equazioni (2) sono ovviamente da completarsi con opportune condizioni al bordo, attraverso le quali si introducono i processi di natalità e formazione di coppie. La tipica forma di tali condizioni è:

$$
\begin{aligned}
&m(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \beta^m(a,a',x,t)\, W(a,a',x,t)\, dada'dx \\
&f(0,t) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \beta^f(a,a',x,t)\, W(a,a',x,t)\, dada'dx \\
&W(a,0,x,t) = 0 \\
&W(0,a',x,t) = 0 \\
&W(a,a',0,t) = \rho(a,a',t)
\end{aligned}
$$

Il problema può essere "chiuso" attraverso la prescrizione di distribuzioni per età iniziali:

$$
\begin{aligned}
&m(a,0) = m_0(a) \\
&f(a',0) = f_0(a') \\
&W(a,a',x,0) = W_0(a,a',x)
\end{aligned}
$$

La più rilevante novità esibita dall'introduzione della struttura di età è ovviamente la comparsa di complessi problemi di consistenza, legati ai cosiddetti "marriage restraint" (Karmel 1948, McFarland 1972, Keilman 1985), che di fatto hanno costituito il maggiore ostacolo allo sviluppo di una compiuta teoria stabile "a due sessi", per la difficoltà di garantire la costanza nel tempo dei "parametri del mercato matrimoniale". E infatti, anche se il significato dei problemi di consistenza è ben chiaro, a tutt'oggi mancano risultati generali per l'effetto dei "marriage restraint" sulla dinamica di popolazioni sessuate.

Risultati per il modello generale con struttura d'età sono relativamente recenti. Hadeler (1989) ha studiato vari casi speciali, tra cui il ruolo della cosiddetta funzione armonica generalizzata come legge di nuzialità per età. Castillo Chavez et al. 1991 hanno introdotto il problema nello schema generale della loro"teoria dell'interazione" ("Mixing theory") che rende particolarmente evidente il ruolo dei problemi di consistenza. Inaba (1993) e Prüss e Schappacher (1994) hanno studiato le condizioni sotto le quali il problema genera delle soluzioni stabili alla Lotka. Recentemente Castillo-Chavez et al. (1996) hanno esteso il loro notevole teorema "It takes two to tango" a processi di formazione di coppie con struttura d'età.

2 Motivazioni e ipotesi per modelli di dinamica familiare

La complessità del processo di rinnovo familiare è tale che molta parte dei risultati oggi disponibili sono essenzialmente dovuti a simulazione (per es. vedi Bongaarts et al. 1987 e riferimenti, Van Imhoff et al. 1995). D'altra parte le motivazioni alla ricerca di risultati anche teorici relativi alla dinamica familiare sono numerose. Due settori in cui sviluppi teorici in questa direzione potrebbero risultare particolarmente utili sono per esempio la dinamica delle migrazioni, in cui sovente l'attore essenziale è la famiglia (e non necessariamente il singolo individuo, come negli approcci tradizionali), e i processi di trasmissione di malattie infettive, in cui di nuovo la struttura per famiglie prevalente nella popolazione può svolgere un ruolo essenziale nella dinamica di trasmissione (Grenfell 1996).

