Università degli Studi di Pisa
Dipartimento di Statistica e Matematica
Applicata all'Economia

Report n. 290

Il ruolo della complementarità stretta in programmazione matematica

Giorgio Giorgi

Pisa, dicembre e anno 2006
- Stampato in Proprio –

Via Cosimo Ridolfi, 10 - 56124 PISA - Tel. Segr. Amm. 050 2216231 Segr. Stud. 050 2216317 Fax 050 2216375
Cod. Fisc. 80003670504 - P. IVA 00286820501 - Web http://statmat.ec.unipi.it/ - E-mail: dipstat@ec.unipi.it

IL RUOLO DELLA COMPLEMENTARITÀ STRETTA IN PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

GIORGIO GIORGI

Facoltà di Economia – Università di Pavia

Lavoro presentato in occasione del workshop
"Recenti sviluppi ed applicazioni
della programmazione matematica"
Pisa , 7 aprile 2006 - Facoltà di Economia

SOMMARIO: Si prende in rassegna il ruolo che le condizioni di complementarità stretta (c.s.) svolgono nei problemi di programmazione matematica. Vengono esaminati i seguenti casi: A) Complementarità stretta e condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine; B) Complementarità stretta e condizioni di ottimalità sufficienti del primo ordine; C) Complementarità stretta e regolarità della matrice Jacobiana delle relazioni di Karush-Kuhn-Tucker; D) Complementarità stretta e analisi di sensitività; E) Complementarità stretta e problemi di programmazione lineare.

Sia dato il seguente problema di programmazione non lineare

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{c} \min f(x) \\ x \in S \end{array}$$

ove $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p\}$

e per il quale supponiamo (almeno per il momento) che le funzioni in esso implicate siano differenziabili in un insieme aperto $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Come è noto [15, 16, 23, 35], se x^0 è soluzione locale di (P) e se vale in x^0 una condizione di qualificazione dei vincoli, esistono allora moltiplicatori $u^0 = [u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0], w^0 = [w_1^0, w_2^0, \ldots, w_p^0]$ tali che ("condizioni di Karush-Kuhn-Tucker")

$$u_i^0 \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

$$u_i^0 g_i(x^0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$\nabla \mathrm{L}(x^0, u^0, w^0) = 0 \tag{3}$$

ove $\mathrm{L}(x, u, w) = f(x) - u\, g(x) + w\, h(x)$ è la *funzione lagrangiana* associata al problema (P).

Sia ora $x^0 \in S$; denotiamo con $I(x^0)$ l'insieme degli indici dei *vincoli attivi* (o *effettivi* o *aderenti*) in x^0, ossia

$$I(x^0) = \{i \mid g_i(x^0) = 0\}.$$

Diciamo poi che per una terna (x^0, u^0, w^0) che soddisfa le condizioni (1)-(3) di Karush-Kuhn-Tucker valgono le *condizioni di complementarità stretta* se risulta

$$u_i^0 > 0, \quad \forall i \in I(x^0).$$

Le condizioni di complementarità stretta sono spesso imposte sul problema (P), eventualmente assieme alla condizione di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi ed usualmente nel discutere condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine. Tuttavia, contrariamente ad altre condizioni imposte su (P), il ruolo della complementarità stretta ha ricevuto attenzioni solo parziali ed incomplete. In parecchi testi sulla programmazione non lineare la complementarità stretta viene semplicemente definita e solo in alcuni avanzati testi di programmazione lineare [28, 41] tale proprietà viene più a fondo utilizzata, specialmente nello studio del cosiddetto metodo "primale-duale".

Nel presente lavoro si prenderanno in considerazione i principali casi nei quali la complementarità stretta svolge un ruolo importante o addirittura indispensabile nei problemi di programmazione matematica.

Prima di analizzare i suddetti casi, richiamiamo alcune definizioni.

Il punto $x^0 \in S$ è punto di minimo locale per (P) se esiste un intorno $U(x^0)$ tale che

$$f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in S \cap U(x^0).$$

Se la precedente disuguaglianza è verificata strettamente per $x \neq x^0$, allora x^0 è punto di minimo locale *stretto* per (P). Se, con $k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x^0) + \alpha(\|x - x^0\|)^k, \quad \forall x \in S \cap U(x^0),$$

allora x^0 è punto di minimo locale *stretto di ordine k*. Se è $k = 1$, il punto x^0 è anche chiamato punto di minimo locale *forte* o *stringente* ("sharp") o *fortemente unico*. Quest'ultima terminologia è dovuta a Cromme (1978) che utilizzò tale concetto in uno studio su metodi numerici iterativi; si veda [42]. Tali definizioni si trovano precedentemente anche in Hestenes [14, 15]. Notiamo che:

i) Se x^0 è punto di minimo locale stretto di ordine k, allora è anche punto di minimo locale stretto di ordine m, per ogni $m > k$;

ii) È evidente che ogni punto di minimo locale stretto di ordine k è punto di minimo locale stretto, tuttavia il contrario non vale. Per esempio, se f: $[0, +\infty]$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}}, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

il punto $x^0 = 0$ è punto di minimo locale stretto ma non di minimo locale stretto di ordine k, per qualsiasi $k \in \mathbf{N}$.

Se esiste un intorno $U(x^0)$ tale che x^0 è l'*unico* punto di minimo locale in $U(x^0)$ per (P), allora x^0 è detto punto di minimo locale *isolato* (si veda anche [10, 31]).

