



Università degli Studi di Pisa
Dipartimento di Statistica e Matematica
Applicata all'Economia

Report n. 254

**Rilevanza delle analisi di misture di distribuzioni
nelle valutazioni di efficacia**

Andrea Mercatanti

Pisa, Ottobre 2004

- Stampato in Proprio -

Rilevanza delle analisi di misture di distribuzioni nelle valutazioni di efficacia

Andrea Mercatanti

Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia

Università di Pisa

mercatan@ec.unipi.it

Riassunto. Alcune problematiche metodologiche relative all'indebolimento delle usuali condizioni di applicabilità dei metodi di inferenza causale riguardano l'analisi di misture di distribuzioni. In particolare il presente contributo intende prendere in considerazione la questione dell'eliminazione dei vincoli di esclusione nell'utilizzo di variabili strumentali ai fini della valutazione di efficacia di una variabile di tipo binario sotto l'ipotesi che la variabile di risposta sia distribuita secondo una normale. Rispetto alle usuali analisi su misture di distribuzioni si evidenzia un maggiore contenuto informativo riguardo alle probabilità di appartenenza ai gruppi componenti le misture. Di converso emergono però maggiori difficoltà inferenziali connesse alla plurimodalità della funzione di verosimiglianza prodotta dalla presenza di più misture con componenti comuni. Il contributo prende inoltre in considerazione una procedura di massimizzazione vincolata della verosimiglianza che sfrutti le maggiori informazioni relative alle probabilità di appartenenza ai gruppi, al fine di risolvere i problemi legati alla plurimodalità della funzione di verosimiglianza.

Parole chiave: misture di distribuzioni normali, variabili strumentali, vincolo di esclusione.

1. Introduzione

L'importanza delle applicazioni di inferenza causale alle problematiche della valutazione di efficacia è ormai consolidata, e spazia dall'utilizzazione delle variabili strumentali e dei propensity score alle stratificazioni principali solo per citare alcune metodologie di largo uso. Nelle analisi riguardanti la valutazione delle transizioni Università-lavoro i suddetti metodi possono trovare applicazione ad esempio nella valutazione dell'effetto del conseguimento di una laurea su di un outcome post-laurea quale ad esempio il tempo di disoccupazione, il reddito, la soddisfazione professionale, o la congruenza tra le materie di studio e le competenze necessarie alla professione svolta.

Da un punto di vista più strettamente metodologico si può mettere in evidenza che alcune problematiche relative all'indebolimento delle condizioni di applicabilità dei modelli causali riguardano l'analisi delle misture di distribuzioni. In particolare questo concerne la rimozione del cosiddetto vincolo di esclusione nell'uso delle variabili strumentali a fini causali. Nella loro applicazione più semplice le variabili strumentali possono essere introdotte per la valutazione dell'efficacia di una certa variabile binaria su di un outcome di qualsiasi tipo (Imbens e Angrist, 1994). Tra le condizioni necessarie all'identificazione di effetti causali con l'ausilio di variabili strumentali una delle più problematiche e difficili da soddisfare è il vincolo di esclusione in base al quale la variabile strumentale non può avere effetti diretti sull'outcome di interesse.

La problematica sorge ad esempio nella valutazione dell'effetto scolarizzazione sul reddito mediante l'uso di variabili strumentali legate alla coorte di nascita. In questi casi (Card e Lemieux, 2001) la teoria microeconomica suggerisce, in base a modelli con imperfetta sostituibilità tra individui con scolarizzazione simile, che l'effetto della scuola sul reddito riflette anche variazioni nell'offerta relativa di individui con scolarizzazione simile tra le varie coorti di nascita. Ecco presentarsi quindi una critica microeconomica all'uso di variabili strumentali legate alla coorte di nascita nella valutazione del *return to schooling*. La suddetta motivazione si basa sul concetto di equilibrio economico generale e inficia la soddisfazione del vincolo di esclusione poiché la coorte di nascita ragionevolmente agisce sul reddito oltre che in base al trend storico della scolarizzazione anche in base a questioni di mercato legate alla numerosità delle coorti. In altre parole si può ragionevolmente ipotizzare che in questo caso esista un effetto diretto della variabile strumentale sull'outcome.

Il presente contributo, di tipo più strettamente metodologico, si basa su di una impostazione parametrica dell'analisi causale con variabili strumentali, ossia su di una formulazione della funzione di verosimiglianza per un esperimento randomizzato con non-compliance che mette in particolare evidenza la presenza di misture di distribuzioni. Sulla base di una proposta di massimizzazione vincolata della verosimiglianza viene svolta un'analisi di tipo simulativo finalizzata ad un primo giudizio sulla bontà e sui limiti della proposta stessa.

2. Proposta di analisi vincolata della funzione di verosimiglianza

Già a partire dal contributo di Imbens e Rubin (1997) si è data una formalizzazione di tipo parametrico al modello di regressione lineare semplice con variabili strumentali per l'identificazione e la stima di effetti causali nel caso di variabile trattamento binaria. Il punto di vista filosofico causale preso in considerazione dagli autori

nell'esplicitazione della funzione di verosimiglianza è quello basato sull'idea di controfattualità ed a questo vogliamo continuare ad attenerci nel presente lavoro. Di conseguenza occorre ricordare che la popolazione complessiva si può dividere in quattro gruppi, denominati *compliance status*, ognuno dei quali si caratterizza per come gli individui reagiscono dal punto di vista controfattuale all'assegnazione al trattamento¹. Al fine della rimozione completa del vincolo di esclusione e partendo dalla funzione di verosimiglianza proposta dai suddetti autori, si può arrivare mediante opportune riparametrizzazioni (Mercatanti, 2004) alla scrittura della stessa in una forma che ne permetta la massimizzazione vincolata ad un opportuno sottospazio parametrico. Questo risulta individuabile senza far ricorso ad informazioni aggiuntive rispetto alle ipotesi necessarie all'identificazione di effetti causali mediante variabili strumentali, a parte l'ipotizzata forma funzionale per la distribuzione dell'outcome essendo in ambito parametrico.

In estrema sintesi si intende far riferimento alla seguente funzione di verosimiglianza²:

$$\begin{aligned}
 L(\theta) = & \prod_{i \in (D_i=1, Z_i=0)} \omega_{a0} \cdot N(y_i | \mu_{a0}, \sigma_{a0}) \times \prod_{i \in (D_i=0, Z_i=1)} \omega_{n1} \cdot N(y_i | \mu_{n1}, \sigma_{n1}) \\
 & \times \prod_{i \in (D_i=1, Z_i=1)} [\omega_{a1} \cdot N(y_i | \mu_{a1}, \sigma_{a1}) + \omega_{c1} \cdot N(y_i | \mu_{c1}, \sigma_{c1})] \\
 & \times \prod_{i \in (D_i=0, Z_i=0)} [\omega_{n0} \cdot N(y_i | \mu_{n0}, \sigma_{n0}) + \omega_{c0} \cdot N(y_i | \mu_{c0}, \sigma_{c0})], \quad (1)
 \end{aligned}$$

dove si è indicato: con ω_{tz} la probabilità di appartenenza al gruppo di individui nel compliance status $t=a$ (*always-takers*), n (*never-takers*), c (*compliers*) e con assegnazione al trattamento $Z_i = z$; con y_i l'outcome a livello individuale; con μ_{tz} e σ_{tz} rispettivamente la media e lo standard error per il gruppo di individui nel compliance status t e con assegnazione al trattamento $Z_i = z$.

La presenza nella (1) di due misture di distribuzioni normali comporta problematiche di tipo analitico e computazionale nell'esecuzione di un'analisi MLE. Le misture di distribuzioni normali assumono infatti caratteristiche analitiche che le rendono di non facile analisi. I principali elementi perturbativi in un'analisi MLE della (1) possono essere sintetizzati nei seguenti tre punti:

¹ Si parla infatti di *always-takers* per indicare il gruppo di individui che assumono sempre il trattamento (indipendentemente dall'assegnazione); di *never-takers* per indicare gli individui che non assumono mai il trattamento (anch'essi indipendentemente dall'assegnazione); di *compliers* per gli individui che assumono il trattamento in base a quanto assegnatoli; e di *defiers* per gli individui che assumono il trattamento in maniera opposta all'assegnazione.

² Le ipotesi in base alle quali vale la descritta funzione di verosimiglianza sono le seguenti: distribuzione normale per l'outcome; *Stable Unit Treatment Value Assumption* in base alla quale per ogni individuo i comportamenti controfattuali non dipendono dal trattamento degli altri individui; identica probabilità di assegnazione al trattamento per ogni individuo; inesistenza di defiers.