In un lavoro preliminare (Manfredi e Salinelli 1996), ci siamo concentrati sulla costruzione di modelli generali per famiglie aventi come background il processo di formazione di coppie. La nozione di famiglia utilizzata è stata quella di *famiglia nucleare* , coppia sposata più il carico di figli non sposati vivente nel medesimo "household" (Bongaarts 1983), insieme a quella di *one-person family*. Queste due nozioni appaiono quelle più agevolmente agganciabili all'apparato teorico dei modelli a due sessi. In particolare abbiamo considerato solo famiglie "bigenerazionali" (che comunque costituiscono tuttora un rilevante "pattern" fattuale), alla luce del fatto che la famiglia bigenerazionale è nozione che discende quasi automaticamente da quella di famiglia nucleare. Per semplicità non abbiamo introdotto la possibilità di famiglie di fatto, concentrandoci sulla pura meccanica del processo di costituzione/dissoluzione delle famiglie, indipendentemente dalla loro "-formalizzazione legale". Vista la notevole complessità del processo di rinnovo familiare abbiamo scelto, come ipotesi di lavoro iniziale, di semplificare drasticamente l'insieme delle possibili tipologie familiari, concentrandoci sull'ipotesi "italiana" di *famiglie con unico figlio* (in cui cioè ogni unione può generare al massimo un figlio). Questa assunzione, oltre ad essere pienamente giustificabile sul piano empirico, costituisce un ragionevole compromesso nel mantenimento di sufficiente generalità da un lato e una minima "trattabilità" dall'altro. Si noti che anche dal punto di vista dinamico l'assunzione non è affatto banale come può sembrare a prima vista: il destino di lungo periodo della popolazione non è necessariamente l'estinzione finchè nella popolazione esiste un alto tasso di scioglimento/formazione di nuove coppie.

Sotto queste ipotesi il numero di possibili tipi familiari distintiè di nove:

a) maschi e femmine single: 2 nuclei: M ed F

b) coppie sposate senza figli W_2

c) coppie sposate con figlio/a: 2 nuclei W_{21} e W_{20}, ove il primo indice afferisce alla presenza dei genitori ed il secondo del figlio/a, secondo la convenzione di indicare con 1 la presenza di un individuo di sesso maschile e con 0 la presenza di un individuo di sesso femminili

d)un genitore con figlio/a: W_{11},W_{10},W_{01},W_{00}.

Dal punto di vista modellistico la nostra rappresentazione aggiunge esplicitamente la possibilità di uscita dalla famiglia (attraverso introduzione di opportuni *tassi di uscita dalla famiglia*) da parte di individui giovani per motivi diversi dal matrimonio, un fenomeno che ha assunto sempre più rilevanza nelle moderne demografie occidentali (Ongaro 1990, Goldsheider and Waite 1987).

3 Un esempio di modello aggregato "totally blind" per famiglie piccole

Il modello di formazione di coppie offre, come abbiamo osservato in precedenza, una prima strada possibile per la costruzione di modelli "microscopici" della dinamica familiare aventi come obiettivo lo studio dei meccanismi di formazione delle "strutture per famiglie". La strada è ovviamente quella della segmentazione del comparto delle coppie in base al numero di figli (0,1,2,...; in realtà nel seguito, in virtù della nostra ipotesi al massimo 1), e dei comparti dei singoli separando i singoli che vivono effettivamente da soli da quelli che vivono in famiglia in quanto figli o in quanto genitori.

Un modello aggregato a tempo continuo e riconoscente la struttura per famiglie ma non (per semplicità) la struttura d'età, è il seguente, costituito da 9 equazioni differenziali, una per ogni possibile nucleo familiare del nostro mondo "a famiglie piccole":

$$\begin{array}{ll}\dot{W}_2 & = -\Lambda_2 W_2 + \left(\mu^f + v_{20}\right) W_{20} + \left(\mu^m + v_{21}\right) W_{21} + \sum\limits_{j\in J_2} R_j \\ \dot{W}_{21} & = -\Lambda_{21} W_{21} + \beta^m W_2 + \sum_{j\in J'_{21}} R_j - \sum_{j\in J_{21}} R_j \\ \dot{W}_{20} & = -\Lambda_{20} W_{20} + \beta^f W_2 + \sum_{j\in J'_{21}} R_j - \sum_{j\in J_{20}} R_j \\ \dot{W}_{11} & = -\Lambda_{11} W_{11} + \left[\mu^f + \sigma^f_{21}\right] W_{21} - \sum_{j\in J_{11}} R_j \\ \dot{W}_{10} & = -\Lambda_{10} W_{10} + \left[\mu^f + \sigma^f_{20}\right] W_{20} - \sum_{j\in J_{10}} R_j \\ \dot{W}_{01} & = -\Lambda_{01} W_{01} + \left[\mu^m + \sigma^m_{21}\right] W_{21} - \sum_{j\in J_{01}} R_j \\ \dot{W}_{00} & = -\Lambda_{00} W_{00} + \left[\mu^m + \sigma^m_{20}\right] W_{20} - \sum_{j\in J_{00}} R_j \\ \dot{M} & = -\mu^m M - \sum_{j\in J_m} R_j + I_M \\ \dot{F} & = -\mu^f F - \sum_{j\in J_f} R_j + I_F \end{array} \tag{3}$$