A) *Complementarità stretta e condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine*

Sono note le seguenti condizioni del secondo ordine, dovute a Pennisi [26] e riprese da Mc Cormick [21], affinché un punto x^0 sia di minimo locale stretto per (P). Definiamo prima gli insiemi

$$I^+(x^0, u^0) = \{i \mid i \in I(x^0),\ u_i^0 > 0\}$$

$$\begin{aligned} Z(x^0, u^0) = \{&z \in \mathbf{R}^n \mid z^T \nabla g_i(x^0) = 0, \\ &i \in I^+(x^0, u^0);\ z^T \nabla g_i(x^0) \geq 0, \\ &i \in I(x^0) \setminus I^+(x^0, u^0);\ z^T \nabla h_j(x^0) = 0, \quad j = 1, \ldots, p\}. \end{aligned}$$

Teorema 1. Se le funzioni che definiscono il problema (P) sono di classe C^2 in un intorno di $x^0 \in S$, allora x^0 è punto di minimo locale stretto per (P) se esistono vettori di moltiplicatori $u^0 \in \mathbf{R}^m$ e $w^0 \in \mathbf{R}^p$ tali che soddisfano le condizioni (1)-(3) di Karush-Kuhn-Tucker e inoltre la condizione

$$z^T \nabla^2 L(x^0, u^0, w^0)\, z > 0, \quad \forall\, z \neq 0, z \in Z(x^0, u^0).$$

Han e Mangasarian [13] hanno notato che le restrizioni su z sono equivalenti a:

$$z \neq 0, z^T \nabla f(x^0) = 0; \; z^T \nabla g_i(x^0) \geq 0, \; i \in I(x^0); \; z^T \nabla h_j(x^0) = 0, \; j = 1, \ldots, p.$$

Va sottolineato che il precedente teorema non fornisce condizioni affinché x^0 sia anche punto di minimo (locale) *isolato*, come erroneamente affermato in Fiacco e Mc Cormick [7] e Mc Cormick [22, 23].

Un controesempio è offerto da Robinson [27] e da Still e Streng [35]. In particolare, Robinson dimostra che x^0 è punto di minimo locale isolato per (P) se le condizioni sufficienti del secondo ordine espresse dal teorema 1 valgono per *tutte* le coppie di moltiplicatori (u^0, w^0) associate a x^0 e se in x^0 vale inoltre la condizione di qualificazione dei vincoli di Mangasarian-Fromovitz [35], ossia:

(i) Esiste un vettore $y \in \mathbf{R}^n$ tale che $y^T \nabla g_i(x^0) > 0$, $\forall\, i \in I(x^0)$; $y^T \nabla h_j(x^0) = 0$, $\forall\, j = 1, \ldots, p$;

(ii) I gradienti $\nabla h_j(x^0)$, $j = 1, \ldots, p$, sono linearmente indipendenti.

Il fatto che x^0 sia punto di minimo (locale) isolato ha importanti implicazioni per gli sviluppi algoritmici.

Si sottolinea inoltre (si veda [35], ma il risultato era già stato anticipato da Hestenes [14, 15]) che il teorema 1 permette i realtà di concludere che x^0 è punto di minimo locale stretto di ordine 2:

$$f(x) \geq f(x^0) + \alpha(\|x - x^0\|)^2, \quad \forall\, x \in S \cap U(x^0).$$

Ovviamente, se è $I^+(x^0, u^0) = I(x^0)$, ossia vale per (P) la complementarità stretta, è possibile utilizzare le note condizioni sul segno di una forma quadratica vincolata da un sistema lineare omogeneo: cfr. [38].

Nella letteratura, soprattutto economica, si trova il seguente risultato, essenzialmente dovuto ad El-Hodiri [6] e ripreso da Takayama [38], Castagnoli e Peccati [4], Simon e Blume [34].

"Se, oltre alle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, per il punto $x^0 \in S$ risulta $z^T \nabla^2 L(x^0, u^0, w^0)\, z > 0$, $\forall\, z \neq 0$, tale che $z^T \nabla g_i(x^0) = 0$, $i \in I(x^0)$; $z^T \nabla h_j(x^0) = 0$, $j = 1, \ldots, p$, allora x^0 è punto di minimo locale stretto per (P)."

Il seguente controesempio dimostra che tale risultato è errato e che non si può completamente prescindere dalle condizioni di complementarità stretta.

Sia dato il problema (in $\mathbf{R}^2$):

$$\min \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\text{sub} - x^2 \geq 0.$$

Si verifica facilmente che $x^0 = (0, 0)$ e $u^0 = 0$ soddisfano le condizioni del risultato richiamato (si noti che non vale la complementarità stretta). Si vede però che x^0 *non* è punto di minimo locale, perché la funzione obiettivo può essere diminuita muovendoci da x^0 lungo la direzione ammissibile $(0, -1)$.

B) *Complementarità stretta e condizioni di ottimalità sufficienti del primo ordine*

Introduciamo il seguente cono:

$P(x) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, z^T \nabla f(x) \leq 0,\ z^T \nabla g_i(x) \geq 0,\ i \in I(x^0);\ z^T \nabla h_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, p\}$.

È nota (cfr. [35]) la seguente condizione sufficiente di ottimalità del primo ordine per (P).

