Report n. 275

Misure di Rischio Finanziario

Paolo Manca

Pisa, Ottobre 2005
- Stampato in Proprio –

MISURE DI RISCHIO FINANZIARIO

Paolo Manca
Dipartimento di Statistica e Matematica applicata all’Economia
Universita’ di Pisa – 2005 -

Abstract: Viene fornita un’esposizione , per quanto possibile accessibile e insieme organica, degli sviluppi e dei risultati raggiunti sul tema delle misure di rischio finanziario.

1.

Nel linguaggio comune gli attributi: aleatorio, casuale, rischioso, incerto, vengono spesso usati indifferentemente. Con una terminologia piu’ rigorosa e rappresentando l’incertezza di un risultato come una variabile casuale, conviene tuttavia distinguere la nozione di incertezza da quella di rischiosita’, intendendosi per incertezza la non prevedibilita’ e per rischiosita’ la non prevedibilita’ di determinazioni sgradite.
L’incertezza infatti non sempre rappresenta una caratteristica indesiderabile, la rischiosita’ si (almeno per la maggior parte dei soggetti che operano sui mercati finanziari).
Una misura sintetica soddisfacente e molto utilizzata di incertezza e’ sempre stata la varianza; per motivi storici e per semplicita’ la varianza e’ stata altresi’ utilizzata per misurare la rischiosita’ ma sempre di piu’ questo utilizzo e’ apparso insoddisfacente e, alla luce delle ricerche recenti, superato .
In campo finanziario in particolare, interpretando i valori assunti dalla vc come importi monetari, l’incertezza appare vantaggiosa se tali importi risultano “dispersi verso l’alto”, svantaggiosa se tali importi risultano “dispersi verso il basso”: la varianza fornisce una misura soddisfacente della “dispersione” ma non risulta altrettanto valida nel fornire una misura del rischio’ fatta eccezione per le vc caratterizzate da una distribuzione simmetrica .

Sensibili a tali questioni nel passato diversi autori hanno proposto come misura del rischio la semivarianza sinistra e comunque misure associate al “lato sinistro della distribuzione stessa”. L’introduzione e l’adozione diffusa del “value at risk” anche da grandi istituzioni finanziarie intorno agli anni 1980 ha dato grande impulso alle ricerche sul tema, ma solo col fondamentale articolo di Artzner-Delbaen-Eber-Heath (ADEH) del 1998 : “Coherent measures of risk”, (Math. Finance –1999- pag 203-228) , il tema del rischio finanziario e’ stato affrontato in modo razionale, secondo un approccio ben noto alla fisica moderna in base al quale **una grandezza e’ nota in quanto sono noti i procedimenti che consentono di misurarla.**
L’articolo citato ha fornito **un riferimento razionale a possibili definizioni operative di rischio finanziario,** e ha costituito il fondamento ad una serie significativa di risultati successivi che costituiscono ormai un corpus di conoscenze che vanno definitivamente modificando l’usuale insoddisfacente approccio alle tematiche della gestione del rischio (ci riferiamo soprattutto ai problemi di copertura).
Precisamente nel loro fondamentale lavoro Artzer-Delbaen-Eber-Heath (ADEH) definiscono quale misura di rischio associata ad un portafoglio X **la minima somma certa**, sia a, che occorre aggiungere ad X per rendere accettabile il portafoglio X+a.
Formalmente, indicando con ρ(X) tale somma, si ha:

$$\rho(X) = \inf\{m : X + m \in \mathcal{G}\}$$

essendo $\mathcal{G}$ un insieme di portafogli che un dato soggetto economico (s.e.) giudica accettabili.

2.
Indicheremo con R l’insieme dei reali. Faremo sempre riferimento ad uno spazio misurabile (Ω, F) , essendo Ω l’insieme di riferimento (universo), essendo F una σ-algebra definita su Ω. Rappresenteremo uno spazio di probabilita’ con la terna (Ω, F, P), essendo P una probabilita’ cioe’ una misura σ-additiva e normalizzata su (Ω, F). Indicheremo con Π la famiglia delle funzioni a valori reali misurabili e **limitate** su (Ω, F), e indicheremo con X un generico elemento di Π, attribuendo ai valori assunti da X il significato di importi monetari.
Chiameremo indifferentemente X : variabile casuale (vc), lotteria, portafoglio.

Seguendo Follmer e Schied (“Stochastic finance” –2004- De Gruyter-) definiamo **misura di rischio finanziario** (**mrf**) associata ad un portafoglio X ogni applicazione $\rho: \Pi \to R$ che gode delle seguenti proprieta’:

I. *invarianza per traslazione* : $\rho(X + a) = \rho(X) - a \quad \forall\ a \in R$

II. *monotonia* : $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Nota: L'invarianza per traslazione afferma che aggiungendo un capitale certo a ad un dato portafoglio se ne diminuisce il rischio per lo stesso ammontare.
La monotonia traduce un principio abbastanza ovvio e cioe' che se il portafoglio X e' "migliore" del portafoglio Y allora la sua misura di rischio non puo' essere "peggiore".♦

Le mrf possono inoltre soddisfare altre interessanti proprieta'.