- la (1) non è limitata sopra (Day, 1969) quindi in generale l'analisi MLE è mal posta poiché non esiste un massimizzatore assoluto; è stato però dimostrato che esiste un massimizzatore locale consistente, efficiente e asintoticamente normale (Kiefer, 1978) sul quale può quindi essere dirottata la ricerca;
- la (1) è multimodale;
- la massimizzazione locale della (1) produce massimi *spuri*, ossia punti di massimo locale tipicamente in corrispondenza di raggruppamenti di poche unità anomale; questi punti possono tuttavia essere facilmente individuati poiché presentano una componente di varianza prossima allo zero.

Numerose proposte sono state avanzate in letteratura per l'analisi MLE di miscele. Tra quelle che appaiono particolarmente convincenti si può citare un approccio di tipo generale (Priebe, 1994), ossia la conduzione di una serie di massimizazioni non vincolate seguite da un'analisi dei punti di massimo locali al fine di individuare e scartare quelli spuri. Successivamente la stima ML del vettore parametrico può essere considerata quella corrispondente al massimo tra i rimanenti punti. La proposta appare semplice e non introduce informazioni extra nell'analisi, anche se una ricerca sufficientemente esauriente dei punti di massimo locale si può rilevare particolarmente dispendiosa in termini di tempo di calcolo.

Oltre alle problematiche caratteristiche delle analisi di miscele, l'analisi della (1) comporta delle complicazioni aggiuntive dovute al cosiddetto *label switching*, inconveniente dovuto ad eventuali permutazioni per alcune variabili indicatrici l'appartenenza ai gruppi componenti le miscele (etichette). La problematica del label switching concerne l'identificabilità delle miscele di distribuzioni. È risaputo infatti (Hjort, 1986) che in una miscela di distribuzioni appartenenti alla stessa famiglia parametrica, $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^g \omega_j f_j(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_j)$, il vettore parametrico $\boldsymbol{\theta}$ non è identificato; viene invece identificata una classe di distribuzioni in quanto $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ è invariante alle

$g!$ permutazioni nelle etichette delle componenti in $\boldsymbol{\theta}$. Il label switching sebbene non sia un problema rilevante nella stima MLE di una miscela di distribuzioni appartenenti alla stessa famiglia parametrica a fini di cluster analysis, lo diventa però in un'analisi MLE della (1). Occorre infatti considerare che gli effetti causali in un'ottica controfattuale sono definiti dalle tre differenze $\Delta_t = (\mu_{t1} - \mu_{t0})$ con $t=a, n, c$, di conseguenza l'identificazione degli effetti causali necessita dell'esatta etichettatura di tutte le componenti. Una diversa strategia di analisi della funzione di verosimiglianza (1) viene suggerita dalla considerazione che, senza l'aggiunta di ulteriori ipotesi, esiste la possibilità di stimare facilmente le probabilità di appartenenza ai gruppi componenti le miscele anche al di fuori di un contesto di massima verosimiglianza. Questi elementi informativi possono essere sfruttati nella stima di massima verosimi-

glianza del vettore parametrico, vincolando la ricerca ad opportuni sottospazi parametrici.

Sotto le ipotesi che hanno portato alla scrittura della (1) è infatti possibile stimare (Mercatanti, 2004) le probabilità ω_{iz} , caratterizzanti le due misture, con le quantità $\hat{\phi}_{iz}$:

$$\hat{\phi}_{a1} = [\#(D_i = 1, Z_i = 0) / \#(Z_i = 0)] - [\#(D_i = 1, Z_i = 0) \cdot N^{-1}],$$

$$\hat{\phi}_{n0} = [\#(D_i = 0, Z_i = 1) / \#(Z_i = 1)] - [\#(D_i = 0, Z_i = 1) \cdot N^{-1}],$$

$$\hat{\phi}_{c0} = [\#(D_i = 0, Z_i = 0) \cdot N^{-1}] - \hat{\phi}_{n0},$$

$$\hat{\phi}_{c1} = [\#(D_i = 1, Z_i = 1) \cdot N^{-1}] - \hat{\phi}_{a1}.$$

Al fine di sfruttare al massimo le informazioni disponibili risulta allora proponibile la massimizzazione della (1) vincolata ad un intorno del punto $(\hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$, ossia la ricerca del punto di massimo $\hat{\theta}$ soddisfacente le condizioni:

$$|\hat{\phi}_{a1} - \hat{\omega}_{a1}| < c, \quad |\hat{\phi}_{n0} - \hat{\omega}_{n0}| < c, \quad |\hat{\phi}_{c1} - \hat{\omega}_{c1}| < c, \quad |\hat{\phi}_{c0} - \hat{\omega}_{c0}| < c,$$

per un certo valore di c .

3. Analisi esemplificativa basata su dataset artificiali

La sezione presenta un'analisi di tipo simulativo condotta su dataset artificiali relativi ad esperimenti randomizzati con non-compliance e senza vincoli di esclusione; i dataset verranno estratti da popolazioni ipotetiche soddisfacenti le ipotesi espresse nella nota 3 della precedente sezione. L'obiettivo è la verifica empirica dell'uso della procedura di massimizzazione vincolata ad un intorno sferico del punto $(\hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$.

Si consideri allora un primo campione artificiale composto da 10000 unità estrapolate da una popolazione ipotetica i cui parametri vengono riportati in Tabella 1. Al fine di identificare i punti di massima verosimiglianza locale sono state condotte 100 procedure di massimizzazione libera utilizzando l'algoritmo EM e partendo ogni volta con valori casuali del vettore parametrico. E' stato inoltre identificato il massimo consistente, $\hat{\theta}_1$, come il punto al quale converge l'algoritmo EM partendo con il vero vettore parametrico. Come previsto la funzione è risultata multimodale, dalla Tabella 2³, si può notare infatti come nelle 100 prove si sia ottenuto:

³ Per analogia con la parametrizzazione classica si sono riportate direttamente le stime delle probabilità di appartenenza ai compliance status $(\omega_a, \omega_n, \omega_c)$ ottenute come medie ponderate delle stime di

per 22 volte convergenza al massimo consistente, $\hat{\theta}_1$,
 per 4 volte convergenza a massimi spuri, cioè punti con una componente di
 varianza prossima allo zero ($\hat{\theta}_5, \hat{\theta}_6, \hat{\theta}_7, \hat{\theta}_8$),
 per 74 volte convergenza ad altri punti di massimo locale ($\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$), che ve-
 drete rappresentano una tipologia di massimi spuri dovuti al label switching e ano-
 mala rispetto alle usuale analisi di misture.

Da notare che in ogni soluzione le stime dei due parametri μ_{a0}, μ_{n1} , sono iden-
 tiche in quanto calcolate sempre come medie delle unità appartenenti ai gruppi
 ($D_i = 1, Z_i = 0$) e ($D_i = 0, Z_i = 1$) rispettivamente.

Per analizzare le caratteristiche degli otto punti di massimo torna utile utiliz-
 zare le probabilità di imputazione calcolate durante l'ultimo E-step dell'algoritmo
 EM. Per probabilità di imputazione si intende la probabilità di appartenenza ad o-
 gnuno dei tre compliance-status (always-takers, never-takers, compliers) e che per
 ogni unità viene calcolata ad ogni iterazione durante il passo "E" dell'algoritmo EM.
 Dalle probabilità di imputazione è inoltre possibile calcolare l'*imputation rate* (Hol-
 gersson e Jorner, 1998) il quale rappresenta un'utile indice per la bontà della scissio-
 ne di una mistura. L'*imputation rate* è dato dalla media della più alta probabilità di
 imputazione osservata per ogni unità. Nel nostro caso, l'*imputation rate* complessivo
 assume un valore molto alto in ogni soluzione e non consente quindi una discrimina-
 zione tra le stesse.

Essendo però in ambito simulativo il compliance status di ogni singola unità è
 conosciuto. Il confronto tra i veri compliance status delle unità statistiche e le proba-
 bilità di imputazione agli stessi rende possibile verificare il grado e la bontà delle
 scissioni delle misture per ogni punto di massimo locale. Per rendere chiara l'idea
 consideriamo la Tabella 3 che riporta, per ogni gruppo (t, z), la media e lo scarto qua-
 dratico medio delle probabilità di imputazione ad ognuno dei tre compliance status
 calcolate all'ultima iterazione dell'algoritmo EM⁴.

massima verosiglianza vincolate ($\hat{\omega}_{a0}, \hat{\omega}_{a1}, \hat{\omega}_{n0}, \hat{\omega}_{n1}, \hat{\omega}_{c0}, \hat{\omega}_{c1}$). Per ragioni di spazio non vengo-
 no riportate le stime delle componenti di varianza σ_{tz} .