Teorema 2. Sia $x^0 \in S$; se risulta $P(x^0) = \{0\}$, ossia il seguente sistema

$$\begin{cases} z^T \nabla f(x^0) \leq 0 \\ z^T \nabla g_i(x^0) \geq 0, & i \in I(x^0) \\ z^T \nabla h_j(x^0) = 0, & j = 1, \dots, p, \end{cases}$$

non ammette soluzioni $z \neq 0$, allora x^0 è punto di minimo locale stretto per (P).

La condizione espressa dal precedente teorema è equivalente a:

$$\nabla f(x^0) \in \operatorname{int}\left\{ \sum_{i \in I(x^0)} u_i^0 \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{p} w_j^0 \nabla h_j(x^0) = 0;\ u_i^0 \geq 0,\ i \in I(x^0);\ w_j^0 \in \mathbf{R}, j = 1, \dots, p \right\}.$$

Notiamo inoltre che la condizione espressa dal precedente teorema permette in realtà di affermare che x^0 è punto di minimo locale stretto di *ordine uno* per (P). Si vedano anche i lavori [5, 10, 14, 15]. Analizziamo ora il ruolo che la complementarità stretta svolge per le suddette condizioni sufficienti di ottimalità del primo ordine.

Teorema 3. Sia $x^0 \in S$; si supponga che tra i vettori $\nabla f(x^0)$; $\nabla g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$, $\nabla h_j(x^0)$, $j = 1, \dots, p$, ve ne siano n linearmente indipendenti. Allora $P(x^0) = \{0\}$ se e solo se esistono moltiplicatori $u_i^0 > 0$ e $w_j^0 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\nabla f(x^0) = \sum_{i \in I(x^0)} u_i^0 \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{p} w_j^0 \nabla h_j(x^0) \tag{4}$$

Dimostriamo prima il seguente lemma.

Lemma 1. Sia $x^0 \in S$ e sia $P(x^0) = \{0\}$; allora esistono moltiplicatori $u_i^0 > 0$, $i \in I(x^0)$; $w_j^0 \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, p$, tali che valga la (4).

Dimostrazione. In base alle ipotesi del lemma, nessuno dei seguenti sistemi lineari ammette soluzione:

$$\begin{cases} z^T \nabla g_l(x^0) > 0 \\ z^T \nabla f(x^0) \le 0 \\ z^T \nabla g_i(x^0) \ge 0, \quad i \in I_l(x^0) = I(x^0) \setminus \{l\} \\ z^T \nabla h_j(x^0) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{cases}$$

per ogni $l \in I(x^0)$, e

$$\begin{cases} z^T \nabla f(x^0) < 0 \\ z^T \nabla g_i(x^0) \ge 0, \quad i \in I(x^0) \\ z^T \nabla h_j(x^0) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Il noto teorema di Farkas (cfr. [36]) garantisce l'esistenza di numeri $r_l \ge 0$, $p_l \ge 0$, q_k e $p_i^l \ge 0$, q_k^l tali che

$$r_l \nabla f(x^0) = \nabla g_l(x^0) + \sum_{i \in I_l(x^0)} p_i^l \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{p} q_j^l \nabla h_j(x^0)$$

e

$$\nabla f(x^0) = \sum_{i \in I(x^0)} p_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{p} q_j \nabla h_j(x^0).$$

Sommando tali equazioni e dividendo per $r = \left(1 + \sum_{l \in I(x^0)} r_l\right)$, otteniamo la (4), con $u_k^0 = \left(1 + \sum_{i \in I(x^0)} p_k^l + p_k\right) / r$, essendo $u_k^0 > 0$. q

Dimostrazione del teorema 3. In base al precedente lemma, resta da dimostrare la parte "sufficiente" dell'enunciato. Supponiamo dunque che esistano moltiplicatori $u_i^0 > 0$ e w_j^0 tali che la (4) sia verificata.

Sia $z \in P(x^0)$. Allora

$$0 \ge z^T \nabla f(x^0) = \sum_{i \in I(x^0)} u_i^0 z^T \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{p} w_j^0 z^T \nabla h_j(x^0) \ge 0.$$

Ciò implica $z^T \nabla f(x^0) = 0$; $z^T \nabla g_i(x^0) = 0$, $i \in I(x^0)$; $z^T \nabla h_j(x^0) = 0$, $j = 1, \dots, p$.

Poiché n di queste equazioni sono linearmente indipendenti, $z^T = 0$ e il teorema è quindi completamente dimostrato.

Va notato che se tra i gradienti $\{\nabla g_i(x^0)\}$, $i \in I^+(x^0, u^0)$, $\{\nabla h_j(x^0)\}$, $j = 1, \dots, p$, ve ne sono n linearmente indipendenti, l'insieme $Z(x^0, u^0)$ collassa al solo vettore nullo. Di conseguenza, le condizioni sufficienti di ottimalità del secondo ordine sono, nel presente caso, ridotte alle sole condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, ossia le classiche condizioni necessarie del primo ordine diventano anche sufficienti (per un minimo locale stretto di ordine uno).

Per condizioni sufficienti del primo ordine per punti di minimo localmente isolati, si veda [31].

C) *Complementarità stretta e regolarità della matrice Jacobiana delle relazioni di Karush-Kuhn-Tucker*

Nel testo [9] Giannessi dimostra (pag. 162, teorema 3.3) il seguente risultato.

