Università degli Studi di Pisa
Dipartimento di Statistica e Matematica
Applicata all'Economia

Report n. 318

Matrici a diagonale dominante: principali definizioni, proprietà e applicazioni

G. Giorgi C. Zuccotti

Pisa, giuugno 2009
- Stampato in Proprio –

Via Cosimo Ridolfi, 10 – 56124 PISA – Tel. Segr. Amm. 050 2216231 Segr. Stud. 050 2216317 Fax 050 2216375
Cod. Fisc. 80003670504 - P. IVA 00286820501 - Web http://statmat.ec.unipi.it/

Matrici a diagonale dominante: principali definizioni, proprietà e applicazioni

G. Giorgi[1] C. Zuccotti[2]

1) Giorgio Giorgi, Professore Ordinario di Matematica generale e di Matematica per l'economia e la finanza (secs-S/06). Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Via S. Felice, 7 - 27100 Pavia; tel. 0382986238 – e-mail: ggiorgi@eco.unipv.it

2) Cesare Zuccotti, Ricercatore di Teoria delle decisioni e di Applicazioni elettroniche per la gestione e l'ottimizzazione (secs-S/06). Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Ricerche Aziendali "Riccardo Argenziano", Via S. Felice, 7 - 27100 Pavia; tel. 0382986257 – e-mail: czuccotti@eco.unipv.it

Dedichiamo questo lavoro
alla memoria di Umberto Magnani
che sulle matrici a diagonale dominante
ha dato importanti contributi.

1. Introduzione

Scopo di questo lavoro è di presentare una rassegna delle principali nozioni, proprietà e applicazioni concernenti le matrici a diagonale dominante. Oltre a risultati già noti si fornirà qualche nuova osservazione e si indicheranno alcune proprietà e applicazioni non ancora da altri segnalate, almeno per quanto consta ai due autori del presente lavoro.

Le notazioni e le convenzioni usate sono di tipo standard. Per agevolare la lettura riportiamo qui di seguito quelle ritenute meno usuali.

- Indichiamo $u \in \mathbb{R}^n$ il *vettore somma*: $u_i = 1, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$;
- dato il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e il vettore nullo $[0]$ di $\mathbb{R}^n$, poniamo

  $x \geqq [0]$ ("x non negativo"), se è $x_i \geqq 0$, $\forall i \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}$;
  $x \geq [0]$ ("x semipositivo"), se è $x \geqq [0]$, $x \neq [0]$;
  $x > [0]$ ("x positivo"), se è $x_i > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$;

  similmente per le notazioni $x \leqq [0]$, $x \leq [0]$, $x < [0]$;
- data la matrice A di ordine (m, n) e data la matrice nulla $[0]$ di ordine (m, n), poniamo

  $A \geqq [0]$ ("A non negativa"), se è $a_{ij} \geqq 0$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$;
  $A \geq [0]$ ("A semipositiva"), se è $A \geqq [0]$, $A \neq [0]$;
  $A > [0]$ ("A positiva"), se è $a_{ij} > 0$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$;

  similmente per le notazioni $A \leqq [0]$, $A \leq [0]$, $A < [0]$;

- data la matrice A *quadrata*, di ordine n, *minore principale di ordine* k di A è ogni determinante di sottomatrici quadrate di A, ottenute considerando k righe e le *corrispondenti* k colonne di A;

- data la matrice A *quadrata*, di ordine n, *minore principale di Nord-Ovest di ordine* k, o *minore principale di guida di ordine* k, è il determinante della sottomatrice quadrata ottenuta considerando le *prime* k righe e le *prime* k colonne di A;

- con $\lambda(A)$ indichiamo un autovalore della matrice quadrata A, ossia una radice dell'equazione $| A - \lambda I |= 0$;

- con D indichiamo una matrice (quadrata) *diagonale* ($d_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$);

- con P indichiamo una *matrice di permutazione*, ottenuta cioè permutando le righe (o le colonne) della matrice identica I.

Altre notazioni e convenzioni verranno fornite nel testo del presente lavoro.