Una mrf si dice **convessa** se soddisfa alla condizione:

III. *convessita'*: $\rho(\alpha X + (1-\alpha) Y) \leq \alpha \rho(X) + (1-\alpha) \rho(Y) \quad \forall\ \alpha \in [0,1]$

Una mrf di rischio si dice **positivamente omogenea** se soddisfa alla condizione:

IV. *omogeneita' positiva*: $\lambda > 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Una mrf si dice **subadditiva** se soddisfa alla condizione:

V. *subaddittivita'*: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Una mrf gode della proprieta' dell'**opposizione** se soddisfa alla condizione:

VI. *opposizione*: $X \geq \underline{0} \Rightarrow \rho(X) \leq 0$

Una mfr positivamente omogenea e convessa (ovvero positivamente omogenea e subadditiva) , dicesi **coerente**.

Una mrf si dice *normalizzata* se : $\rho(\underline{0}) = 0$.

Nota: L'omogeneita' esprime la diretta proporzionalita' della misura di rischio alle poste che caratterizzano un portafoglio X : si tratta di una proprieta' non sempre apprezzabile in quanto spesso il rischio cresce in misura piu' che proporzionale rispetto alla dimensione degli importi.
E' immediato verificare che una misura omogenea e' normalizzata: $\rho(\underline{0}) = 0$.
In base alla subadditivita' il rischio di un portafoglio composto non puo' superare la somma dei rischi dei portafogli che lo compongono; in altre parole, agli effetti del rischio, la diversificazione non e' penalizzante.♦

Sussistono al riguardo alcuni semplici terorema.

***TEO1**: Se ρ e' una mrf allora:*

1. $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$

2. $\rho(\underline{0} + a) = \rho(\underline{0}) - a$

Immediato.

***TEO 2**: Se ρ e' una mrf convessa e normalizzata allora:*

$$\rho(\alpha X) \leq \alpha\,\rho(X) \quad \text{per } \alpha \in [0,1]$$

$$\rho(\alpha X) \geq \alpha\,\rho(X) \quad \text{per } \alpha \geq 1$$

Infatti $\forall\ \alpha \in [0,1]$ e': $\rho(\alpha X) = \rho(\alpha X + (1-\alpha)\,\underline{0}) \leq \alpha\,\rho(X) + (1-\alpha)\,\rho(\underline{0})$

Infatti $\forall\ \alpha \geq 1$ e' : $\rho(X) = \rho[(1/\alpha)(\alpha X) + (1-1/\alpha)\,\underline{0}] \leq (1/\alpha)\,\rho(\alpha X)$.

***TEO 3** : La monotonia implica l'opposizione*

Infatti basta considerare in -III- il caso $Y = \underline{0}$.

***TEO 4**: L'opposizione e la subadditivita' implicano la monotonia:*

Sia $X \geq Y$ cioe' $X - Y \geq \underline{0}$, allora se vale l'opposizione e' anche:

$$\rho(X - Y) \leq 0$$

ma se vale anche la subadditivita' : $\rho(X) \leq \rho(X-Y) + \rho(Y)$

e' anche: $0 \geq \rho(X-Y) \geq \rho(X) - \rho(Y)$

cioe' anche: $\rho(Y) \geq \rho(X)$

***TEO 5** : La subadditivita' e l'omogeneita' implicano la convessita'*

immediato

***TEO 6** : La convessita' e l'omogeneita' implicano la subadditivita'*:

infatti $\forall\ \alpha \in [0,1]$ per la convessita' risulta:

$$\rho(X + Y) = \rho(\alpha X/\alpha + (\alpha-1)Y/(\alpha-1)) \leq \alpha \rho(X/\alpha) + (\alpha-1) \rho(Y/(\alpha-1))$$

mentre per l'omogeneita': $\alpha \rho(X/\alpha) +(\alpha-1) \rho(Y/(\alpha-1)) = \rho(X) +\rho(Y)$.

***TEO 7** : La subaddittivita' e l'omogeneita' implicano la convessita':*

infatti per la subadditivita': $\rho(\alpha X +(1-\alpha) Y) \leq \rho(\alpha X) + \rho((1-\alpha) Y)$

ed ancora per l'omogeneita': $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$.

***TEO 8** : Una mfr omogenea e' subadditiva se e solo se e' convessa.*

Segue immediatamente dai teo 4 e 5.

Nota:Per un soggetto economico (s.e.) caratterizzato da un insieme G di portafogli "accettabili" , una misura di rischio finanziario (**mrf**) associata ad un portafoglio X viene proposta da ADEH come **la minima somma certa,** sia a, che occorre aggiungere ad X per rendere accettabile il portafoglio X+a. Indicando con $\rho(X)$ tale somma, si ha: $\rho(X) = \inf \{m : X + m \in G \}$
Per precisione ADEH parlano della **minima somma certa** che "impiegata prudentemente" occorre aggiungere al portafoglio iniziale per ottenere a scadenza un portafoglio accettabile. Formalmente, indicando con $\rho(X)$ tale somma, con r il tasso prudente di impiego, si ha: $\rho(X) = \inf \{m : X + m (1+r) \in G \}$.
E' importante notare come la misura del rischio secondo ADEH sia una grandezza cardinale e al tempo stesso soggettiva. ♦

3.
Assegnata una mrf ρ definiamo suo **insieme di ammissibilita'** l'insieme:

1. $$A_\rho = \{ X : X \in \Pi, \rho(X) \leq 0\}$$

Esiste una stretta interdipendenza tra le proprieta' di una mfr e le caratteristiche dell'insieme di ammissibilita' cosi' come specificato dai seguenti:

***TEO 1**: Sia ρ una mfr allora A_ρ soddisfa alle condizioni:*

2. $$\inf \{m \in R , m \in A_\rho\} > -\infty$$

3. $$X \in A_\rho , Y \geq X \Rightarrow Y \in A_\rho$$

Per dimostrare la (2) si noti che, essendo $\rho(m) = \rho(\underline{0}) - m$, se $m_o = \rho(\underline{0})$ allora $\rho(m_o) = 0$ e quindi $m_o \in A_\rho$; mentre se $m < m_o$ allora:
$\rho(m) = \rho(m_o - \delta) = \rho(m_o) + \delta > \rho(m_o) = 0$ e dunque $m \notin A_\rho$.

Per dimostrare la (3) si noti che se $X \in A_\rho$ allora $\rho(X) \leq 0$ ma allora, per la monotonia, se $Y \geq X$ anche $\rho(Y) \leq 0$ e dunque $Y \in A_\rho$.

TEO 2 : *Siano ρ ed A_ρ una mfr e il rispettivo insieme di ammissibilita', risulta:*

4. $$\rho(X) = \inf \{m : X + m \in A_\rho \}$$

Infatti: $\inf \{m : X + m \in A_\rho \} = \inf \{m : \rho(X + m) \leq 0 \}$

$= \inf \{m : \rho(X) - m \leq 0 \} = \inf \{m : \rho(X) \leq m \} = \rho(X)$.

TEO 3 : *Sia A caratterizzato dalle proprieta' (2) e (3), definiamo:*

5. $$\rho_A(X) = \inf \{m : X + m \in A \}$$

allora $\rho_A(X)$ e' una mfr.

Immediato.

TEO 4 : *Siano ρ ed A_ρ una mfr e il rispettivo insieme di ammissibilita', ovvero sia A caratterizzato dalle proprieta' (2) e (3) e sia ρ_A una mfr associata:*

A_ρ - (A)- e' convesso se e solo se tale risulta ρ - (ρ_A)-

A_ρ - (A)- e' un cono se e solo se ρ - (ρ_A)- risulta omogeneo

A_ρ - (A) - e' un cono convesso se e solo se ρ - (ρ_A)- risulta coerente

Ci limitiamo a dimostrare la prima affermazione.
Sia ρ convessa e siano $X,Y \in A$, allora e' $\rho(X) \leq 0$, $\rho(Y) \leq 0$ e dunque per $\alpha \in [0,1]$ e' anche : $\alpha \rho(X) + (1-\alpha) \rho(Y) \leq 0$
d'altra parte :

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha) Y) \leq \alpha \rho(X) + (1-\alpha) \rho(Y)$$

dunque *A* e' convesso.
Sia viceversa A convesso, se X e Y sono due generiche vc, allora $X+\rho(X) \in A$ e $Y+\rho(Y) \in A$ e dunque anche :

$$\alpha\, X+\alpha\, \rho(X) + (1-\alpha)\, Y+ (1-\alpha)\, \rho(Y) \in A\ ,$$

dunque: $\rho[\alpha\, X+\alpha\, \rho(X) + (1-\alpha)\, Y + (1-\alpha)\, \rho(Y)\,] \leq 0$

ma : $\rho[\alpha\, X+\alpha\, \rho(X) + (1-\alpha)\, Y+(1-\alpha)\, \rho(Y)\,] =$

$= \rho[\alpha\, X+ (1-\alpha)\, Y] - \alpha\, \rho(X) - (1-\alpha)\, \rho(Y)$

dunque : $\rho[\alpha\, X+ (1-\alpha)\, Y] \leq \alpha\, \rho(X) + (1-\alpha)\, \rho(Y)$

4.
E' facile dimostrare che:

TEO 1 :*La combinazione convessa (combinazione lineare a coefficienti positivi la cui somma e' pari a uno) di mfr ovvero di mfr convesse ovvero di mfr positivamente omogenee ovvero di mfr subadditive ovvero di mfr coerenti e' ancora tale.*

Siano $\alpha \in (0,1)$, siano ρ_1 e ρ_2 mfr, allora anche $\alpha\, \rho_1 + (1-\alpha)\, \rho_2$ e' una mfr infatti:

$$\alpha\, \rho_1(X+m) + (1-\alpha)\, \rho_2(X+m) = \alpha\, \rho_1(X) - \alpha\, m + (1-\alpha)\, \rho_2(X) - (1-\alpha)\, m$$

$$= \alpha\, \rho_1(X) + (1-\alpha)\, \rho_2(X) - m.$$

Inoltre se $X \leq Y$ chiaramente:

$$\alpha\, \rho_1(Y) + (1-\alpha)\, \rho_2(Y) \leq \alpha\, \rho_1(X) + (1-\alpha)\, \rho_2(X).$$

Ancora se ρ_1 e ρ_2 sono positivamente omogenee e' anche:

$$\alpha\, \rho_1(\lambda X) + (1-\alpha)\, \rho_2(\lambda X) = \lambda\, [\alpha\, \rho_1(X) + (1-\alpha)\, \rho_2(X)].$$