Teorema 4. Sia dato il problema "classico" di programmazione matematica

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \mathrm{Min}\, f(x),$$
$$x \in S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, p\}$$

ove le funzioni siano di classe C^2 in un intorno di $x^0 \in S$ ed ove la matrice Jacobiana $\nabla h(x^0)$ abbia caratteristica massima di modo che esiste un vettore di moltiplicatori $w^0 \in \mathbf{R}^p$ tale che

$$\nabla f(x^0) + w^0\, \nabla h(x^0) = 0.$$

Risulti poi $\det D(x^0, w^0) \neq 0$, ove

$$D(x, w) = \begin{bmatrix} \nabla^2 \mathrm{L}\ (x, w) & \nabla h(x) \\ (\nabla h(x))^T & 0 \end{bmatrix}$$

Allora x^0 è punto di minimo locale stretto (addirittura isolato) per (P_1) se e solo se ogni soluzione $y \neq 0$ della relazione $\nabla h(x^0)\, y = 0$ verifica la disuguaglianza

$$y^T\, \nabla^2 \mathrm{L}\ (x^0, w^0)\, y \geq 0,$$

essendo $\mathrm{L}\ (x, w) = f(x) + w\, h(x)$.

Tale risultato è interessante e deriva dal fatto che una matrice simmetrica A semidefinita e tale per cui è $|A| \neq 0$, risulta essere definita.

Vediamo ora come il risultato di Giannessi si generalizza al problema (P) tramite le condizioni di complementarità stretta.

Riscriviamo parte delle condizioni necessarie del primo ordine di Karush-Kuhn-Tucker, riferite ai generici vettori x, u, w:

$$\nabla \mathrm{L}\ (x, u, w) = 0 \tag{5}$$

$$u_i\, g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

$$h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, p\,. \tag{7}$$

Supponiamo che le funzioni f, g_i, h_j del problema (P) siano di classe C^2 in un intorno del punto $x^* \in S$ che verifica le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.

Differenziando le equazioni (5)-(7) rispetto a (x, u, w) otteniamo la seguente matrice M che è in sostanza la matrice Jacobiana delle relazioni di Karush-Kuhn-Tucker.

$$M(x,u,w)=\begin{bmatrix} \nabla^2 L\ (x,u,w); & -\nabla g_1(x);\ldots,-\nabla g_m(x); & & \nabla h_1(x),\ldots,\nabla h_p(x) \\ u_1(\nabla g_1(x))^T & g_1(x) & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ u_m(\nabla g_m(x))^T & 0 & g_m(x) & \\ (\nabla h_1(x))^T & & & \\ \vdots & & 0 & 0 \\ (\nabla h_p(x))^T & & & \end{bmatrix}$$

Ricordiamo ora le seguenti condizioni necessarie di ottimalità del secondo ordine per il problema (P). Si veda, ad esempio, [22, 23].

Teorema 5. Siano f, g_i e h_j di classe C^2 in un intorno di $x^* \in S$, essendo x^* soluzione locale di (P) e valga in x^* una condizione di qualificazione dei vincoli *del secondo ordine*. Allora, oltre alle condizioni (1)-(3) il punto x^* soddisfa la disuguaglianza

$$z^T \nabla^2 L\,(x^*, u^*, w^*)\, z \geq 0, \quad \forall\, z \in Z(x^*, u^*).$$

Il seguente risultato è dovuto a Mc Cormick [22, 23]

Teorema 6. Sia x^* soluzione locale di (P), ove le funzioni in esso implicate siano di classe C^2 in un intorno di x^*.

(i) Supponiamo che x^* soddisfi le condizioni necessarie di ottimalità del secondo ordine del teorema 5 e supponiamo che $M(x^*, u^*, w^*)$ sia regolare. Allora valgono per (x^*, u^*, w^*):

a) le condizioni sufficienti di ottimalità del secondo ordine;
b) le condizioni di complementarità stretta,
c) la indipendenza lineare dei gradienti $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$; $\nabla h_j(x^*)$.

(ii) Se per (x^*, u^*, w^*) valgono le precedenti condizioni a), b), c), allora $M(z^*, u^*, w^*)$ è regolare.

Il precedente teorema generalizza il risultato di Giannessi e pone in relazione la complementarità stretta con l'invertibilità della matrice M.

Può essere interessante porre anche in relazione l'indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi con condizioni di complementarità stretta.

Teorema 7. Sia $X^* \in S$ soluzione locale di (P) e siano i gradienti $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$; $\nabla h_j(x^*)$ linearmente indipendenti. Allora, per ogni $i \in I(x^*)$, risulta $u_i^* = 0$ se e solo se $\exists\, y \in C(x^*) = \{y \mid y^T \nabla g_i(x^*) \geq 0,\ \forall\, i \in I(x^*);\ y^T \nabla h_j(x^*) = 0, j = 1, \ldots, p\}$ tale che $y^T \nabla f(x^*) = 0$ ma $y^T \nabla g_i(x^*) > 0$.