In particolare:

a) le quantità Λ definiscono i termini di uscita da ogni compartimento familiare per motivi diversi dal matrimonio:

$$\begin{array}{l}\Lambda_2 = \mu^m + \mu^f + \sigma_2 + \beta^m + \beta^f \\ \Lambda_{21} = 2\mu^m + \mu^f + \sigma_{21} + v_{21} \\ \Lambda_{20} = 2\mu^f + \mu^m + \sigma_{20} + v_{20} \\ \Lambda_{11} = 2\mu^m + v_{11} \\ \Lambda_{10} = \mu^m + \mu^f + v_{10} \\ \Lambda_{01} = \mu^m + \mu^f + v_{01} \\ \Lambda_{00} = 2\mu^f + v_{00}\end{array}$$

e contengono rispetto al modello di base per formazione di coppie anche i menzionati tassi di uscita dalla famiglia v_{ij} ed i tassi di separazione σ in base alla tipologia familiare cui sono applicati.

b)I termini I_M,I_F costituiscono i termini di ingresso nei comparti dei singoli:

$$
\begin{aligned}
I_M &= 2\left[\mu^m + v_{11}\right] W_{11} + \left[\mu^f + v_{01}\right] W_{01} + \left[\mu^f + v_{10}\right] W_{10} + \\
&+ \left[v_{21} + \sigma_{21}^m\right] W_{21} + \left[\sigma_2 + \mu^f\right] W_2 + \sigma_{20}^m W_{20} \\
I_F &= \left[\mu^m + v_{01}\right] W_{01} + 2\left[\mu^f + v_{00}\right] W_{00} + \left[\mu^m + v_{10}\right] W_{10} + \\
&+ \left[v_{20} + \sigma_{20}^f\right] W_{20} + \left[\sigma_2 + \mu^m\right] W_2 + \sigma_{21}^m W_{21}
\end{aligned} \tag{4}
$$

c) La struttura degli ingressi/uscite $\sum R_j$ per matrimonio nei vari compartimenti del modello è particolarmente complicata alla luce del fatto che un soggetto che vive in una famiglia di un certo tipo ed è "single" può scegliere il suo partner in molti modi; per esempio, un maschio single potrebbe sposarsi con una femmina: a)single, b)figlia vivente, in famiglia, c)madre separata vivente in famiglia. Gli insiemi di indici indicati nelle varie equazioni catturano questo aspetto particolarmente complesso. Va notato che in compenso l'assunzione di famiglie con un solo figlio consente una rappresentazione particolarmente delle funzioni di nuzialità. Inoltre, operando in aggregato non compaiono rilevanti problemi di consistenza.

La lettura delle varie equazioni del sistema (3) è comunque semplice: per esempio, la prima equazione del modello ci dice che al passare del tempo il numero di famiglie senza figli varierà causa nuovi ingressi per matrimoni $\sum R_j$ oppure per morte o uscita del figlio da una famiglia più numerosa, oppure in virtù delle uscite per morte di uno dei componenti della famiglia, separazione, nascita di un figlio con passaggio alla categoria delle famiglie più ampie.