⁴ Non vengono riportate le probabilità di imputazione ai gruppi ($a,0$) e ($n,1$) poichè per le unità appa-
 renti a questi due gruppi le informazioni a disposizione consentono un'esatta imputazione ai rispet-
 tivi compliance status fin dalla prima iterazione dell'algoritmo EM.

Tabella 1. Valori parametrici della popolazione ipotetica utilizzata per l'analisi simulativa.

t	ω_t	(μ_{t0}, σ_{t0})	(μ_{t1}, σ_{t1})
a	0.4	(0, 1)	(1, 1.2)
n	0.25	(1, 1.15)	(2, 1)
c	0.35	(6, 0.85)	(7, 0.7)
$P(Z_i = 1) = 0.25$			

Tabella 2. Punti di massimo locale identificati da 100 procedure di massimizzazione non vincolata.

	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$	$\hat{\theta}_6$	$\hat{\theta}_7$	$\hat{\theta}_8$
ω_a	0.400	0.387	0.400	0.387	0.387	0.400	0.486	0.387
ω_n	0.250	0.250	0.323	0.323	0.062	0.512	0.512	0.062
ω_c	0.349	0.361	0.276	0.288	0.549	0.087	0.001	0.549
μ_{a0}	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
μ_{a1}	1.074	6.999	1.076	6.998	7.002	1.093	3.854	7.002
μ_{n0}	1.022	1.020	5.993	5.994	-2.377	3.913	3.913	-2.431
μ_{n1}	2.076	2.076	2.076	2.076	2.076	2.076	2.076	2.076
μ_{c0}	5.988	5.987	1.032	1.035	3.913	2.377	-2.379	3.913
μ_{c1}	7.000	1.072	7.002	1.070	1.076	7.012	0.855	1.076
Log Lik.	-30164	-30177	-30225	-30267	-32684	-33208	-33232	-32692
Imp. rate	0.9938	0.9970	0.9968	0.9968	0.9995	0.9995	0.9995	0.9997

Si osserva per il punto di massimo consistente $\hat{\theta}_1$ una soddisfacente attribuzione delle unità ai compliance status. Ad esempio per le unità appartenenti al gruppo $(a,1)$ la probabilità di imputazione al gruppo always-takers ha media 0.997 con s.e. di 0.036; questo significa che nel successivo M step le unità nel gruppo $(a,1)$ vengono in sostanza correttamente considerate come always-takers. Analogamente per le unità nel gruppo $(c,1)$ la probabilità di imputazione al gruppo compliers ha media 0.990 e s.e. 0.066, e quindi nel successivo M step queste unità vengono in sostanza correttamente considerate come compliers. Considerando che le unità nei gruppi $(a,1)$ e $(c,1)$ formano una delle due misture caratterizzanti la (1) cioè è indice di un'ottima scissione della mistura. Discorso analogo vale per le unità nei gruppi $(n,0)$ e $(c,0)$ e per la rispettiva mistura.

Tabella 3. Probabilità di imputazione per alcuni punti di massimo locale.

soluzione	(t,z)	t					
		a		n		c	
		media	s.e.	media	s.e.	media	s.e.
$\hat{\theta}_1$	(a,1)	0.997	0.036	0	0	0.002	0.036
	(n,0)	0	0	0.990	0.069	0.009	0.069
	(c,0)	0	0	0.009	0.066	0.990	0.066
	(c,1)	0.009	0.066	0	0	0.990	0.066
$\hat{\theta}_2$	(a,1)	0.002	0.039	0	0	0.997	0.039
	(n,0)	0	0	0.990	0.070	0.009	0.070
	(c,0)	0	0	0.009	0.068	0.990	0.068
	(c,1)	0.997	0.037	0	0	0.002	0.037
$\hat{\theta}_5$	(a,1)	0.001	0.034	0	0	0.998	0.034
	(n,0)	0	0	0.001	0.032	0.998	0.032
	(c,0)	0	0	0.000	0.000	1	0
	(c,1)	0.996	0.041	0	0	0.003	0.041

Si consideri adesso il punto di massimo $\hat{\theta}_2$, dove a differenza della precedente soluzione, $\hat{\theta}_1$, la scissione della mistura formata dai gruppi (a,1) e (c,1) non è più soddisfacente. Dalla Tabella 3 si vede infatti come le unità nel gruppo (a,1) vengano in sostanza erroneamente attribuite al gruppo dei compliers, e come le unità nel gruppo (c,1) vengano erroneamente attribuite al gruppo degli always-takers. Situazioni simili si riscontrano per le soluzioni $\hat{\theta}_3$ e $\hat{\theta}_4$. Precisamente per la soluzione $\hat{\theta}_3$ si osserva un'errata scissione della mistura formata dai due gruppi (n,0) e (c,0), e per la soluzione $\hat{\theta}_4$ l'errata scissione di entrambe le misture. Per questi punti ($\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$) il valore dell'imputation rate resta comunque alto.

Finora l'errata scissione di una mistura si è concretizzata nell'attribuzione di tutte le unità al compliance status errato. I restanti punti di massimo locale assumono invece le caratteristiche dei punti di massimo spuri usualmente identificabili nelle analisi di misture. Infatti per questi l'errata scissione di una mistura si manifesta anche con l'attribuzione di quasi tutte le unità ad uno solo dei due compliance status. Per chiarire consideriamo il punto di massimo locale $\hat{\theta}_5$ sempre in Tabella 3; si può osservare come le unità nella mistura formata dai due gruppi (n,0) e (c,0) vengano in sostanza attribuite quasi tutte al gruppo dei compliers. Lo stesso modo di scindere le misture si manifesta anche per i restanti punti di massimo $\hat{\theta}_6$ e $\hat{\theta}_7$.

L'errata attribuzione delle unità nelle misture produce conseguenze negative nella stima dei componenti del vettore parametrico. Tornando infatti a considerare la soluzione $\hat{\theta}_2$, si osservino i diversi valori delle stime delle probabilità $(\omega_a, \omega_n, \omega_c)$ rispetto a $\hat{\theta}_1$. Questo risultato deriva dal fatto che ad ogni iterazione dell'algoritmo EM le stime delle probabilità $(\omega_a, \omega_n, \omega_c)$ vengono calcolate durante il passo "M" come media delle probabilità di imputazione ai compliance status. Per esser chiari si faccia riferimento alla Tabella 4, la prima riga della quale riporta le quote relative di popolazione, $\psi_{t,z}$, appartenenti ai sei gruppi (t,z) per un grande campione estratto dalla popolazione ipotetica considerata. Si osservi come le quote relative di popolazione appartenenti ai tre compliance status si possano facilmente ottenere come:

$$\psi_a = (\psi_{a,0} + \psi_{a,1}) = (0.30 + 0.10) = 0.40,$$

$$\psi_n = (\psi_{n,0} + \psi_{n,1}) = (0.1875 + 0.0625) = 0.25,$$

$$\psi_c = (\psi_{c,0} + \psi_{c,1}) = (0.2625 + 0.0875) = 0.35.$$

Tabella 4. Quote relative di popolazione per compliance status, t , e assegnazione, z .

	ψ_{a0}	ψ_{a1}	ψ_{n0}	ψ_{n1}	ψ_{c0}	ψ_{c1}
$\hat{\theta}_1$	0.30	0.10	0.1875	0.0625	0.2625	0.0875
$\hat{\theta}_2$	0.30	0.0875	0.1875	0.0625	0.2625	0.10

Questi valori corrispondono alle stime $\hat{\omega}_a, \hat{\omega}_n, \hat{\omega}_c$ in $\hat{\theta}_1$, a parte piccole differenze dovute sia alla variabilità campionaria che al fatto che le probabilità di imputazione osservate all'ultima iterazione dell'algoritmo EM non sono sempre esattamente binarie (vedi Tabella 2). I valori poc'anzi calcolati di ψ_a, ψ_n, ψ_c costituiscono infatti dei valori limite delle medie aritmetiche delle probabilità di imputazione ai compliance status conseguenti ad una corretta scissione delle misture che caratterizzano la (1). Riconsiderando adesso la soluzione $\hat{\theta}_2$, dalla Tabella 3 si osserva come le unità nel gruppo $(a,1)$ vengono erroneamente attribuite al gruppo $(c,1)$ e viceversa. Dopo l'errata scissione della miscela composta dai due suddetti gruppi, le quote relative di popolazione nei gruppi (t,z) per un grande campione sono quelle riportate nella seconda riga della Tabella 4. Ora le quote relative di popolazione appartenente ai tre compliance status sono:

$$\psi_a = (\psi_{a,0} + \psi_{a,1}) = (0.30 + 0.0875) = 0.3875,$$

$$\psi_n = (\psi_{n,0} + \psi_{n,1}) = (0.1875 + 0.0625) = 0.25,$$

$$\psi_c = (\psi_{c,0} + \psi_{c,1}) = (0.2625 + 0.10) = 0.3625,$$

che a parte piccole differenze corrispondono alle stime $\hat{\omega}_a, \hat{\omega}_n, \hat{\omega}_c$ in $\hat{\theta}_2$. Considerazioni analoghe valgono per tutti gli altri punti di massimo locale.