Le matrici a diagonale dominante (nel seguito *d.d.*) hanno avuto un ruolo preminente nell'Analisi Economica, soprattutto quale strumento unificante per lo studio di modelli lineari di produzione e di scambio (Leontief e Sraffa), nonchè per lo studio delle soluzioni di problemi inerenti l'esistenza e la stabilità di modelli di equilibrio di tipo walrasiano. Si veda, ad esempio, Arrow e Hahn (1971), Berman e Plemmons (1979), Girardi e Israel (1981), Hadar (1965, 1969), Kemp e Kimura (1978), Magnani (1973), McKenzie (1960, 2002), Murata (1977), Nikaido (1968), Simon (1989), Takayama (1985), Woods (1978).

Le matrici a *d.d.* hanno trovato applicazione anche in questioni di calcolo numerico (limitazioni degli autovalori di una matrice quadrata, limitazioni per il valore del determinante, questioni relative alla soluzione di sistemi di equazioni lineari con metodi iterativi, ecc.) e, più recentemente, in Genetica, a proposito di modelli sulla trasmissione del virus *HIV*. Si veda, in proposito, Jacquez e altri (1988), Simon (1989).

È stata proprio l'adattabilità di tali matrici a svariati campi di applicazione che ha indotto Matematici ed Economisti a proporre definizioni, più o meno generalizzate, delle matrici a *d.d.*, con conseguenti proprietà.

La prima definizione di matrice a *d.d.* è usualmente (e incorrettamente) attribuita ad Hadamard (1903). In realtà il risultato di Hadamard era già stato dimostrato da Minkowski (1900) e da Desplanques (1887), quale generalizzazione di un risultato di Lévy (1881). Dopo il lavoro di Hadamard il relativo teorema fece regolari apparizioni nella letteratura matematica, essendo "riscoperto" (anche in versioni non corrette) da vari autori, fino a che Olga Taussky (1949) riuscì a fare la storia di tutte queste "riscoperte" e a correggere i relativi errori. Si veda, ad esempio, Marcus e Minc (1964), Varga (1976).

Definizione 1.1

Una matrice $A = [a_{ij}]$ quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha *d.d. nel senso di Hadamard* (*d.d.H.*) se risulta

$$| a_{ii} | > \sum_{j \neq i} | a_{ij} |, \qquad \forall i \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}; \tag{1}$$

oppure se risulta

$$| a_{jj} | > \sum_{i \neq j} | a_{ij} |, \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Nel caso valga la (1) si parla, più propriamente, di *dominanza per riga*, nel caso valga la (2) si parla di *dominanza per colonna.*

Teorema 1.1 (Hadamard)

Se vale la (1) oppure la (2), allora è

$$| A | \neq 0.$$

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, De Giuli e altri (2008), Kemp e Kimura (1978), Varga (1962).

Notiamo che le (1) e (2) si possono riscrivere, rispettivamente, nella forma

$$\mid a_{ii} \mid - \sum_{j \neq i} \mid a_{ij} \mid > 0, \qquad \forall i \in \mathbb{N};$$

$$\mid a_{jj} \mid - \sum_{i \neq j} \mid a_{ij} \mid > 0, \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

sicchè, se definiamo la *matrice di confronto di* A, o *matrice di paragone di* A ("comparison matrix"), la matrice $C_A = C = [c_{ij}]$, i cui elementi sono

$$c_{ij} = \begin{cases} \mid a_{ii} \mid, & \text{se } i = j, \\ - \mid a_{ij} \mid, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

le (1) e (2) diventano, rispettivamente,

$$\begin{array}{ll} C\,u > [0] & \text{(dominanza per riga);} \\ C^T\,u > [0] \Leftrightarrow u^T\,C > [0] & \text{(dominanza per colonna).} \end{array}$$

Notiamo per inciso che la matrice di confronto C_A ha gli elementi extra-diagonali tutti $\leqq 0$ ed è quindi, nella terminologia di Fiedler e Pták (1962, 1967), una matrice di classe Z, ovvero Z-matrice.