Formulazioni come la precedente possono chiaramente essere estese introdurre variabili di tipo strutturale (Manfredi-Salinelli 1996) o per considerare famiglie di tipo più grande (al prezzo ovviamente di una considerevole proliferazione nel numero di equazioni e parametri). Una delle caratteristiche dei modelli per formazione di coppie che si riversa immediatamente anche nelle loro estensioni familiari è la assenza di trasparenza circa gli stadi di vita degli individui: la categoria dei singoli è in realtà una categoria molto eterogenea di individui con possibili esperienze passate di storia "demografica" molto differenti (ad esempio un singolo al tempo t può essere tale a seguito di abbandono della famiglia senza mai avere contratto matrimonio oppure può esserlo come esito di una lunga storia di matrimoni e separazioni). Nel paragrafo seguente cerchiamo di riguardare il problema in un ottica più trasparente almeno per quanto riguarda le fasi del ciclo di vita delle famiglie.

L'analisi di modelli come (3), e questo vale a maggior ragione nel caso delle loro estensioni, è particolarmente complessa. Vi sono comunque delle assunzioni che consentono di rendere il sistema moderatamente trattabile, consentendogli quindi di offrire dei risultati anche concettualmente rilevanti (oltre ad offrire tutta una serie di indicazioni su parametri potenzialmente rilevanti e chiavi di lettura più ricchedel processo di formazione delle famiglie). Ad esempio in una serie di sottocasi demograficamente rilevanti è possibile verificare l'esistenza di stati asintotici stabili sotto la classica assunzione di dominanza nuziale di uno dei due sessi (Keyfitz 1968), che consente di linearizzare il problema.

4 Modelli totalmente visibili

Il precedente modello è, come abbiamo detto, "cieco": non riesce a seguire in dettaglio i vari passaggi individuali nel corso del "ciclo di vita familiare". In secondo luogo quando si considerano famiglie di dimensione qualunque "esplode in complessità". Proponiamo ora, a titolo di approccio graduale al problema, un modello one-sex per sole linee femminili, in cui per semplicità consideriamo la possibilità di separazione ma non quella di rimatrimonio, con il quale seguiamo con estremo dettaglio il processo di espansione familiare tipico del ciclo vitale: in questo modo riusciamo a trattare in modo semplice anche il caso generale di strutture familiari con un numero qualunque di figli. Questo approccio è chiaramente molto semplificato rispetto a quello delineato nelle pagine precedenti, soprattutto "evita" l'unico problema realmente complesso del processo di popolazione, ossia i meccanismi di formazione delle famiglie, ma ha il pregio di garantire dei risultati semplici da usare come utile punto di partenza

Per rendere il problema al massimo grado trasparente facciamo l'ipotesi semplificatrice per cui gli individui che "mettono su famiglia" lo facciano passando per uno stato intermedio "esterno alla famiglia" (per esempio corrispondente allo stato di single oppure ad una situazione di indipendenza economica come suggerito in Billari 1996). In questo modo ogni individuo che entra nella nostra popolazione sperimenta una sequenza (potenziale) di stadi di vita perfettamente sequenziali che sono: a) la adolescenza (in famiglia), b) single, c)sposata con 0,1,2...,k figli, e)separata. Indicando con X(t) il numero di soggetti single e con $W_i(t)$ (i=0,1,2,...,k) il numero di famiglie dei vari ordini di figli presenti nella popolazione al tempo t, abbiamo il seguente modello, con funzioni di nuzialità lineari grazie all'assunzione di un solo sesso (ed in cui abbiamo trascurato i compartimenti dei "separati", in quanto avendo assunto assenza di rimatrimonio, non possono comunque più contribuire al processo di riproduzione della popolazione):