Oltre che sulle stime delle probabilità $(\omega_a, \omega_n, \omega_c)$, l'errata scissione delle misture comporta conseguenze prevedibili anche sul resto degli elementi del vettore parametrico. Infatti le stime dei parametri μ_{tz} e σ_{tz} di ogni gruppo (t,z) vengono calcolate durante il passo "M" dell'algoritmo EM come stime di massima verosimiglianza ponderata dove ogni unità ha peso uguale alla probabilità di imputazione al gruppo (t,z) calcolata al precedente passo "E". Avendo preso in considerazione outcome distribuiti secondo distribuzioni normali, e date le caratteristiche delle probabilità di imputazione già illustrate, allora è comprensibile come ad esempio per la soluzione $\hat{\theta}_2$ si ottengano valori di stima dei parametri $\mu_{a1}, \mu_{c1}, \sigma_{a1}, \sigma_{c1}$ sostanzialmente scambiati rispetto alla soluzione $\hat{\theta}_1$. Questo ragionamento vale per tutte le altre soluzioni. L'analisi delle probabilità di imputazione ha quindi permesso lo studio delle caratteristiche dei punti di massima verosimiglianza locale. Si è visto che oltre ai massimi spuri, facilmente identificabili poiché presentano sempre una componente di varianza prossima a zero, la plurimodalità della funzione di verosimiglianza sia dovuta al label switching.

Come da teoria si può anche mettere in evidenza come i punti di massimo spuri corrispondano a piccoli gruppi di outliers. Ad esempio, per il punto $\hat{\theta}_5$ al gruppo $(n,0)$ vengono assegnate soltanto due unità la cui media è -2.377 e la cui varianza è 0.053; per il punto $\hat{\theta}_8$ al gruppo $(n,0)$ viene assegnata soltanto una unità il cui valore è -2.431.

La Tabella 5 mostra le performance della procedura di massimizzazione vincolata ad un intorno del punto $(\hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$ proposta nella precedente sezione. Per alcuni valori del vincolo c (0.03, 0.01, e 0.005) sono state effettuate 100 procedure di massimizzazione vincolata ognuna su di un dataset di numerosità 10000 estratto sempre dalla medesima popolazione ipotetica. Ogni procedura di massimizzazione è partita da valori casuali del vettore parametrico ad eccezione delle componenti $(\omega_{a0}, \omega_{a1}, \omega_{n0}, \omega_{n1}, \omega_{c0}, \omega_{c1})$ che in partenza vengono sempre poste uguali a $(\hat{\phi}_{a0}, \hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{n1}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$. Si può osservare come la procedura di massimizzazione vincolata non sempre converge al punto di massimo consistente. La convergenza a punti diversi dal massimo consistente non appare tuttavia problematica data la facile individuabilità degli stessi. La Tabella 5 mostra infatti come l'algoritmo, oltre al punto di massimo consistente, converga anche a punti di massimo spuri con una componente di varianza prossima allo zero, e a punti sulla frontiera dello spazio parametri-

co vincolato $\Omega_c^{\hat{\phi}}$. Si osservi come al diminuire di c aumenta inoltre il numero di volte che nelle 100 prove la procedura converge al massimo consistente.

Tabella 5. Frequenze assolute dei vari tipi di massimo locale identificati dalla procedura di massimizzazione vincolata per alcuni valori del vincolo c ; per ogni c 100 replicazioni.

C	Convergenza al massimo consistente	Convergenza a punti sulla frontiera di $\Omega_c^{\hat{\phi}}$	Convergenza a massimi spuri	
			Con almeno una comp. var. prosima a zero	dovuti al label switching
0.03	25	73	2	0
0.01	30	68	2	0
0.005	35	63	2	0

Per valutare la bontà della procedura di analisi vincolata (1) presentata nella sezione precedente, sono poi stati estratti 100 dataset artificiali di numerosità 10000 sempre dalla stessa popolazione ipotetica. Per ognuno di questi dataset è stato identificato il punto di massimo interno ad un intorno sferico del punto $(\hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$ ponendo $c=0.01$. Sui vettori di stima così ottenuti si è poi provveduto al calcolo per ogni parametro della distorsione media, della radice quadrata dell'errore quadratico medio, dell'ampiezza media dell'intervallo di confidenza al 95% e della frazione di volte che tale intervallo contiene il vero valore del parametro. A fini comparativi sugli stessi dataset artificiali sono state applicate altre procedure standard che non necessitano dell'introduzione di informazioni ausiliarie. Precisamente, sono state calcolate anche:

- le stime di massima verosimiglianza ipotizzando l'esistenza del vincolo di esclusione in forma debole, ossia imponendo nella (1): $\mu_{a1} - \mu_{a0}$, $\mu_{n1} - \mu_{n0}$, $\sigma_{a1} - \sigma_{a0}$, $\sigma_{n1} - \sigma_{n0}$;
- la stima del C.A.C.E. (Compliers Average Causal Effect), $\mu_{c1} - \mu_{c0}$, ottenuta con il metodo delle variabili strumentali.

I risultati per alcuni parametri sono illustrati nella Tabella 6. Da evidenziare il fatto che sui campioni artificiali estratti dalla popolazione ipotetica l'analisi di massima verosimiglianza condotta sotto il vincolo di esclusione in forma debole non produce un'unica soluzione; per questa ragione anche in questo caso l'analisi è vincolata ad un intorno sferico di $(\hat{\phi}_{a0}, \hat{\phi}_{a1}, \hat{\phi}_{n0}, \hat{\phi}_{n1}, \hat{\phi}_{c0}, \hat{\phi}_{c1})$. Com'era prevedibile l'analisi condotta assumendo il vincolo di esclusione in forma debole soffre di una distorsione media e di un errore quadratico medio sistematicamente maggiore rispetto all'analisi condotta senza vincoli di esclusione, in particolare per quanto riguarda le stime dei

parametri relativi alle distribuzioni per i compliers. Ancora peggiore risulta la stima del C.A.C.E. calcolata con il metodo delle variabili strumentali, per la quale si ottiene un alto valore del grado di copertura degli intervalli di confidenza ma al costo di un'ampiezza media esagerata.

Tabella 6. Performance comparativa della procedura vincolata su 100 dataset ognuno di 10000 unità estratti dalla popolazione ipotetica di cui alla Tabella 1.

Parametro	Stimatore	Distorsione Media	\sqrt{MSE}	Intervallo al 95%	
				Grado di co- pertura	Ampiezza media
μ_{c0}	ML vincolata	0.002	0.079	0.947	0.312
	ML*	0.204	0.220	0.240	0.306
μ_{c1}	ML vincolata	0.002	0.024	0.991	0.072
	ML*	0.256	0.272	0.237	0.377
σ_{c0}	ML vincolata	0.004	0.041	0.947	0.163
	ML*	0.042	0.088	0.846	0.156
σ_{c1}	ML vincolata	-0.00049	0.054	0.940	0.224
	ML*	-0.006	0.061	0.920	0.216
C.A.C.E.	ML vincolata	0.00011	0.096	0.940	0.368
	ML*	0.051	0.111	0.912	0.368
	IVE**	-1.844	1.857	1.000	15.99

4. Considerazioni conclusive

Il lavoro ha inteso mettere in evidenza come alcune problematiche relative all'indebolimento delle condizioni di applicabilità di una metodologia largamente utilizzata nelle valutazioni di efficacia (ossia l'impostazione parametrica all'analisi causale con variabili strumentali) possano essere affrontate facendo riferimento alla teoria delle misture di distribuzioni. In tal senso si è proposto l'uso di una procedura di analisi di massima verosimiglianza vincolata; una successiva analisi di tipo simulativo ha poi consentito un primo giudizio sulla bontà della proposta. L'estrazione ripetuta di campioni causali semplici da una popolazione ipotetica ha evidenziato una buona performance anche comparativamente ad altri metodi usuali. Resta però il fatto che l'analisi simulativa è stata condotta basandosi su di una sola popolazione ipo-

* stime di massima verosimiglianza ipotizzando l'esistenza del vincolo di esclusione in forma debole;

** stima del C.A.C.E. (Compliers Average Causal Effect) ottenuta con il metodo delle variabili strumentali.

tetica di riferimento. Appare quindi interessante un'eventuale approfondimento basato su altre popolazioni ipotetiche che possa evidenziare aspetti più difficoltosi nelle analisi di misture, come ad esempio un peggior grado di scissione conseguente ad una maggiore vicinanza nei valori delle medie e delle varianze delle componenti le misture.