Dimostrazione.

a) Sufficienza. Poiché x^* è soluzione locale di (P) ed i gradienti dei vincoli attivi sono l.i., si ha

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} u_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} w_j^* z^T \nabla h_j(x^*) = 0$$

da cui

$$y^T \nabla f(x^*) - y^T \sum_{\substack{j \in I(x^*) \\ j \neq i}} u_j^* \nabla g_j(x^*) + y^T \sum_{j=1}^{p} w_j^* \nabla h_j(x^*) = y^T u_i^* \nabla g_i(x^*). \tag{8}$$

Poiché $y^T \nabla h_i(x^*) = 0$, $\forall j = 1, ..., p$, $y^T \nabla g_j(x^*) \geq 0$, $\forall j \in I(x^*)$, $u_j^* \geq 0$, $\forall j \in I(x^*)$, da $y^T \nabla f(x^*) = 0$ segue che la (8) può sussistere solo se è $u_i^* = 0$.

b) Necessità. Poiché x^* è soluzione locale di (P), esisteranno moltiplicazioni u_i^* e w_j^* *unici* di Karush-Kuhn-Tucker. Di conseguenza sarà soddisfatta (cfr. [18]) la seguente condizione di qualificazione *stretta* di Mangasarian-Fromovitz:

I vettori $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I^*(x^*, u^*)$; $\nabla h_j(x^*)$ sono l.i. ed esiste $y \in \mathbf{R}^n$ tale che il sistema

$$\begin{cases} y^T \nabla g_i(x^*) > 0, & i \in I(x^*) - I^+(x^*, u^*) \\ y^T \nabla g_i(x^*) = 0, & i \in I^+(x^*, u^*) \\ y^T \nabla h_j(x^*) = 0, & j = 1, ..., p \end{cases}$$

ammette soluzione.

Tenendo conto delle condizioni di *K. – K. – T.* si ha inoltre $y^T \nabla f(x^*) = 0$.

Come conseguenza del precedente teorema abbiamo dunque il seguente risultato.

Corollario 1. Se $x^* \in S$ è soluzione locale di (P) e vale l'indipendenza lineare dei gradienti $\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$; $\nabla h_j(x^*)$, allora per ogni $i \in I(x^*)$ è $u_i^* > 0$ se e solo se $\forall y \in C(x^*)$, $y^T \nabla f(x^*) = 0$ implica $y^T \nabla g_i(x^*) = 0$.

D) *Complementarità stretta e analisi di sensitività*

Un'altra area di applicazione delle condizioni di complementarietà stretta è l'analisi della sensitività in programmazione matematica. È un problema che in Economia trova classiche applicazioni nello studio della "statica comparata" e del cosiddetto "teorema dell'inviluppo". Benché l'analisi della sensitività per un problema "classico" di programmazione matematica (ossia del tipo (P_1)) risalga sostanzialmente a Samuelson [29] e sia quasi sempre svolta in modo corretto [1, 16, 32] altrettanto non si può dire con riferimento a quelle opere di analisi economica nelle quali si vuole estendere i risultati "classici" al problema (P). Con pochissime eccezioni, gli economisti ignorano i seguenti risultati fondamentali di Fiacco [8].

Si consideri il problema

P(ε) $\min_x f(x, \varepsilon)$,

sub: $g_i(x, \varepsilon) \geq 0, \quad i = 1, ..., m$

$h_j(x, \varepsilon) = 0, \quad j = 1, ..., p$

ove $x \in \mathbf{R}^n$ $\varepsilon \in \mathbf{R}^k$ è un vettore di parametri. La funzione Lagrangiana di P(ε) è $L(x, u, w, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{p} w_j h_j(x, \varepsilon)$.

Teorema 8.

(i) Supponiamo che in P(ε) le funzioni siano di classe C^2 in x e in ε in un intorno di $(x^*, 0)$.

(ii) Valgano le condizioni sufficienti del secondo ordine per un minimo locale stretto di P(0) in x^*, con moltiplicazioni u^* e w^*.

(iii) I gradienti $\nabla g_i(x^*, 0)$, $i \in I(x^*)$; $\nabla h_j(x^*)$, $\forall j = 1, ..., p$, siano lineamenti indipendenti.

(iv) Valgano le condizioni di complementarietà stretta: $u_i^* > 0$, $\forall i \in I(x^*)$.

Allora:

a) x^* è punto di minimo locale *isolato* per P(0) è gli associati vettori di moltiplicatori u^* e w^* sono *unici*.

b) Per ε in un intorno di 0, esiste un'unica funzione vettoriale $y(\varepsilon) = [x(\varepsilon), u(\varepsilon), w(\varepsilon)]$ differenziabile con continuità, che soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine per il problema $P(\varepsilon)$, tale che $y(0) = (x^*, u^*, w^*) = y^*$ e quindi $x(\varepsilon)$ è punto di minimo locale isolato per $P(\varepsilon)$, con associati vettori di moltiplicazioni $u(\varepsilon)$ e $w(\varepsilon)$ unici.

c) Per ε in un intorno di 0, l'insieme dei vincoli attivi rimane immutato, vale la condizione di complementarietà stretta e i vincoli attivi sono linearmente indipendenti in $x(\varepsilon)$.

d) Risulta

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx(0)}{d\varepsilon} \\ \dfrac{du(0)}{d\varepsilon} \\ \dfrac{dw(0)}{d\varepsilon} \end{bmatrix} = -M^{-1}(x^*, u^*, w^*)\, N(x^*, u^*, w^*)$$

ove $M(x^*, u^*, w^*)$ è la matrice che compare nel teorema 6 ed è

$$N(x^*, u^*, w^*) = [\nabla^2_{\varepsilon x} L^T, u_1 \nabla^T_\varepsilon g_1, \ldots, u_m \nabla^T_\varepsilon g_m, \nabla^T_\varepsilon h_1, \ldots, \nabla^T_\varepsilon h_p]$$

essendo tutte le quantità valutate in (x^*, u^*, w^*).