$$\dot{X} = v \sum_j j W_j - (\mu + \lambda) X$$

$$
\begin{aligned}
\dot{W}_0 &= \lambda X - (\mu^M + \sigma + \beta_0)W_0 + \mu^f W_1 \\
\dot{W}_1 &= \beta_0 W_0 - (\mu^M + \mu^f + \sigma + \beta_1 + v)W_1 + 2\mu^f W_2 \\
\dot{W}_2 &= \beta_1 W_1 - (\mu^M + 2\mu^f + \sigma + \beta_2 + 2v)W_2 + 3\mu^f W_3 \\
\ldots \\
\dot{W}_k &= \beta_{k-1} W_{k-1} - (\mu^M + k\mu^f + \sigma + kv)W_k
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Nell'ultimo sistema il significato dei parametri demografici è largamente coincidente con quelli introdotti in precedenza, con l'eccezione di λ, che definisce il tasso di nuzialità femminile, e dei β_i, tassi di fecondità relativi ai vari ordini di nascita. Abbiamo introdotto ovviamente una serie di ulteriori assunzioni semplificatrici e cioè i tassi di uscita dei figli dalla famiglia dipendano linearmente dal numero di figli presenti. Inoltre abbiamo escluso parti multipli, che avanzerebbero una famiglia di vari passi in una volta sola, cosi come abbiamo assunto che il processo di contrazione familiare avvenga sostanzialmente attraverso perdita di un componente per volta (un fatto assolutamente naturale a tempo continuo).

Come si riconosce facilmente grazie all'assunzione "one-sex" il problema è formulato in termini lineari e quindi annotabile in forma compatta come:

$$\dot{W}(t) = FW(t)$$

In particolare l'operatore familiare F ha forma:

$$
\begin{pmatrix}
f_{11} & 0 & v & 2v & \ldots & jv & \ldots & kv \\
\lambda & f_{22} & \mu^f & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \beta_0 & f_{33} & 2\mu^f & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & 0 & .. & .. & .. & 0 & .. & 0 \\
0 & 0 & 0 & \beta_{i-1} & f_{ii} & (i+1)\mu^f & & \\
.. & .. & & & & & & \\
0 & .. & .. & .. & .. & 0 & \beta_{k-1} & f_{k+2,k+2}
\end{pmatrix}
$$

in cui sono diversi da zero solo gli elementi della prima riga e quelli della diagonale principale e delle sue sub e sottodiagonali. In particolare:

$$
\begin{aligned}
&f_{11} = -(\mu + \lambda) \\
&f_{22} = -(\mu^M + \sigma + \beta_0) \\
&f_{33} = -(\mu^M + \mu^f + \sigma + \beta_1 + v) \\
&\ldots \\
&f_{k+2,k+2} = -(\mu^M + k\mu^f + \sigma + kv)
\end{aligned}
$$

in cui riconosciamo facilmente una matrice di Metzler. Come noto le matrici di Metzler svolgono a tempo continuo un ruolo analogo a quello giocato dalle matrici non negative a tempo discreto: un risultato che conferma una volta di più la sostanziale unità "formale" del sistema demografico.. Questo permette di dimostare per il sistema "familiare" l'esistenza di un unico autovalore dominante (con funzione di soglia) e quindi di uno stato asintotico stabile caratterizzato da una struttura limite per famiglie della popolazione che è costante nel tempo.

Osserviamo infine che i risultati di questo ultimo modello sono facilmente estendibili al caso strutturato per età.