Osservazione 1.1

Il fatto che una matrice quadrata A abbia *d.d.H.* è una condizione solo sufficiente per la sua regolarità. La dominanza per riga non implica quella per colonna, nè viceversa. In altre parole, le due proprietà sono tra loro indipendenti, ancorchè compatibili. È poi ovvio che se A è a *d.d.H.* per riga (colonna), la trasposta A^T è a *d.d.H.* per colonna (per riga). Parimenti è ovvio che se A è a *d.d.H.*, pure è a *d.d.H.* ogni sua sottomatrice principale e che ogni elemento diagonale a_{ii} è non nullo.

Supponiamo ora che alcune disuguaglianze strette nella (1) o nella (2) vengano sostituite con disuguaglianze deboli. Che succede all'affermazione del Teorema 1.1? La risposta è data da una proposta di dominanza di diagonale, dovuta a Olga Taussky (1949) che corregge analoga proposta di Gersgorin (1931). Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 1.2

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, è *decomponibile* o *riducibile* o *non connessa* se $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}$ ammette un sottoinsieme proprio e non vuoto $\mathbb{J}$, tale che $i \notin \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J} \Rightarrow a_{ij} = 0$. L'insieme $\mathbb{J}$ viene talvolta detto "insieme di decomponibilità". La matrice A viene detta *indecomponibile* o *irriducibile* o *connessa* se non è decomponibile.

Si può dimostrare (cfr., ad esempio, Takayama (1985)) che A è decomponibile se e solo se esiste una matrice di permutazione P per la quale è

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ [0] & A_{22} \end{bmatrix},$$

oppure

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & [0] \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

con A_{11} (e quindi anche A_{22}) quadrata. Ossia, se e solo se esiste una stessa permutazione delle righe e delle colonne di A che la trasformano in una delle due forme (equivalenti una rispetto all'altra) descritte.

Definizione 1.3

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, presenta diagonale dominante (per righe) secondo Taussky (*d.d.T.*) se A presenta *d.d.H.* (per riga), oppure se risulta

$$A \text{ connessa}, \quad | a_{ii} | \geqq \sum_{j \neq i} | a_{ij} |, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

con almeno una disuguaglianza *stretta*.

In modo analogo si definisce la dominanza di diagonale, secondo Taussky, per le colonne.

Il fatto che nella (3) il segno di uguaglianza possa valere al più per $(n-1)$ disequazioni è essenziale per assicurare la regolarità della matrice A. Lo stesso dicasi per l'ipotesi di indecomponibilità.

Teorema 1.2 (Taussky)

Se una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, presenta *d.d.T.*, allora è regolare.

Per la dimostrazione si può vedere il lavoro di Taussky (1949) oppure il testo di Kemp e Kimura (1978).
Segnaliamo che la (3) può, ovviamente, essere riscritta nella forma

$$A \text{ connessa}, \quad C_A u \geq [0].$$

2. Le proposte di McKenzie

Abbiamo già rilevato che le matrici che godono della proprietà della dominanza di diagonale (nel senso di Hadamard o di Taussky) hanno una notevole importanza in alcune applicazioni (soprattutto economiche). È quindi naturale che siano state proposte numerose varianti e generalizzazioni delle definizioni viste. Una delle più interessanti proposte è dovuta all'economista-matematico L. McKenzie (1960) che introduce un concetto di dominanza di diagonale con "pesi". Va segnalato che la proposta di McKenzie viene quasi sempre ignorata nei lavori di Algebra Lineare inerenti generalizzazioni della classica definizione di Hadamard. Segnaliamo inoltre che la definizione di McKenzie era stata usata precedentemente da Newman (1959-60) nell'analisi della stabilità locale di un equilibrio walrasiano.