Ancora se ρ_1 e ρ_2 sono subadditive e' anche:

$$\alpha\, \rho_1(X+Y) + (1-\alpha)\, \rho_2(X+Y) \leq \alpha\, \rho_1(X) + (1-\alpha)\, \rho_2(X) + \alpha\, \rho_1(Y) + (1-\alpha)\, \rho_2(Y).$$

Tutt'altro che immeditati sono invece i teoremi di caratterizzazione delle mfr coerenti e delle mfr convesse.
Assegnato la spazio misurabile (Ω, F), indicheremo con Ξ la sottofamiglia delle probabilita' **additive** su (Ω, F). Sussistono i seguenti teoremi di caratterizzazione dovuti rispettivamente ad ADEH e a Follmer e Shied :

TEO 2*: Sia assegnato lo spazio misurabile' (Ω, F) e sia X una funzione misurabile e limitata di (Ω, F), allora tutte e sole le misure coerenti di rischio sono definite da:*

1. $$\rho(X) = \sup_{P \in Q} [E_P(-X)]$$

essendo Q un sottinsieme di Ξ.

TEO 3 *: Sia assegnato lo spazio misurabile (Ω, F) e sia X una funzione misurabile e limitata di (Ω, F), allora tutte e sole le misure convesse di rischio sono definite da:*

2. $$\rho(X) = \sup_{P \in \Xi} [E_P(-X) + \alpha(P)]$$

essendo:

3. $$\alpha(P) = \sup_{X \in A\rho} [E_P(-X)]$$

5.

Sia X una vc cioe' una funzione misurabile valori reali definita sullo spazio di probabilita' (Ω, F, P), definiamo "accettabile" tale vc se la probabilita' che assuma valori negativi e' inferiore ad una soglia $c \in [0,1]$ e indichiamo con *A* l'insieme di soluzioni accettabili:

1. $$A = \{X \in \Pi \ : \ P(X < 0) \leq c\}$$

cioe':

1'. $$A = \{X \in \Pi \ : \ P(X < 0) - c \leq 0\}$$

In altre parole *A* rappresenta l'insieme dei portafogli che possono dar luogo a perdite ma con una probabilita' inferiore a c. Possiamo osservare che l'atteggiamento di accettare alternative che comunque comportano un rischio e' sistematico nella vita di ciascuno: il valore c rappresenta una sorta di soglia soggettiva di "prudenza" che risulta' tanto piu' piccola quanto piu' si e' prudenti.
E' immediato verificare che risulta:

$$\inf \{m \in R\ ,\ m \in A\} > -\infty$$

$$X \in A\ ,\ Y \geq X \quad \Rightarrow \quad Y \in A$$

ne consegue (teo3, par 2) che A induce una mfr definita da :

2. $$var_c(X) = \inf \{ m : P(X + m < 0) - c \leq 0 \}$$

che divesi **valore a rischio a livello di confidenza c** (**value at risk**).

Sia $\Phi(.)$ la funzione di distribuzione di X:

3. $$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

che risulta come noto monotona non decrescente.
Ammetteremo che inoltre **$\Phi(.)$ sia assolutamente continua e propriamente crescente** e che φ ne sia la densita' di probabilita' associata:

4. $$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$$

in tal caso e' facile verificare che risulta:

5. $$var_c = - \Phi^{-1}(c)$$

in quanto, per la stretta monotonia di Φ ed essendo $P(X=m) =0$, risulta:

$$\inf \{ m : P(X + m < 0) - c \leq 0 \} =$$

$$\inf \{ m : P(X + m < 0) + P(X=m) - c \leq 0 \} =$$

$$\inf \{ m : P(X + m \leq 0) \leq c \} =$$

$$\inf \{ m : P(X \leq -m) \leq c \} =$$
$$\inf \{ m : \Phi(-m) \leq c \} = \{ m^* : \Phi(-m^*) = c \}$$

cioe' $m^* = - \Phi^{-1}(c)$.

Posto:

6. $$x^* = \Phi^{-1}(c)$$

si ha equivalentemente:

7. $$c \;=\; \int_{-\infty}^{x^*} \varphi(t)\, dt$$

8. $$1 - c \;=\; \int_{x^*}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$$

Dunque il var_c , cambiato di segno, non e' altro che il **c-quantile,** associato al **livello di confidenza c,** della vc X .
Poiche':

9. $$P[\,(X + var(X)) \geq 0\,] = 1-c$$

Se X esprime il valore finanziario a scadenza di un portafoglio la (9) esprime il var_c come quella cifra che aggiunta al portafoglio garantisce, con probabilita' 1-c, la non negativita' del portaglio stesso. Se a valori negativi del portafoglio corrisponde l'insolvenza allora il var_c misura la cifra certa che occorre aggiungere al portafoglio per garantire la solvibilita' a livello di confidenza c.

Nota: Essendo $P(X = x^*) = 0$ si ha successivamente:

$$P(X + var(X) \geq 0) = P(X - x^* \geq 0) = P(X \geq x^*) =$$

$$1 - P(X < x^*) = 1 - P(X \leq x^*) + P(X = x^*) = 1 - c\,. \blacklozenge$$

Discendono direttamente dalle definizioni alcune proprieta' formali di cui gode il *var* e che lo caratterizzano come una mfr positivamente omogenea ma non convessa e non subadditiva:

10. $$var(X + a) = var(X) - a$$

11. $$var(X) \leq var(Y) \quad \text{se} \quad X \geq Y$$

12. $$var(b\,X) = b\, var(X) \quad \text{se} \quad b > 0$$

10'. $$var(X + var(X)) = 0$$

12'. $$var(X) \leq 0 \quad \text{se} \quad X \geq \underline{0}$$

La (10) segue dall'osservare che se e': $c = P(X \leq x^*)$ e' anche:
$c = P(X + a \leq x^* + a)$, dunque $var(X+a) = -x^* - a = var(X) - a$.