References

[1] Bertino S.-Pinnelli A.-Vichi M. (1988) Two models for micro simulation of family life cycle and family structure, *Genus* **44**, 1-23

[2] Billari F. (1996), Personal communication

[3] Bongaarts J. (1983) The formal demography of families and households: an overview, *IUSSP Newsletter*, 17, 27-42

[4] Bongaarts J.-Burch T.K.-Wachter K.W. (eds.) (1987) *Family Demography*, Clarendon Press, Oxford

[5] Burch T.K. (1995) Theories of household formation: progresses and challenges, Van Imhoff E.-Kuijsten A.-Hooimeijer P.-Van Wissen L. (eds.), *Household Demography and Household Modeling*, Plenum Press, New York

[6] Castillo-Chavez C.- Busenberg S.- Gerow K. (1991) Pair formation in structured populations, in Kappel F.-Schappacher W. (eds.), Differential equations with applications in Biology, Physics, Engineering, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 133, Marcel Dekker

[7] Castillo Chavez C., Huang W. (1995), The logistic equation revisited: the two-sex case, *Math. Biosci.*

[8] Dietz K. - Hadeler K.P. (1988) Epidemiological models for sexually transmitted diseases, *J. Math. Biol.* **26**, 1-25

[9] Feichtinger G. (1987) The statistical measurement of the family life cycle, in Bongaarts J.-Burch T.K.-Wachter K.W. (eds.) *Family Demography*, Clarendon Press, Oxford, 81-102

[10] Fredrickson A.G. (1971) A Mathematical Theory of Age Structure in Sexual Populations: Random Mating and Monogamous Marriage Models, *Mathematical Biosciences* **10**, 117-143

[11] Grenfell B. (1994), "Chilhood infectious diseases", private communications

[12] Goldscheider F.-Waite L. (1987) Nest-leaving patterns and the transition to marriage for young men and women, *J. Marr. Fam.* **49**

[13] Hadeler K.P. (1989) Pair Formation in Age-Structured Populations, *Acta Applicandae Mathematicae* **14**, 91-102

[14] Hadeler K.P. - Waldstätter R. - Wörz-Busekros A. (1988) Models for pair formation in bisexual populations, *J. Math. Biol.* **26**, 635-649

[15] Höhn C. (1987) The family life cycle: needed extensions of the concept, in Bongaarts J.-Burch T.K.-Wachter K.W. (eds.) *Family Demography*, Clarendon Press, Oxford, 65-80

[16] Hsu Schmitz S.F.-Busenberg S.-Castillo Chavez C. (1994) Two-sex marriage functions for risk and age structured populations: the T^3 theorem revisited, *manuscript*

[17] Inaba H. (1993) An Age-Structured Two-Sex Model for Human Population Reproduction by First Marriage, Institute of Population Problems, Working Paper n.15

[18] Keilman N. (1985) The two-sex problem in national population forecasts, *Eur. J. Pop.* **1**,

[19] Keilman N.-Keyfitz N. (1988) Recurrent issues in dynamic household modelling, in Keilman N.-Kuijsten A.-Vossen A. (eds.) Modelling household formation and dissolution, Clarendon Press, Oxford

[20] Kendall D.G. (1949), Stochastic Processes and Population Growth, J.Royal Stat. Society, Ser. B, 230-264

[21] Keyfitz N. (1987) Form and substance in family demography, in Bongaarts J.-Burch T.K.-Wachter K.W. (eds.) *Family Demography*, Clarendon Press, Oxford, 3-16

[22] Manfredi P., Salinelli E. (1996), Toward the development of general age structure theory for family dynamics, preprint

[23] McFarland D.D. (1972) Comparison of alternative marriage models, in Greville T.N.E. (ed.), Population Dynamics, Academic Press, New York, 89-106

[24] Ongaro F. (1990) L'uscita dei figli dalla famiglia di origine, *Atti XXXV Riunione della Società Italiana di Statistica*, Padova

[25] Prüss J. - Schappacher W. (1994) Persistent age-distributions for a pair-formation model, *J. Math. Biol.* **33**, 17-33

[26] Van Imhoff E.-Kuijsten A.-Hooimeijer P.-Van Wissen L. (eds.) (1995) *Household Demography and Household Modeling*, Plenum Press, New York

[27] Waldstaetter R. (1989) in Castillo Chavez C. (ed.), Mathematical and Statistical Approaches to AIDS epidemics, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 83, Springer-Verlag