Definizione 2.1 (McKenzie)

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha diagonale dominante *nel senso di McKenzie* (*d.d.M.*) se esistono pesi $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, tali che

$$d_i \mid a_{ii} \mid > \sum_{j \neq i} d_j \mid a_{ij} \mid, \qquad i = 1, 2, ..., n; \tag{4}$$

(dominanza di diagonale per righe)

oppure se esistono pesi $q_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, tali che

$$q_j \mid a_{jj} \mid > \sum_{i \neq j} q_i \mid a_{ij} \mid, \quad j = 1, 2, ..., n; \tag{5}$$

(dominanza di diagonale per colonne).

In termini di matrici di confronto le (4) e (5) equivalgono alla solubilità dei sistemi

$$\begin{cases} C_A d > [0] \\ d > [0] \end{cases} ; \qquad \begin{cases} qC_A > [0] \\ q > [0] \end{cases} \tag{6}$$

nei rispettivi vettori d e q.

Ovviamente le matrici a *d.d.M.* sono una generalizzazione di quelle a *d.d.H.*. Inoltre se D è una matrice diagonale con $d_{ii} = d_i$, allora se A è a *d.d.M.* per righe, AD è a *d.d.H.* per righe e viceversa. Analogamente per la *d.d.* per colonne, con riferimento alla matrice QA, essendo Q matrice diagonale, con diagonale positiva.

Teorema 2.1 (McKenzie)

Ogni matrice A quadrata, reale o complessa, con *d.d.M.* (per riga o per colonna) è regolare.

Per la dimostrazione si può vedere McKenzie (1960) che però fa riferimento a una definizione formalmente diversa (quella delle matrici a diagonale quasi dominante; si veda oltre, nel presente lavoro), oppure De Giuli e altri (2008), Kemp e Kimura (1978), Murata (1977), Takayama (1985).

Una notevole proprietà delle matrici a *d.d.M.* (non goduta dalle matrici a *d.d.H.* o a *d.d.T.*) è la seguente.

Teorema 2.2

Se A ha *d.d.M.* per righe ha *d.d.M.* per colonne e viceversa.

Di conseguenza per le matrici a *d.d.M.* non vale più la pena di specificare se la proprietà vale per le righe o per le colonne e quindi le matrici a *d.d.M.* permettono di trattare problemi tra di loro "duali", come ad esempio la produttività e la profittabilità di un modello economico multisettoriale. L'equivalenza tra dominanza per righe e per colonne nella definizione di McKenzie non è esplicitamente affermata da tale autore, ma appare nella dimostrazione del teorema 4 in McKenzie (1960). Il teorema 2.2 è invece esplicitamente affermato da Nikaido (1968), Takayama (1985), Kemp e Kimura (1978), Murata (1977), Magnani (1973). Quasi tutti questi autori osservano che nelle (6) la matrice di confronto C_A è una matrice di classe Z e il fatto che sia soddisfatto il primo (o il secondo) sistema delle (6), qualifica la Z-matrice C_A come *matrice di classe* K o K*-matrice*, nella terminologia di Fiedler e Pták (1962). Tra le numerosissime caratterizzazioni di tale classe (si vedano Berman e Plemmons (1979), Fiedler e Pták (1962), Magnani e Meriggi (1981), Plemmons (1977), Poole e Boullion (1974)) figura anche la seguente:

la matrice C_A soddisfa le *condizioni di Hawkins-Simon*, ossia tutti i suoi minori principali (o equivalentemente tutti i suoi n minori principali di Nord-Ovest) sono positivi.

Ciò implica che se una matrice ha *d.d.M.*, anche la sua trasposta ha *d.d.M.* e viceversa.

Segnaliamo che in letteratura le matrici (quadrate) che soddisfano le condizioni di Hawkins-Simon vengono dette P*-matrici* (Gale e Nikaido (1965), Nikaido (1968)). Magnani (1973) dimostra il teorema 2.2 in modo diretto, dopo avere comunque segnalato la possibilità di sfruttare la teoria delle K-matrici.

Presentiamo qui di seguito un'altra dimostrazione "autonoma" del teorema 2.2 che sfrutta i teoremi dell'alternativa per sistemi lineari.