Riferimenti bibliografici

- CARD D., T. LEMIEUX (2001) Can falling supply explain the rising return to college for younger men? A cohort-based analysis, *Quarterly journal of economics*, **116**: 705-746.
- DAY N.E. (1969) Estimating the components of a mixture of normal distributions, *Biometrika*, **56**: 463-474.
- HJORT N.L. (1986), Contribution to the discussion of paper by P.Dianconis and D.Freedman, *The annals of statistics*, **14**: 49-55.
- HOLGERSSON M., U. JORNER (1998) Decomposition of a mixture into normal components: a review, *International journal of biomedical computing*, **29**: 367-392.
- IMBENS G.W., D.R. RUBIN (1997) Bayesian inference for causal effects in randomized experiments with non-compliance, *The annals of statistics*, **25**: 305-327.
- IMBENS G.W., J. ANGRIST (1994) Identification of causal effect using instrumental variables, *Econometrica*, **62**.
- KIEFER M. (1968) Discrete parameter variation: efficient estimation of a switching regression model, *Econometrica*, **46**: 427-439.
- MERCATANTI A. (2004) Causal inference methods without exclusion restrictions: an economic application, *Report n.250 del Dip. di Statistica e Matematica Applicata all'Economia, Università di Pisa.*
- PRIEBE C.E. (1995) Adaptive mixtures, *J.A.S.A.*, **89**: 796-806.

Mixture models relevancies in policy evaluation with causal methods

Summary. *Some methodological issues in weakening the assumptions usually adopted for causal inference methods concern mixtures models analysis. In particular, this paper considers the complete relaxation of the exclusion restriction when using the instrumental variables method for identifying and estimating causal effects. We are supposing a binary treatment and a normally distributed outcome. Respect to a standard analysis of mixture models, we can exploit a larger set of a priori informations in particular for what concern the mixing proportions; conversely, the presence of common distributions mixtures produces likelihood function having more than one maximum points. A constrained maximization procedure taking into account these issues is proposed.*

Keywords. *Normal mixtures, instrumental variables, exclusion restriction.*

Elenco dei report pubblicati

Anno: 1987

- n. 1 Alberto Cambini - Laura Martein, Some Optimality Conditions in Vector Optimization
- n. 2 Alberto Cambini - Laura Martein - S.Schaibel, On Maximizing a Sum of Ratios
- n. 3 Giuliano Gasparotto, On the Charnes-Cooper Transformation in linear Fractional Programming.
- n. 4 Alberto Cambini, Non-linear separation Theorems, Duality and Optimality
- n. 5 Giovanni Boletto, Indicizzazione parziale: aspetti metodologici e riflessi economici
- n. 6 Alberto Cambini - Claudio Sodini, On Parametric Linear Fractional Programming
- n. 7 Alberto Bonaguidi, Alcuni aspetti meno noti delle migrazioni in Italia
- n. 8 Laura Martein - S. Schaible, On Solving a Linear Program with one Quadratic Constraint

Anno: 1988

- n. 9 Ester Lari, Alcune osservazioni sull'equazione funzionale $\varnothing(x,y,z)=\varnothing(\varnothing(x,y,t),t,z)$
- n. 10 F. Barilau, Une étude par ménage des migrations des personnes âgées: comparaison des résultats pour l'Italie et les Etats-Unis
- n. 11 Giovanni Boletto, Metodi di scomposizione del tasso di inflazione
- n. 12 Claudio Sodini, A New Algorithm for the Strictly Convex Quadratic Programming Problem
- n. 13 Laura Martein, On Generating the Set of all Efficient Points of a Bicriteria Fractional Problem
- n. 14 Laura Martein, Applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario
- n. 15 Laura Martein, On the Bicriteria Maximization Problem
- n. 16 Paolo Manca, Un prototipo di sistema esperto per la consulenza finanziaria rivolta ai piccoli risparmiatori
- n. 17 Paolo Manca, Operazioni Finanziarie di Soper e Operazioni di puro Investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano
- n. 18 Paolo Carraresi - Claudio Sodini, A k - Shortest Path Approach to the Minimum Cost Matching Problem.
- n. 19 Odo Barsotti - Marco Bottai, Sistemi gravitazionali e fasi di transazione della crescita Demografica
- n. 20 Giovanni Boletto, Metodi di scomposizione dell'inflazione aggregata : recenti sviluppi.
- n. 21 Marc Termote - Alberto Bonaguidi, Multiregional Stable Population as a Tool for Short-term Demographic Analysis
- n. 22 Marco Bottai, Storie familiari e storie migratorie: un'indagine in Italia
- n. 23 Maria Francesca Romano - Marco Marchi, Problemi connessi con la disomogeneità dei gruppi sottoposti a sorveglianza statistico-epidemiologica.
- n. 24 Franca Orsi, Un approccio logico ai problemi di scelta finanziaria.

Anno: 1989

- n. 25 Vincenzo Bruno, Attrazione ed entropia.
- n. 26 Giorgio Giorgi - S. Mittelu, Invexity in nonsmooth Programming.
- n. 28 Alberto Cambini - Laura Martein, Equivalence in linear fractional programming.

Anno: 1990

- n. 27 Vincenzo Bruno, Lineamenti econometrici dell'evoluzione del reddito nazionale in relazione ad altri fenomeni economici
- n. 29 Odo Barsotti - Marco Bottai - Marco Costa, Centralità e potenziale demografico per l'analisi dei comportamenti demografici: il caso della Toscana
- n. 30 Anna Marchi, A sequential method for a bicriteria problem arising in portfolio selection theory.
- n. 31 Marco Bottai, Mobilità locale e pianificazione territoriale.
- n. 32 Anna Marchi, Solving a quadratic fractional program by means of a complementarity approach
- n. 33 Anna Marchi, Sulla relazione tra un problema bicriteria e un problema frazionario.

Anno: 1991

- n. 34 Enrico Gori, Variabili latenti e "self-selection" nella valutazione dei processi formativi.
- n. 35 Piero Manfredi - E. Salinelli, About an interactive model for sexual Populations.
- n. 36 Giorgio Giorgi, Alcuni aspetti matematici del modello di sraffa a produzione semplice
- n. 37 Alberto Cambini - S.Schaibl - Claudio Sodini, Parametric linear fractional programming for an unbounded feasible Region.
- n. 38 I.Emke - Pouloupoulos - V.Gozálves Pérez - Odo Barsotti - Laura Lecchini, International migration to northern Mediterranean countries the cases of Greece, Spain and Italy.
- n. 39 Giuliano Gasparotto, A LP code implementation
- n. 40 Riccardo Cambini, Un problema di programmazione quadratica nella costituzione di capitale.
- n. 41 Gilberto Ghilardi, Stime ed errori campionari nell'indagine ISTAT sulle forze di lavoro.
- n. 42 Vincenzo Bruno, Alcuni valori medi, variabilità paretiana ed entropia.
- n. 43 Giovanni Boletto, Gli effetti del trascinarsi dei prezzi sulle misure dell'inflazione: aspetti metodologici
- n. 44 P. Paolicchi, Gli abbandoni nell'università: modelli interpretativi.
- n. 45 Maria Francesca Romano, Da un archivio amministrativo a un archivio statistico: una proposta metodologica per i dati degli studenti universitari.
- n. 46 Maria Francesca Romano, Criteri di scelta delle variabili nei modelli MDS: un'applicazione sulla popolazione studentesca di Pisa.
- n. 47 Odo Barsotti - Laura Lecchini, Les parcours migratoires en fonction de la nationalité. Le cas de l'Italie.
- n. 48 Vincenzo Bruno, Indicatori statistici ed evoluzione demografica, economica e sociale delle province toscane.
- n. 49 Alberto Cambini - Laura Martein, Tangent cones in optimization.
- n. 50 Alberto Cambini - Laura Martein, Optimality conditions in vector and scalar optimization: a unified approach.