La (10’) e’ un caso particolare della (10).

La (11) e (11’) seguono dall’osservare che : se $X \geq Y$ allora
$\forall x : P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$.

La (12) discende dall’ identita’: $P(X \leq x^*) = P(b X \leq b x^*)$ per $b > 0$.

Un caso particolarmente interessante e ampiamente utilizzato riguarda il *var* di una vc U distribuita normalmente, in tal caso risulta sempre:

13. $$U = \mu + \sigma . Z$$

essendo *Z* una vc normale standardizzata avente distribuzione:

14. $$N(x) = P(Z \leq x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-s^2/2)\, ds$$

con :

15. $$E(Z) = 0 \quad , \quad V(Z) = 1$$

(E(.) e V(.) indicano rispettivamente il valor medio e la varianza)

In base alla definizione di *var* risulta allora:

16. $$var_c(Z) = - N^{-1}(c)$$

e dunque per le (11) e (12) :

16. $$var_c(U) = var_c(\mu + \sigma . Z) = var_c(\sigma . Z) - \mu = -(\mu + \sigma N^{-1}(c))$$

Come gia’ detto il *var* non sempre e’ subadditivo.
Cosi’ ad esempio se X e’ distribuita simmetricamente rispetto all’origine allora $var(-X) = var(X)$, pertanto : $var(X+(-X)) = var(\underline{0}) \neq var(X) + var(-X)$
$= 2\, var(X)$.

Cosi’ (ADEH) si considerino due vc X e Y indipendenti e identicamente distribuite, aventi densita’ di probabilita’ $\varphi = 0{,}05$ in $[-2 , 0]$ e
$\varphi = 0{,}90$ in $[0 , 1]$. Semplici ma laboriosi calcoli mostrano che $E(X) = E(Y) > 0$.
Posto $c = 0{,}1$ si ha $var(X) = var(Y) = 0$ mentre risulta $var(X+Y) > 0$.

Il *var* e' invece subadditivo per vc X e Y che sono indipendenti e distribuite normalmente; infatti, come ben noto, la somma di due vc normali indipendenti e' una vc normale avente come valor medio la somma dei valori medi e come varianza la somma delle varianze, pertanto in tal caso, con riferimento alla (16) si ha :

$$var_c\,(X) = var\,(\mu_1 + \sigma_1.Z)$$

$$= var_c\,(\sigma_1.Z) - \mu_1 = -(\mu_1 + \sigma_1 N^{-1}(c))$$

$$var\,(Y) = var\,(\mu_2 + \sigma_2 Z) = var(\sigma_2.Z) - \mu_2$$

$$= -(\mu_2 + \sigma_2 N^{-1}(c))$$

$$var\,(X+Y) = -[\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}.N^{-1}(c)]$$

dunque per $c < ½$:

$$var\,(X) + var\,(Y) - var\,(X+Y) = -N^{-1}(c)\,[(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}] > 0$$

6.

Riassumendo: se X e' la vc che rappresenta il valore al tempo T ,(orizzonte economico), di un dato portafoglio finanziario, nell'ipotesi che nell'intervallo (0,T) non sia mutata la composizione del portafoglio stesso, il $var_c(X)$
- *var* assoluto - misura, con probabilita' (1-c), il minimo valore assunto dal portafoglio in *t* , ovvero misura, con probabilita' c , il massimo valore assunto dal portafoglio in *t*. In altre parole in termini finanziari il var_c misura una perdita (con segno): la probabilita' di una perdita superiore al *var* e' pari a *c*, mentre la probabilita' di una perdita inferiore al *var* e' pari a: 1- c.
Solitamente vengono adottati per c i valori 0,01 o 0,05 -(1-c = 0,99 o 0,95)-.

Oltre al *var* assoluto si suole misurare anche il *var relativo al valore iniziale*, *relativo al valore atteso*, *relativo al rendimento*; sono i *var* associati alle seguenti vc :

1. $X_1 = X(t) – X(0)$

2 . $X_2 = X(t) – M(X(t))$

3. $R(t) = [X(t) – X(0)] / X(0)$

In tal caso posto :

4. $\underline{\mu} = E(R(t)) \quad , \quad \underline{\sigma}^2 = V(R(T))$

5. $R^* = - \text{var } R(t)$

osservando che:

6. $X_1 = R(t)\, X(0)$

7. $X_2 = R(t)\, X(0) + X(0) - E(X(t))$

abbiamo con ovvio significato dei simboli:

8 . $X_1^* = X(0)\, R^*$

9. $X_2^* = X(0)\, [\, R^* - \underline{\mu}\,] = X_1^* - \underline{\mu}\, X(0)$

Ipotizzando per R(t) una distribuzione normale $N(\underline{\mu},\underline{\sigma})$, riprendendo quanto gia' scritto al paragrafo precedente, possiamo allora osservare che:

10. $P(\, R \leq R^*\,) = c \quad \Leftrightarrow \quad P\, [\, (R- \underline{\mu}) / \underline{\sigma} \leq (R^* - \underline{\mu}) / \underline{\sigma}\,] = c$

ed essendo $(R- \underline{\mu}) / \underline{\sigma}$ distribuita come una vc normale standard, sia *Z* , indicando con N(.) la distribuzione di *Z*, posto:

11. $\alpha(c) = N^{-1}(c) \quad \Leftrightarrow \quad c = N(\alpha(c))$

abbiamo:

12. $\alpha(c) = (R^* - \underline{\mu}) / \underline{\sigma}$

13 . $R^* = \alpha(c).\underline{\sigma} + \underline{\mu}$

14. $var_c(R) = - \alpha(c).\underline{\sigma} - \underline{\mu}$

I valori di $\alpha(c)$ sono individuabili anche dalle tavole che riportano i valori della distribuzione di *Z* . Adottando per c i valori c=0,01 ovvero c=0,05 abbiamo in corrispondenza:

15. $\alpha(0{,}01) = - 2{,}33 \quad ; \quad \alpha(0{,}05) = - 1{,}65$

7.

Il *var* di X non e' in generale subadditivo e considera solo un valore "della coda sinistra" della distribuzione di X e dunque possono avere lo stesso *var* anche vc che differiscono notevolmente tra loro. Queste le principali considerazioni che hanno suggerito l'adozione, al posto del *var*, di misure che tengono conto dei valori assunti da X "al di sotto del *var*": l' "**average value at risk**" ,(***avar***), detto anche "expected shortfall", la "**tail conditional expectation**" , (***tce***) , la "**worst conditional expectation**", (***wce***) :

1. $$avar_c\,(X) = c^{-1}\int_o^c var_x\,dx$$

2. $$tce_c\,(X) = -\ c^{-1}\,E[\,X \mid X \le x^*]$$

3. $$wce_c\,(X) = -\inf\{\,E[\,X \mid A]\ ;\ P(A) > c\}$$

Per distribuzioni assolutamente continue la (1) e la (2) coincidono. Infatti essendo in tal caso:

4. $$avar_c\,(X) = c^{-1}\int_o^c \Phi^{-1}(z)dz$$

con un cambiamento di variabili, posto : $x= \Phi^{-1}(z)$, $x = (1/ \varphi(z))\, dz$,
con $-\infty = \Phi^{-1}(0)$, $-\,var_c = \Phi^{-1}(c)$, si ha :

5. $$\int_0^c \Phi^{-1}(z)\,dz = \int_{-\infty}^{-varc} x\,\varphi(x)\,dx$$

L'$avar_c$ misura dunque il valor medio delle perdite a cui si va' incontro nel c% dei casi; questa mfr appare soddisfacente anche sotto il profilo formale sia per la continuita' della dipendenza della misura del rischio dal livello di confidenza, sia perche' a partire dall'identita' (5) si puo' mostrare che e' una mfr risulta positivamente omogenea e subadditiva e che quindi e' coerente.

8.

Sfruttando il fatto che la combinazione convessa di misure di rischio coerenti e' ancora una misura di rischio coerente, si puo' ottenere, a partire dall'*avar* , tutta una famiglia di misure coerenti di rischio dette "**misure spettrali di rischio**" (C.Acerbi: Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion- Journal of Banking and Finance- 2002-) e che risultano definite dalla condizione:

1. $$M(X) = -\int_0^1 \Phi^{-1}(z)\psi(z)\,dz$$

con:

2 . $$\int_0^1 \psi(z)\,dz = 1$$

3. $\psi(z)$ non negativa e non crescente in [0,1]

tali misure rispecchiano, attraverso $\psi(z)$, l'atteggiamento del soggetto valutatore verso i possibili valori a scadenza del portafoglio in quanto $\psi(z)$ e' il "peso" che il soggetto attribuisce a $\Phi^{-1}(z)$. Nella (1) si ritrova l' *avar* se il "peso" si sceglie eguale ad 1/c nell'intervallo (0, c) e zero successivamente.

Data la vc X avente distribuzione $\Phi(.)$, posto:

$$H(x) = \int_0^x \Phi^{-1}(z)\,dz$$

integrando per parti si ha:

4. $$\int_0^1 \Phi^{-1}(z)\psi(z)\,dz = \int_0^1 \psi(z)\,dH(z) = \psi(z)\,H(z)\Big|_0^1 - \int_0^1 H(z)d\psi(z)$$

$$= \psi(1)\,H(1) - \int_0^1 z.H(z)d\psi(z) = \psi(1)\,E(X) - \int_0^1 z.\,avar_z.d\psi(z)$$

Non essendo restrittivo supporre $\psi(1) = 0$, osservando che e' : $-z.\,d\psi(z) \geq 0$ e che per la (2) e' altresi':

$$\int^1 -zd\psi(z) = -z\psi(z)\Big|^1 + \int^1 \psi(z)dz = 1$$

0 0 0

possiamo identificare : - $z\psi'(z)$ con la densita' di probabilita' φ di una vc Y a valori in [0,1]. Dalla (1) e (4) abbiamo pertanto:

5. $$M(X) = -\int_0^1 \Phi^{-1}(z)\psi(z)\,dz = \int_0^1 \mathit{avar}_z\, \varphi(z)dz$$

Essendo immediato osservare che il valor medio e' una misura coerente, possiamo introdurre (P. Manca) due altre semplici famiglie di misure coerenti di rischio.
Con la notazione:

6. $$E(x, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx$$

essendo φ la densita' di probabilita' di X, chiamiamo *densita' soggettiva di misura di rischio* (dsr) una funzione θ non negativa caratterizzata dalle condizioni:

7. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, dx = 1$$

8. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \theta(x)\, dx = 1$$

E' immediato verificare che (con abuso di notazione) :

9. $$E(x\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \theta(x)\, \varphi(x)\, dx$$

e' una misura coerente.
Posto:

10. $$y = x\,\theta(x)$$

11. $$\mu = \theta(x)\varphi(x)$$

si ottengono allora le misure coerenti :

$+\infty$

12. $$E(y, \varphi)) = \int_{-\infty} y.\ \varphi(x)\, dx$$

13. $$E(x, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \mu(x)\, dx$$

sostanzialmente due valori medi: il primo calcolato alterando la scala della misura di valore, il secondo calcolato alterando la scala della misura di probabilita'.

Nota: Una funzione $\theta(.)$ caratterizzata dalle condizioni (7) e' (8) si puo' sempre ottenere a partire da una generica una funzione non negativa e integrabile h(.). Posto:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx \qquad \text{con } \alpha \neq 0$$

posto:

$$\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)\, dx$$

$$\psi = \alpha^{-1}h + \gamma g$$

con $g > 0$ dispari e limitata ed $E(g) \neq 0$

abbiamo :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx = \alpha^{-1}\beta + \gamma\, E(g)$$

si tratta allora di scegliere γ in modo che risulti : $\alpha^{-1}\beta + \gamma\, E(g) = 1$.
cioe' : $\gamma = -\alpha^{-1}\beta / E(g)$.♦

9.
Abbandoniamo ora l'ipotesi che la distribuzione di una vc sia assolutamente continua e propriamente crescente: sostanzialmente i risultati presentati non cambiano ma aumentano notevolemente le difficolta' tecniche di trattazione.

Come noto $\Phi(.)$ e' in ogni caso una funzione **monotona non decrescente continua a destra** limitata che presenta quindi al piu' una infinita' numerabile di punti di discontinuita' e precisamente in corrispondenza ai valori di x per cui risulta: $P(X = x) \neq 0$, essendo sempre:

1. $$\Phi(x) = \Phi(x^{+}) = \Phi(x^{-}) + P(X = x)$$

E' noto cosa si intenda per funzione inversa di una funzione strettamente crescente (decrescente); si puo' estendere il concetto di funzione inversa anche a funzioni monotone non decrescenti (non crescenti). Con riferimento alla distribuzione $\Phi(x)$ si definisce sua **inversa** (generalizzata) ogni funzione $q(s)$ tale che :

2. $$\Phi(q^{-}(s)) \leq s \leq \Phi(q^{+}(s)) \qquad \forall\ s \in [0,1]$$

essendo:

3. $$q^{-}(s) = \sup\{x : P(X < x) < s\} = \inf\{x : \Phi(x) \geq s\}$$

3'. $$q^{+}(s) = \inf\{x : \Phi(x) > s\} = \sup\{x : P(X < x) \leq s\}$$

le cosiddette, rispettivamente, funzione inversa continua a sinistra, funzione inversa continua a destra.

Nota:In quanto segue utilizzeremo l'inversa continua a destra anche a motivo della formula (9), precisando tuttavia che anche la scelta di un'altra inversa sarebbe altrettanto ragionevole.♦

L'inversa generalizzata q di una funzione di distribuzione dicesi **quantile** e il valore $q(c)$ per $c \in (0,1)$ dicesi **c-quantile**.
Assegnata la distribuzione $\Phi(.)$ indicheremo con $\underline{\Phi}^{-1}(.)$ la sua inversa generalizzata continua a destra:

4. $$\underline{\Phi}^{-1}(s) = q(s)^{+}$$

Nota: Con diverso linguaggio ma eguale significato, assegnato $c \in (0,1)$ si definisce **c-quantile** associato alla vc X ogni numero q che soddisfa ad una delle seguenti equivalenti condizioni:

a- $$P(X < q) \leq c \leq P(X \leq q)$$

b- $$P(X \leq q) \geq c \quad \text{and} \quad P(X \geq q) \geq 1-c$$

c- $$\Phi(q^{-}) \leq c \quad \text{and} \quad \Phi(q) \geq c$$

Notando che:

5. $$P(X \leq q) - P(X < q) = P (X = q)$$

dalla (a) si ottengono per q le condizioni equivalenti:

6. $$\Phi(q) - P(X = q) \leq c \leq \Phi(q) \ \blacklozenge$$

Nota: Se nel generico punto x_o la distribuzione $\Phi(.)$ e' strettamente crescente ed e' : $\Phi(x_o) = s_o$ allora risulta: $q^-(s) = q^+(s)= x_o$.
Se (a,b) e' il massimo intervallo aperto su cui $\Phi(.)$ assume valore costante s_o allora risulta: $q^-(s_o) = a$, $q^+ s_o) = b$.
In definitiva $q^-(.)$ e $q^+(.)$ differiscono solo in corrispondenza "ai tratti in cui $\Phi(.)$ resta costante".♦