Teorema 9. Se le condizioni del teorema 8 valgono per P(ε), allora in un intorno di $\varepsilon = 0$:

a) $f^*(\varepsilon) = L^*(\varepsilon)$,
ove $f^*(\varepsilon) = f[x(\varepsilon), \varepsilon]$ è la *funzione del valore ottimale* e $L^*(\varepsilon) = L[x(\varepsilon), u(\varepsilon), w(\varepsilon)]$ è la funzione Lagrangiana del valore ottimale.

b) Risulta

$$\nabla_\varepsilon f^*(\varepsilon) = \nabla_\varepsilon L = \nabla_\varepsilon f - \sum_{i=1}^{m} u_i(\varepsilon) \nabla_\varepsilon g_i + \sum_{j=1}^{p} w_j(\varepsilon) \cdot \nabla_\varepsilon h_j.$$

Come abbiamo già accennato, parecchi libri ed articoli di economia matematica ignorano il ruolo della complementarietà stretta nello studio della sensitività per problemi con vincoli espressi da disuguaglianze. È il caso, ad esempio, di Intriligator [16], di Castagnoli e Peccati [4], Mas-Colell, Whinston e Green [20], Carter [3], Simon e Blume [34]. Anche Takayama [37, 38, 39, 40], non è molto preciso al riguardo; si veda anche [11]. Un'eccezione è rappresentata da Novshek [25] che esplicitamente osserva: "With strict complementary slackness, the active inequality constraints may be treated as equality constraints for small changes in the parameters ... The only potential new difficulty involves a failure of strict complementary slackness, where some active constraint has corresponding multiplier zero".

Di fatto, il venire meno della complementarietà stretta può rendere non differenziabile la funzione $y(\varepsilon) = [x(\varepsilon), u(\varepsilon), w(\varepsilon)]$, come evidenziato dal seguente esempio.

Consideriamo il problema

$$\min\ (\varepsilon x + y),$$

$x, y \in \mathbf{R}$, con i vincoli $x \geq 0, y \geq 0, (x + 1)(y + 1) \geq 2$. Con $\varepsilon = 2$ il punto di ottimo è $(x^*, y^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = (0, 1, 0, 0, 1)$. Il vincolo $x \geq 0$ è attivo ma il corrispondente moltiplicatore è nullo. Per $1/2 \leq \varepsilon \leq 2$ il punto di ottimo è $\left(\sqrt{2/\varepsilon}-1,\ \sqrt{2\varepsilon}-1, 0, 0, \sqrt{\varepsilon/2}\right)$, mentre per $\varepsilon > 2$ il punto estremante è $(0, 1, \varepsilon - 2, 0, 1)$. Si noti che $x^*(\varepsilon)$ non è differenziabile in $\varepsilon = 2$.

Facendo a meno della complementarietà stretta è tuttavia possibile ottenere l'esistenza di derivate direzionali per $y(\varepsilon)$, secondo ogni direzione $v \neq 0$, in base ai seguenti risultati di Jittorntrum [17]. Questo autore sostituisce, nelle condizioni sufficienti del secondo ordine, al cono $Z(x^*, u^*)$ il seguente cono:

$$Z_1(x^*, u^*) = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z^T \nabla g_i(x^*, 0) = 0, \forall i \in I^+(x^*, u^*);$$
$$z^T \nabla h_j(x^*, 0) = 0, \forall j = 1, ..., p\}.$$

Tali condizioni sono chiamate in letteratura "condizioni forti sufficienti del secondo ordine" per P(0). Da notare che se vale la condizione di complementarietà stretta, risulta $Z_1(x^*, u^*) = Z(x^*, u^*)$.

In particolare, Jittorntrum ottiene l'esistenza della derivata direzionale (unilaterale) $D_v\, y(\varepsilon)$, per ogni direzione $v \neq 0$, in un intorno di $\varepsilon = 0$. Inoltre si dimostra che $f^*(\varepsilon) = f[x(\varepsilon), \varepsilon]$ permane differenziabile con continuità in un intorno di $\varepsilon = 0$, e risulta, come nel teorema 9, $\nabla_\varepsilon f^*(\varepsilon) = \nabla_\varepsilon L\,[y(\varepsilon), \varepsilon]$.

Osserviamo infine che nel teorema 8, dovendo valere la complementarietà stretta, le condizioni sufficienti del secondo ordine potranno essere verificate tramite i teoremi sul segno di una forma quadratica soggetta ad un sistema omogeneo di vincoli lineari (linearmente indipendenti). Si veda, ad es. [25, 29, 38].