Anno: 1992

- n. 51 Gilberto Ghilardi, Elementi di uno schema di campionamento areale per alcune rilevazioni ufficiali in Italia.
- n. 52 Paolo Manca, Investimenti e finanziamenti generalizzati.
- n. 53 Laura Lecchini - Odo Barsotti, Le rôle des immigrés extra- communautaires dans le marché du travail

Elenco dei report pubblicati

- n. 54 Riccardo Cambini, Alcune condizioni di ottimalità relative ad un insieme stellato.
- n. 55 Gilberto Ghilardi, Uno schema di campionamento areale per le rilevazioni sulle famiglie in Italia.
- n. 56 Riccardo Cambini, Studio di una classe di problemi non lineari: un metodo sequenziale.
- n. 57 Riccardo Cambini, Una nota sulle possibili estensioni a funzioni vettoriali di significative classi di funzioni concavo-generalizzate.
- n. 58 Alberto Bonaguidi - Valerio Terra Abrami, Metropolitan aging transition and metropolitan redistribution of the elderly in Italy.
- n. 59 Odo Barsotti - Laura Lecchini, A comparison of male and female migration strategies: the cases of African and Filipino Migrants to Italy.
- n. 60 Gilberto Ghilardi, Un modello logit per lo studio del fenomeno delle nuove imprese.
- n. 61 S. Schaible, Generalized monotonicity.
- n. 62 Vincenzo Bruno, Dell'elasticità in economia e dell'incertezza statistica.
- n. 63 Laura Martein, Alcune classi di funzioni concave generalizzate nell'ottimizzazione vettoriale
- n. 64 Anna Marchi, On the relationships between bicriteria problems and non-linear programming problems.
- n. 65 Giovanni Boletto, Considerazioni metodologiche sul concetto di elasticità prefissata.
- n. 66 Laura Martein, Soluzione efficienti e condizioni di ottimalità nell'ottimizzazione vettoriale.

Anno: 1993

- n. 67 Maria Francesca Romano, Le rilevazioni ufficiali ISTAT della popolazione universitaria: problemi e definizioni alternative.
- n. 68 Marco Bottai - Odo Barsotti, La ricerca "Spazio Utilizzato" Obiettivi e primi risultati.
- n. 69 Marco Bottai - F. Barilau, Composizione familiare e mobilità delle persone anziane. Una analisi regionale.
- n. 70 Anna Marchi - Claudio Sodini, An algorithm for a non-differentiable non-linear fractional programming problem.
- n. 71 Claudio Sodini - S. Schaible, An finite algorithm for generalized linear multiplicative programming.
- n. 72 Alberto Cambini - Laura Martein, An approach to optimality conditions in vector and scalar optimization.
- n. 73 Alberto Cambini - Laura Martein, Generalized concavity and optimality conditions in vector and scalar optimization.
- n. 74 Riccardo Cambini, Alcune nuove classi di funzioni concavo-generalizzate.

Anno: 1994

- n. 75 Alberto Cambini - Anna Marchi - Laura Martein, On nonlinear scalarization in vector optimization.
- n. 76 Maria Francesca Romano - Giovanna Nencioni, Analisi delle carriere degli studenti immatricolati dal 1980 al 1982.
- n. 77 Gilberto Ghilardi, Indici statistici della congiuntura.
- n. 78 Riccardo Cambini, Condizioni di efficienza locale nella ottimizzazione vettoriale.
- n. 79 Odo Barsotti - Marco Bottai, Funzioni di utilizzazione dello spazio.
- n. 80 Vincenzo Bruno, Alcuni aspetti dinamici della popolazione dei comuni della Toscana, distinti per ampiezza demografica e per classi di urbanità e di ruralità.
- n. 81 Giovanni Boletto, I numeri indici del potere d'acquisto della moneta.
- n. 82 Alberto Cambini - Laura Martein - Riccardo Cambini, Some optimality conditions in multiobjective programming.
- n. 83 S. Schaible, Fractional programming with sum of ratios.
- n. 84 Stefan Tigan - I.M. Stancu-Minasian, The minimum-risk approach for continuous time linear-fractional programming.
- n. 85 Vasile Preda - I.M. Stancu-Minasian, On duality for multiobjective mathematical programming of n-set.
- n. 86 Vasile Preda - I.M. Stancu-Minasian - Anton Batatorescu, Optimality and duality in nonlinear programming involving semilocally preinvex and related functions.

Anno: 1995

- n. 87 Elena Melis, Una nota storica sulla programmazione lineare: un problema di Kantorovich rivisto alla luce del problema degli zeri.
- n. 88 Vincenzo Bruno, Mobilità territoriale dell'Italia e di tre Regioni tipiche: Lombardia, Toscana, Sicilia.
- n. 89 Antonio Cortese, Bibliografia sulla presenza straniera in Italia
- n. 90 Riccardo Cambini, Funzioni scalari affini generalizzate.
- n. 91 Piero Manfredi - Fabio Tarini, Modelli epidemiologici: teoria e simulazione. (I)
- n. 92 Marco Bottai - Maria Caputo - Laura Lecchini, The "OLIVAR" survey. Methodology and quality.
- n. 93 Laura Lecchini - Donatella Marsiglia - Marco Bottai, Old people and social network.
- n. 94 Gilberto Ghilardi, Uno studio empirico sul confronto tra alcuni indici statistici della congiuntura.
- n. 95 Vincenzo Bruno, Il traffico nei porti italiani negli anni recenti.
- n. 96 Alberto Cambini - Anna Marchi - Laura Martein - S. Schaible, An analysis of the Falk-Palocsay algorithm.
- n. 97 Alberto Cambini - Laura Carosi, Sulla esistenza di elementi massimali.

Anno: 1996

- n. 98 Riccardo Cambini - S. Komlòsi, Generalized concavity and generalized monotonicity concepts for vector valued.
- n. 99 Riccardo Cambini, Second order optimality conditions in the image space.
- n. 100 Vincenzo Bruno, La stagionalità delle correnti di navigazione marittima.
- n. 101 Eugene Maurice Cleur, A comparison of alternative discrete approximations of the Cox - Ingersoll - Ross model.
- n. 102 Gilberto Ghilardi, Sul calcolo del rapporto di concentrazione del Gini.
- n. 103 Alberto Cambini - Laura Martein - Riccardo Cambini, A new approach to second order optimality conditions in vector optimization.
- n. 104 Fausto Gozzi, Alcune osservazioni sull'immunizzazione semideterministica.
- n. 105 Emilio Barucci - Fausto Gozzi, Innovation and capital accumulation in a vintage capital model an infinite dimensional control approach.
- n. 106 Alberto Cambini - Laura Martein - I.M. Stancu-Minasian, A survey of bicriteria fractional problems.
- n. 107 Luciano Fanti - Piero Manfredi, Viscosità dei salari, offerta di lavoro endogena e ciclo.
- n. 108 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Ciclo di vita di nuovi prodotti: modellistica non lineare.
- n. 109 Piero Manfredi, Crescita con ciclo, gestazione dei piani di investimento ed effetti.
- n. 110 Luciano Fanti - Piero Manfredi, Un modello "classico" di ciclo con crescita ed offerta di lavoro endogena.
- n. 111 Anna Marchi, On the connectedness of the efficient frontier: sets without local maxima.

Elenco dei report pubblicati

- n. 112 Riccardo Cambini, Generalized concavity for bicriteria functions.
- n. 113 Vincenzo Bruno, Variazioni dinamiche (1971-1981-1991) dei fenomeni demografici dei comuni (urbani e rurali) della Lombardia, in relazione ad alcune caratteristiche di mobilità territoriale.

Anno: 1997

- n. 114 Piero Manfredi - Fabio Tarini - J.R. Williams - A. Carducci - B. Casini, Infectious diseases: epidemiology, mathematical models, and immunization policies.
- n. 115 Eugene Maurice Cleur - Piero Manfredi, One dimensional SDE models, low order numerical methods and simulation based estimation: a comparison of alternative estimators.
- n. 116 Luciano Fanti - Piero Manfredi, Point stability versus orbital stability (or instability): remarks on policy implications in classical growth cycle model.
- n. 117 Piero Manfredi - Francesco Billari, transition into adulthood, marriage, and timing of life in a stable population framework.
- n. 118 Laura Carosi, Una nota sul concetto di estremo superiore di insiemi ordinati da coni convessi.
- n. 119 Laura Lecchini - Donatella Marsiglia, Reti sociali degli anziani: selezione e qualità delle relazioni.
- n. 120 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Gestaltion lags and efficiency wage mechanisms in a goodwin type growth model.
- n. 121 G. Rivellini, La metodologia statistica multilevel come possibile strumento per lo studio delle interazioni tra il comportamento procreativo individuale e il contesto
- n. 122 Laura Carosi, Una nota sugli insiemi C-limitati e L-limitati.
- n. 123 Laura Carosi, Sull'estremo superiore di una funzione lineare fratta ristretta ad un insieme chiuso e illimitato.
- n. 124 Piero Manfredi, A demographic framework for the evaluation of the impact of imported infectious diseases.
- n. 125 Alessandro Valentini, Calo della fecondità ed immigrazione: scenari e considerazioni sul caso italiano.
- n. 126 Alberto Cambini - Laura Martein, Second order optimality conditions.