Nota: Per illustrare le ultime considerazioni esposte valgano i seguenti esempi.
Consideriamo la vc X (esito del lancio di un dado equilibrato) che puo' assumere i valori 1,2,3,4,5,6 ciascuno con probabilita' 1/6 .
Posto $c = 1/6$ abbiamo: $q^+(c) = 2$, $q^-(c) = 1$, $\Phi(1) = 1/6 = c$,
$\Phi(2) = 2/6$ con $\Phi(2) > c$.
Posto $c = 1/6 +0, 01$ abbiamo: $q^+(c) = q^-(c) = 2$, $\Phi(2) = 2/6 > c$ ♦

Con le premesse fatte, dalla formula definitoria del *var* :

$$var_c (X) = \inf \{ m : P(X + m < 0) – c \leq 0 \}$$

possiamo in ogni caso scrivere :

7. $$var_c (X) = - q^+(c) = -\underline{\Phi}^{-1}(x)$$

ed anche:
8. $$var_c (X) = q^-_{-X}(1-c)$$

in quanto:

$$\inf \{ m : P(X + m < 0) – c \leq 0 \} = \inf \{ m : P(X + m < 0) \leq c \}$$

$$= \inf \{ m : P(X < -m) \leq c \} = \inf \{- m : P(X < m) \leq c \}$$

$$= - \sup \{ m : P(X < m) \leq c \} = - q^+(s)$$

Nota: osserviamo che ove sia assolutamente continua e propriamente crescente la (6) coincide con la (5) del par.5♦

Valgono anche in questo caso le proprieta' gia' mostrate al par. 5: il *var* e' una mfr positivamente omogenea ma non subadditivita' cosi' come mostrano anche i seguenti ulteriori esempi.

Consideriamo due portafogli il cui valore a scadenza e' esposto nella seguente tabella:

prob	X	Y	X+Y
3%	108	0	108
2%	108	100	208
3%	0	108	108
2%	100	108	208
90%	108	108	216

Con riferimento alle variazioni rispetto al valor medio, posto:

$$X_1 = X - E(X) \,,\quad Y_1 = Y - E(Y)$$

essendo : $E(X) = E(Y) = 104{,}6$; $E(X+Y) = 209{,}2$,

abbiamo :

prob	X_1	Y_1	X_1+Y_1
3%	3,4	-104,6	-101,2
2%	3,4	-4,6	-1,2
3%	-104,6	3,4	-101,2
2%	- 4,6	3,4	-1,2
90%	3,4	3,4	7,8

Per cui sia X_1 che Y_1 assumono:

il valore : -104,6 con probabilita' p=0,03

il valore : -4,6 con probabilita' p=0,02 il valore : 3,4 con probabilita' p=0,95

Per cui $X_1 + Y_1$ assume:

il valore : -101,2 con probabilita' p=0,06

il valore : -1,2 con probabilita' p=0,04

il valore : 7,8 con probabilita' p=0,9

Per c = 5% abbiamo allora:

$var_c\,(X_1) = 4{,}6 \quad , \quad var_c\,(Y_1) = 4{,}6 \quad , \quad var_c\,(X_1+Y_1) = 101{,}2$

10.
Nel caso in cui la distribuzione di X non sia assolutamente continua e propriamente crescente l' *avar* risulta definito da:

1. $avar_c\,(X) = c^{-1}\int_o^c var_x\,dx = -\,c^{-1}\int \underline{\Phi}^{-1}(p)\,dp$

si tratta di una mrf coerente -(C. Acerbi – D. Tasche: On the coherence of expected shortfall – 2002) – e risulta:

2. $avar_c\,(X) = -\,c^{-1}\{\ E[\,X \mid X \leq x^*] - x^*\,[P(\,X \leq x^*) - c\,]\ \}$

per cui l'*avar* , che e' mrf coerente, viene ad assumere lo stesso valore della *tce* , che non e' in generale coerente, solo ove : P(X ≤ x*) = c.
Si dimostra inoltre che e' sempre:

3. $var_c\,(X) \leq tce_c\,(X) \leq wce_c(X) \leq avar_c\,(X)$

Una mrf si dice *invariante per legge* se risulta ρ(X) = ρ(Y) se X e Y hanno la stessa distribuzione.
Una mrf si dice *continua dall'alto* (from above) se per da $X_n\downarrow X$ segue $\rho(X_n)\downarrow \rho(X)$.
Non esiste una misura minimale coerente che domina il *var* ma se restringe il campo alle misure continue dall'alto e invarianti per distribuzione allora l'*avar* e' la mfr minimale che domina il *var* .

Anche per le misure spettrali di rischio occorre generalizzare quanto esposto al par. 8 ponendoci in un contesto di funzioni misurabili. Seguendo Acerbi porremo allora:

4. $$M(X) = - \int_0^1 \underline{\Phi}^{-1}(z)\psi(z)\, dz$$

con:

5. $$\int_0^1 \psi(z)\, dz = 1$$

6. $\psi(z)$ non negativa e non crescente quasi ovunque in [0,1]

Anche in questo caso piu' generale Acerbi ha mostrato che la (1) definisce una mfr coerente se e solo se la $\psi(.)$ soddisfa le condizioni (2) e (3).