E) *Complementarità stretta e problemi di programmazione lineare*

Si consideri un problema di programmazione lineare nella forma

$$(P) \qquad \begin{array}{c} \min\ cx \\ \text{sub}\ A\,x \geq b,\ x \geq 0 \end{array}$$

ove $c, x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$ e A è una matrice di ordine (m, n). Come è noto, il problema duale di (P) si scrive come

$$(Q) \qquad \begin{array}{c} \max\ by \\ \text{sub}\ A^T y \leq c,\ y \geq 0. \end{array}$$

La funzione Lagrangiana per il problema (P) è

$$L(x, y) = cx - y(\mathrm{A}x - b).$$

Consideriamo ora la funzione Lagrangiana per il problema (Q). A tale fine riscriviamo (Q) nella forma equivalente

$$\begin{array}{c} \min\ (-\,by) \\ \text{sub}\ A^T y \geq -\,c,\ y \geq 0. \end{array}$$

Quindi la sua funzione Lagrangiana diventa

$$M(y, x) = -\,by - x(-\,A^T y + c),$$

ossia,

$$M(y, x) = -\,[cx - y(Ay - b)] = -\,L(x, y).$$

Ne viene che le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per entrambi i problemi possono essere così riassunte

(i) $Ax^* - b \geq 0$
(ii) $y^* A - c \leq 0$
(iii) $x^* \geq 0, y^* \geq 0$
(iv) $y^*(\,Ax^* - b) = 0$
(v) $(c - y^*A)\, x^* = 0.$

Quindi il vettore dei moltiplicatori y^* rappresenta le variabili del problema duale ed il vettore dei moltiplicatori x^* rappresenta le variabili del problema primale.

Le (iv) e (v) sono le ben note *condizioni complementarità*. Equivalentemente si possono esprimere con le seguenti implicazioni.

$$x_j^* > 0 \;\Rightarrow\; y^* A^j = c_j$$

$$y^* A^j < c_j \;\Rightarrow\; x_j^* > 0$$

(A^j essendo la j-esima colonna di A)

$$y_i^* > 0 \;\Rightarrow\; A_i x^* = b_i$$

$$A_i x^* > b_i \;\Rightarrow\; y_i^* = 0$$

(A_i essendo la i-esima riga di A).

Il teorema sugli scarti complementari (o sulla complementarità) di un problema di programmazione lineare è ben noto. Dalle precedenti implicazioni non si esclude che possa essere in pari tempo $x_j^* = 0$ ed anche $y^* A^j - c_j = 0$, così pure che possa essere $y_i^* = 0$ e anche $A_i x^* - b_i = 0$.

Meno noto è il *teorema di complementarità stretta* (cfr., ad es. [24, 28, 33, 41] che ha una certa importanza nel cosiddetto metodo "primale-duale" ma soprattutto nei metodi per "punti interni" (cfr. [28, 30, 41]. Tale teorema, dovuto a Tucker [12, 40] e generalizzato da Bonnans e Shapiro [2] afferma che esistono sempre due soluzioni ottimali x^* di (P) e y^* di (Q) per le quali le precedenti implicazioni diventano coimplicazioni. In altre parole, per la funzione Lagrangiana di (P) e (Q) vale la complementarità stretta. Per tali soluzioni possiamo quindi anche scrivere:

$$y^* + (Ax^* - b) > 0;$$

$$(c - y^* A) + x^* A > 0.$$

Per due soluzioni ottimali *qualsiasi* tali relazioni di complementarità stretta possono anche non sussistere. Si intende che se (P) e (Q) ammettono entrambi un'*unica* soluzione x^* e y^*, per tali soluzioni varrà la complementarità stretta. Poiché le soluzioni di un problema sono il vettore dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker dell'altro problema associato (duale o primale a seconda dei casi), sfruttando il già citato lavoro di Kyparisis [18] possiamo ottenere condizioni necessarie e sufficienti affinché (P) e (Q) ammettano soluzione unica (che soddisfa perciò la complementarità stretta). Per semplicità si consideri il problema

$$(P_1) \qquad \begin{array}{c} \min cx \\ \text{sub } Ax \geq b \end{array}$$

il cui duale è

$$(Q_1) \qquad \begin{array}{c} \max by \\ \text{sub } A^T y = c,\ y \geq 0. \end{array}$$

Sia $\bar{x}$ soluzione di (P_1) e $\bar{y}$ soluzione di (Q_1). Sia A_i la i-esima riga di A e definiamo gli insiemi

$$I = \{i \mid A_i\, \bar{x} = b_i\},$$
$$K = \{i \mid \bar{y}_i > 0\} = \{i \mid A_i\, \bar{x} = b_i, \bar{y}_i > 0\},$$
$$L = \{i \mid A_i\, \bar{x} = b_i, \bar{y}_i = 0\}.$$

Ovviamente è $I = K \cup L$ (ognuno di questi insiemi può essere vuoto).

Con A_K ed A_L indichiamo, rispettivamente, le matrici formate dalle righe A_i, $i \in K$ ed A_i, $i \in L$.

Applicando i risultati di Kyparisis si può enunciare il seguente teorema (si veda anche [19].

Teorema 10. Sia $\bar{x}$ soluzione di (P_1) e $\bar{y}$ soluzione di (Q_1). Il vettore $\bar{x}$ è soluzione unica se e solo se le righe di $[A_K^T, A_L^T]$ sono linearmente indipendenti e il sistema

$$A_K^T y_K + A_L^T y_L = 0, \quad y_L > 0$$

ammette soluzione (y_K, y_L).

Il vettore $\bar{y}$ è soluzione unica di (Q_1) se e solo se le righe di A_K sono linearmente indipendenti e il sistema

$$A_K x = 0, A_L x > 0$$

ammette soluzione x.

Si osservi, a questo punto, che se vale la condizione di complementarità stretta, ossia è $L = \varnothing$, l'indipendenza lineare delle righe di A_I^T (rispettivamente delle righe di A_I) è condizione necessaria e sufficiente per l'unicità della soluzione $\bar{x}$ (della soluzione $\bar{y}$).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] AFRIAT S.N., *Theory of maxima and the method of Lagrange*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 20, 1971, 343-357.