Anno: 1998

- n. 127 Piero Manfredi and Alessandro Valentini, Populations with below replacement fertility: theoretical considerations and scenarios from the italian laboratory.
- n. 128 Alberto Cambini - Laura Martein - E. Moretti, Programmazione frazionaria e problemi bicriteria.
- n. 129 Emilio Barucci - Fausto Gozzi - Andrej Swiech, Incentive compatibility constraints and dynamic programming in continuous time.

Anno: 1999

- n. 130 Alessandro Valentini, Impatto delle immigrazioni sulla popolazione italiana: confronto tra scenari alternativi.
- n. 131 K. Iglicka - Odo Barsotti - Laura Lecchini, Recent development of migrations from Poland to Europe with a special emphasis on Italy K. Iglicka - Le Migrazioni est-ovest: le unioni miste in Italia
- n. 132 Alessandro Valentini, Proiezioni demografiche multiregionali a due sessi, con immigrazioni internazionali e vincoli di consistenza.
- n. 133 Fabio Antonelli - Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Backward-forward stochastic differential utility: existence, consumption and equilibrium analysis.
- n. 134 Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Asset pricing with endogenous aspirations.
- n. 135 Eugene Maurice Cleur, Estimating a class of diffusion models: an evaluation of the effects of sampled discrete observations.
- n. 136 Luciano Fanti - Piero Manfredi, Labour supply, time delays, and demoeconomic oscillations in a solow-type growth model.
- n. 137 Emilio Barucci - Sergio Polidoro - Vincenzo Vespi, Some results on partial differential equations and Asian options.
- n. 138 Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Hedging european contingent claims in a Markovian incomplete market.
- n. 139 Alessandro Valentini, L'applicazione del modello multiregionale-multistato alla popolazione in Italia mediante l'utilizzo del Lipro: procedura di adattamento dei dati e particolarità tecniche del programma.
- n. 140 I.M. Stancu-Minasian, optimality conditions and duality in fractional programming-involving semilocally preinvex and related functions.
- n. 141 Alessandro Valentini, Proiezioni demografiche con algoritmi di consistenza per la popolazione in Italia nel periodo 1997-2142: presentazione dei risultati e confronto con metodologie di stima alternative.
- n. 142 Laura Carosi, Competitive equilibria with money and restricted participation.
- n. 143 Laura Carosi, Monetary policy and Pareto improvability in a financial economy with restricted participation
- n. 144 Bruno Cheli, Misurare il benessere e lo sviluppo dai paradossi del Pil a misure di benessere economico sostenibile, con uno sguardo allo sviluppo umano
- n. 145 Bruno Cheli - Laura Lecchini - Lucio Masserini, The old people's perception of well-being: the role of material and non material resources
- n. 146 Eugene Maurice Cleur, Maximum likelihood estimation of one-dimensional stochastic differential equation models from discrete data: some computational results
- n. 147 Alessandro Valentini - Francesco Billari - Piero Manfredi, Utilizzi empirici di modelli multistato continui con durate multiple
- n. 148 Francesco Billari - Piero Manfredi - Alberto Bonaguidi - Alessandro Valentini, Transition into adulthood: its macro-demographic consequences in a multistate stable population framework
- n. 149 Francesco Billari - Piero Manfredi - Alessandro Valentini, Becoming Adult and its Macro-Demographic Impact: Multistate Stable Population Theory and an Application to Italy
- n. 150 Alessandro Valentini, Le previsioni demografiche in presenza di immigrazioni: confronto tra modelli alternativi e loro utilizzo empirico al fini della valutazione dell'equilibrio nel sistema pensionistico
- n. 151 Emilio Barucci - Roberto Monte, Diffusion processes for asset prices under bounded rationality
- n. 152 Emilio Barucci - P. Cianchi - L. Landi - A. Lombardi, Reti neurali e analisi delle serie storiche: un modello per la previsione del BTP future
- n. 153 Alberto Cambini - Laura Carosi - Laura Martein, On the supremum in fractional programming
- n. 154 Riccardo Cambini - Laura Martein, First and second order characterizations of a class of pseudoconcave vector functions
- n. 155 Piero Manfredi and Luciano Fanti, Embedding population dynamics in macro-economic models. The case of the goodwin's growth cycle
- n. 156 Laura Lecchini and Odo Barsotti, Migrazioni dei preti dalla Polonia in Italia
- n. 157 Vincenzo Bruno, Analisi dei prezzi, in Italia dal 1975 in poi
- n. 158 Vincenzo Bruno, Analisi del commercio al minuto in Italia
- n. 159 Vincenzo Bruno, Aspetti ciclici della liquidità bancaria, dal 1971 in poi
- n. 160 Anna Marchi, A separation theorem in alternative theorems and vector optimization

Elenco dei report pubblicati

Anno: 2000

- n. 161 Piero Manfredi and Luciano Fanti, Labour supply, population dynamics and persistent oscillations in a Goodwin-type growth cycle model
- n. 162 Luciano Fanti and Piero Manfredi, Neo-classical labour market dynamics and chaos (and the Phillips curve revisited)
- n. 163 Piero Manfredi - and Luciano Fanti, Detection of Hopf bifurcations in continuous-time macro- economic models, with an application to reducible delay-systems.
- n. 164 Fabio Antonelli - Emilio Barucci, The Dynamics of pareto allocations with stochastic differential utility
- n. 165 Eugene M. Cleur, Computing maximum likelihood estimates of a class of One-Dimensional stochastic differential equation models from discrete Date*
- n. 166 Eugene M. Cleur, Estimating the drift parameter in diffusion processes more efficiently at discrete times: a role of indirect estimation
- n. 167 Emilio Barucci - Vincenzo Valori, Forecasting the forecasts of others e la Politica di Inflation targeting
- n. 168 A.Cambini - L. Martein, First and second order optimality conditions in vector optimization
- n. 169 A. Marchi, Theorems of the Alternative by way of Separation Theorems
- n. 170 Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Asset Pricing and Diversification with Partially Exchangeable random Variables
- n. 171 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Long Term Effects of the Efficiency Wage Hypothesis in Goodwin-Type Economies.
- n. 172 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Long Term Effects of the Efficiency wage Hypothesis in Goodwin-type Economies: a reply.
- n. 173 Luciano Fanti, Innovazione Finanziaria e Domanda di Moneta in un Modello dinamico IS-LM con Accumulazione.
- n. 174 P.Manfredi, A.Bonaccorsi, A.Secchi, Social Heterogeneities in Classical New Product Diffusion Models. I: "External" and "Internal" Models.
- n. 175 Piero Manfredi - Ernesto Salinelli, Modelli per formazione di coppie e modelli di Dinamica familiare.
- n. 176 P.Manfredi, E. Salinelli, A.Melegaro, A.Secchi, Long term interference Between Demography and Epidemiology: the case of tuberculosis
- n. 177 Piero Manfredi - Ernesto Salinelli, Toward the Development of an Age Structure Teory for Family Dynamics I: General Frame.
- n. 178 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Population heterogeneities, nonlinear oscillations and chaos in some Goodwin-type demo-economic models Paper to be presented at the: Second workshop on "nonlinear demography" Max Planck Institute for demographic Research Rostock, Germany, May 31-June 2, 2
- n. 179 E. Barucci - M.E. Mancini - Roberto Renò, Volatility Estimation via Fourier Analysis
- n. 180 Riccardo Cambini, Minimum Principle Type Optimality Conditions
- n. 181 E. Barucci, M. Giuli, R. Monte, Asset Prices under Bounded Rationality and Noise Trading
- n. 182 A. Cambini, D.T.Luc, L.Martein, Order Preserving Transformations and application.
- n. 183 Vincenzo Bruno, Variazioni dinamiche (1971-1981-1991) dei fenomeni demografici dei comuni urbani e rurali della Sicilia, in relazione ad alcune caratteristiche di mobilità territoriale.
- n. 184 F.Antonelli, E.Barucci, M.E.Mancino, Asset Pricing with a Backward-Forward Stochastic Differential Utility
- n. 185 Riccardo Cambini - Laura Carosi, Coercivity Concepts and Recession Functions in Constrained Problems
- n. 186 John R. Williams, Piero Manfredi, The pre-vaccination dynamics of measles in Italy: estimating levels of under-reporting of measles cases
- n. 187 Piero Manfredi, John R. Williams, To what extent can inter-regional migration perturbe local endemic patterns? Estimating numbers of measles cases in the Italian regions
- n. 188 Laura Carosi, Johannes Jahn, Laura Martein, On The Connections between Semidefinite Optimization and Vector Optimization
- n. 189 Alberto Cambini, Jean-Pierre Crouzeix, Laura Martein, On the Pseudoconvexity of a Quadratic Fractional Function
- n. 190 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A finite Algorithm for a Particular d.c. Quadratic Programming Problem.
- n. 191 Riccardo Cambini - Laura Carosi, Pseudoconvexity of a class of Quadratic Fractional Functions.
- n. 192 Laura Carosi, A note on endogenous restricted participation on financial markets: an existence result.
- n. 193 Emilio Barucci - Roberto Monte - Roberto Renò, Asset Price Anomalies under Bounded Rationality.
- n. 194 Emilio Barucci - Roberto Renò, A Note on volatility estimate-forecast with GARCH models.
- n. 195 Bruno Cheli, Sulla misura del benessere economico: i paradossi del PIL e le possibili correzioni in chiave etica e sostenibile, con uno spunto per l'analisi della povertà
- n. 196 M.Bottai, M.Bottai, N. Salvati, M.Toigo, Le proiezioni demografiche con il programma Nostradamus. (Applicazione all'area pisana)
- n. 197 A. Lemmi - B. Cheli - B. Mazzolli, La misura della povertà multidimensionale: aspetti metodologici e analisi della realtà italiana alla metà degli anni '90
- n. 198 C.R. Bector - Riccardo Cambini, Generalized B-invex vector valued functions
- n. 199 Luciano Fanti - Piero Manfredi, The workers' resistance to wage cuts is not necessarily detrimental for the economy: the case of a Goodwin's growth model with endogenous population.
- n. 200 Emilio Barucci - Roberto Renò, On Measuring volatility of diffusion processes with high frequency data
- n. 201 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Demographic transition and balanced growth

Anno: 2001

- n. 202 E.Barucci - M. E. Mancini - E. Vannucci, Asset Pricing, Diversification and Risk Ordering with Partially Exchangeable random Variables
- n. 203 E. Barucci - R. Renò - E. Vannucci, Executive Stock Options Evaluation.
- n. 204 Odo Barsotti - Moreno Toigo, Dimensioni delle rimesse e variabili esplicative: un'indagine sulla collettività marocchina immigrata nella Toscana Occidentale
- n. 205 Vincenzo Bruno, I Consumi voluttuari, nell'ultimo trentennio, in Italia
- n. 206 Michele Longo, The monopolist choice of innovation adoption: A regular-singular stochastic control problem
- n. 207 Michele Longo, The competitive choice of innovation adoption: A finite-fuel singular stochastic control problem.
- n. 208 Riccardo Cambini - Laura Carosi, On the pseudoaffinity of a class of quadratic fractional functions
- n. 209 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A Finite Algorithm for a Class of Non Linear Multiplicative Programs.
- n. 210 Alberto Cambini - Dinh The Luc - Laura Martein, A method for calculating subdifferential Convex vector functions
- n. 211 Alberto Cambini - Laura Martein, Pseudolinearity in scalar and vector optimization.
- n. 212 Riccardo Cambini, Necessary Optimality Conditions in Vector Optimization.
- n. 213 Riccardo Cambini - Laura Carosi, On generalized convexity of quadratic fractional functions.
- n. 214 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A note on a particular quadratic programming problem.
- n. 215 Michele Longo - Vincenzo Valori, Existence and stability of equilibria in OLG models under adaptive expectations.

Elenco dei report pubblicati

- n. 216 Luciano Fanti - Piero Manfredi, Population, unemployment and economic growth cycles: a further explanatory perspective
- n. 217 J.R.Williams,P.Manfredi,S.Salmaso,M.Ciofi, Heterogeneity in regional notification patterns and its impact on aggregate national case notification data: the example of measles in Italy.
- n. 218 Anna Marchi, On the connectedness of the efficient frontier: sets without local efficient maxima
- n. 219 Laura Lecchini - Odo Barsotti, Les disparités territoriales au Maroc au travers d'une optique de genre.

Anno: 2002

- n. 220 Gilberto Ghilardi - Nicola Orsini, Sull'uso dei modelli statistici lineari nella valutazione dei sistemi formativi.
- n. 221 Andrea Mercatanti, Un'analisi descrittiva dei laureati dell'Università di Pisa
- n. 222 E. Barucci - C. Impenna - R. Renò, The Italian Overnight Market: microstructure effects, the martingale hypothesis and the payment system.
- n. 223 E. Barucci, P.Malliavin, M.E.Mancino, R.Renò, A.Thalmaier, The Price-volatility feedback rate: an implementable mathematical indicator of market stability.
- n. 224 Andrea Mercatanti, Missing at random in randomized experiments with imperfect compliance
- n. 225 Andrea Mercatanti, Effetto dell'uso di carte Bancomat e carte di Credito sulla liquidità familiare: una valutazione empirica
- n. 226 Piero Manfredi - John R. Williams, Population decline and population waves: their impact upon epidemic patterns and morbidity rates for childhood infectious diseases. Measles in Italy as an example.
- n. 227 Piero Manfredi - Marta Ciofi degli Atti, La geografia pre-vaccinale del morbillo in Italia. I. Comportamenti di contatto e sforzi necessari all'eliminazione: predizioni dal modello base delle malattie prevenibili da vaccino.
- n. 228 I.M.Stancu-Minasian, Optimality Conditions and Duality in Fractional Programming Involving Semilocally Preinvex and Related
- n. 229 Nicola Salvati, Un software applicativo per un'analisi di dati sui marchi genetici (Genetic Markers)
- n. 230 Piero Manfredi, J. R. Williams, E. M. Cleur, S. Salmaso, M. Ciofi, The pre-vaccination regional landscape of measles in Italy: contact patterns and related amount of needed eradication efforts (and the "EURO" conjecture)
- n. 231 Andrea Mercatanti, I tempi di laurea presso l'Università di Pisa: un'applicazione dei modelli di durata in tempo discreto
- n. 232 Andrea Mercatanti, The weak version of the exclusion restriction in causal effects estimation: a simulation study
- n. 233 Riccardo Cambini and Laura Carosi, Duality in multiobjective optimization problems with set constraints
- n. 234 Riccardo Cambini and Claudio Sodini, Decomposition methods for nonconvex quadratic programs
- n. 235 R.Cambini and L. Carosi and S.Schaible, Duality in fractional optimization problems with set constraints
- n. 236 Anna Marchi, On the mix-efficient points

Anno: 2003

- n. 237 Emanuele Vannucci, The valuation of unit linked policies with minimal return guarantees under symmetric and asymmetric information hypotheses
- n. 238 John R Williams - Piero Manfredi, Ageing populations and childhood infections: the potential impact on epidemic patterns and morbidity
- n. 239 Bruno Cheli, Errata Corrige del Manuale delle Impronte Ecologiche (2002) ed alcuni utili chiarimenti
- n. 240 Alessandra Petrucci-Nicola Salvati-Monica Pratesi, Stimatore Combinato r Correlazione Spaziale nella Stima per Piccole Aree
- n. 241 Riccardo Cambini - Laura Carosi, Mixed Type Duality for Multiobjective Optimization Problems with set constraints
- n. 242 O.Barsotti, L.Lecchini, F.Benassi, Foreigners from central and eastern European countries in Italy: current and future perspectives of eu enlargement
- n. 243 A. Cambini - L. Martein - S. Schaible, Pseudoconvexity under the Charnes-Cooper transformation
- n. 244 Eugene M. Cleur, Piero Manfredi, and John R. William, The pre-and post-Vaccination regional dynamics of measles in Italy: Insights from time series analysis

Anno: 2004

- n. 245 Emilio Barucci - Jury Falini, Determinants of Corporate Governance in Italy: Path dependence or convergence?
- n. 246 R. Cambini - A. Marchi, A note on the connectedness of the efficient frontier
- n. 247 Laura Carosi - Laura Martein, On the pseudoconvexity and pseudolinearity of some classes of fractional functions
- n. 248 E. Barucci - R. Monte - B. Trivellato, Bayesian nash equilibrium for insider trading in continuous time
- n. 249 Eugene M. Cleur, A Time Series Analysis of the Inter-Epidemic Period for Measles in Italy
- n. 250 Andrea Mercatanti, Causal inference methods without exclusion restrictions: an economic application.
- n. 251 Eugene M. Cleur, Non-Linearities in Monthly Measles data for Italy
- n. 252 Eugene M. Cleur, A Threshold Model for Prevaccination Measles Data: Some Empirical Results for England and Italy
- n. 253 Andrea Mercatanti, La gestione dei dati mancanti nei modelli di inferenza causale: il caso degli esperimenti naturali.
- n. 254 Andrea Mercatanti, Rilevanza delle analisi di misture di distribuzioni nelle valutazioni di efficacia