[2] BONNANS J.F.-SHAPIRO A., *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer Verlag, Berlin, 2000.

[3] CARTER M., *Foundations of Mathematical Economics*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 2001.

[4] CASTAGNOLI E.-PECCATI L., *Matematica per l'Analisi Economica*, 2 voll., Etas Libri, Milano, 1979.

[5] DE GIULI M.E.-GIORGI G.-MAGNANI U., *A general linear theorem of the alternative: how to get its special cases quickly*, P.U.M.A., 8, 1997, 215-232.

[6] EL-HODIRI M.A., *Constrained Extrema. Introduction to the Differentiable Case with Economic Applications*, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 56, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[7] FIACCO A.V.-MC CORMICK G.P., *Noulinear Programming; Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, J. Wiley, New York, 1968.

[8] FIACCO A.V., *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*, Academic Press, New York, 1983.

[9] GIANNESSI F., *Metodi matematici della programmazione. Problemi lineari e non lineari*, Pitagora Editrice, Bologna, 1982.

[10] GIORGI G., *Vari tipi di punti di ottimo e condizioni sufficienti di ottimalità locale del primo ordine*, in "Atti XXI Convegno A.M.A.S.E.S.", C. Colombo S.p.A., Roma, 1997, 289-301.

[11] GIORGI G., *Osservazioni sui teoremi di sensitività in programmazione matematica e in analisi economica*, in "Atti XXII Convegno A.M.A.S.E.S.", Bozzi editore, Genova, 1998, 199-215.

[12] GOLDMAN A.J.-TUCKER A.W., *Theory of linear programming*, in "H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds.), Linear Inequalities and Related Systems", Princeton University Press, N.J., 1956, 53-98.

[13] HAN S.P.-MANGASARIAN O.L., *Exact penalty functions in nonlinear programming*, Math. Programming, 17, 1979, 251-269.

[14] HESTENES M.R., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[15] HESTENES M.R., *Optimization Theory. The Finite Dimensional Case*, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[16] INTRILIGATOR M.D., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

[17] JITTORNTRUM K., *Solution point differentiability without strict complementarity in nonlinear programming*, Math. Programming Study, 21, 1981, 127-138.

[18] KYPARISIS J., *On uniqueness of Kuhn-Tucker multipliers in nonlinear programming*, Mathematical Programming, 32, 1985, 242-246.

[19] MANGASARIAN O.L., *Uniqueness of solution in linear programming*, Linear Algebra and Its Applications, 25, 1979, 151-162.

[20] MAS-COLELL A.-WHINSTON M.D.-GREEN J.R., *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1965.

[21] MC CORMICK G.P., *Second order conditions for constrained minima*, J. SIAM Appl. Math., 15, 1967, 37-47.

[22] MC CORMICK G.P., *Optimality criteria in nonlinear programming*, in R.W. Cottle, C.E. Lemke (Eds.), "Nonlinear Programming", Volume IX SIAM-AMS Proceedings, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976, 27-38.

[23] MC CORMICK G.P., *Nonlinear Programming. Theory, Algorithms and Applications*, John Wiley & Sons; New York, 1983.

[24] MURACCHINI L.-GUIDOTTI L., *Programmazione matematica*, Utet, Torino, 1988.

[25] NOVSHEK W., *Mathematics for Economists*, Academic Press, New York, 1993.

[26] PENNISI L.L., *An indirect sufficiency proof for the problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions*, Trans, American Math. Soc., 74, 1953, 177-198.

[27] ROBINSON S.M., *Generalized equations and their solutions, Part II (Applications to nonlinear programming)*, Math. Programming Study, 19, 1982, 200-211.

[28] SAIGAL R., *Linear Programming. A Modern Integrated Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Mass., 1995.

[29] SAMUELSON P.A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1947.

[30] SCHOEN F., *Teoria e metodi di ottimizzazione lineare*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1991.

[31] SHAPIRO A.-AL-KHAYYAL F., *First-order conditions for isolated locally optimal solutions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 77, 1993, 189-196.

[32] SILBERBERG E., *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 2nd ed., Mc Graw-Hill, New York, 1990.

[33] SIMMONARD M., *Programmation Linéaire*, Dunod, Paris, 1962.

[34] SIMON C.P.-BLUME L., *Mathematics for Economists*, W.W. Norton & Company, New York, 1994.

[35] STILL G.-STRENG M., *Optimality conditions in smooth nonlinear programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, 90, 1996, 483-515.

[36] STOER J.-WITZGALL C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[37] TAKAYAMA A., *Sensitivity analysis in economic theory*, Metroeconomica, 29, 1977, 9-37.

[38] TAKAYAMA A., *Mathematica Economics*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 29, 1985.

[39] TAKAYAMA A., *Analytical Methods in Economics*, Hemel Hempstead, Hertfordshire, Harvester Wheat Sheaf, 1994.

[40] TUCKER A.W., *Dual systems of homogeneous linear relations*, in "H.W. Kuhn-A.W. Tucker (eds), Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, N.J., 1956, 3-18.

[41] VANDERBEI R., *Linear Programming, Fondations and Extensions*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Mass., 2001.

[42] WARD D., *Characterizations of strict local minima and necessary conditions for weak sharp minima*, Journal of Optimization Theory and Applications, 80, 1994, 551-571.