DIMOSTRAZIONE del teorema 2.2

Facciamo riferimento al teorema dell'alternativa di Ville (cfr. Gale (1960), De Giuli e altri (2008)). Data una qualsiasi matrice reale A valgono le seguenti alternative:

1) il sistema $Ax > [0]$ ha soluzione x non negativa
(in realtà ogni $x \geqq [0]$ che soddisfa il sistema dovrà soddisfare il vincolo $x > [0]$);

2) il sistema $yA \leqq [0]$ ha soluzione y semipositiva.

Supponiamo che A abbia *d.d.M.* per colonne, cioè che esistano numeri positivi $d_1, d_2, ..., d_n$ tali che

$$d_j \mid a_{jj} \mid > \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Consideriamo la matrice di confronto $C_A = C = [c_{ij}]$, ove $c_{ij} = - \mid a_{ij} \mid$, $i \neq j$, $c_{jj} = \mid a_{jj} \mid$. Sarà quindi

$$dC_A > [0] \quad \text{per qualche} \quad d > [0].$$

Supponiamo ora per assurdo che A non abbia *d.d.M.* per riga, ossia che il sistema

$$C_A c^* > [0], \quad c^* > [0] \tag{7}$$

non abbia soluzione. Allora, per il teorema dell'alternativa di Ville, avrà soluzione il sistema

$$x^* C_A \leqq [0], \quad x^* \geq [0].$$

Perciò risulta $(d^* - tx^*)C_A > [0]$ per ogni scalare $t > 0$. In particolare, si consideri $t^* = \min_{j \in x_j^* > 0} d_j^*/x_j^* > 0$. Per tale scelta la disuguaglianza $(d^* - t^*x^*)C_A > [0]$ non sussiste. Quindi non esiste un simile x^* e di conseguenza la (7) vale.

Per il viceversa, si applichi tale procedura a A^T. □

McKenzie (1960), oltre alla definizione 2.1, propone anche un'altra definizione che fa riferimento alla "quasi dominanza".

Definizione 2.2 (McKenzie)

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, è a *diagonale quasi dominante* nel senso di McKenzie (*d.q.d.M.*) se:

a) con A indecomponibile, risulta

$$d_i \mid a_{ii} \mid \geqq \sum_{j \neq i} d_j \mid a_{ij} \mid, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad d_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N};$$

(ovvero $C_A d \geqq [0], \quad d > [0]$);

b) con A decomponibile, risulta:

$$d_i \mid a_{ii} \mid \geqq \sum_{j \neq i} d_j \mid a_{ij} \mid, \quad d_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

con la stretta disuguaglianza che valga per almeno un $i \in \mathbb{J}$, comunque scelto l'insieme di decomponibilità $\mathbb{J}$.

Si rileva un rapporto di evidente implicazione del tipo

$$d.d.M. \Rightarrow d.q.d.M..$$

McKenzie dimostra anche l'implicazione opposta (ossia che le due classi di matrici $d.d.M.$ e $d.q.d.M.$ coincidono) *ma ciò non è vero*. Si consideri il seguente esempio con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è a $d.q.d.M.$ ma non è a $d.d.M.$. Inoltre $|A| = 0$. Di conseguenza la definizione originale 2.2 di McKenzie non è accettabile. McKenzie stesso si è accorto di tale anomalia e ha modificato successivamente la definizione 2.2. Si veda il riferimento indiretto in Uekawa (1971), nota 5, e si veda il fondamentale lavoro di Magnani (1973) ove tale anomalia è espressamente segnalata ed emendata.

Segnaliamo che la versione "modificata" della definizione 2.2, secondo la seguente definizione 2.3, si trova anche nella seconda edizione del testo di Henderson e Quandt (1971) che però non forniscono nessuna dimostrazione e rimandano semplicemente al citato lavoro di McKenzie.

Definizione 2.3 (Magnani)

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, è a diagonale quasi dominante nel senso di McKenzie-Magnani ($d.q.d.M.1$) se esistono numeri positivi $d_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, tali che

a) se A è indecomponibile:

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{N},$$

con *almeno una disuguaglianza stretta*;

b) se A è decomponibile ($a_{ij} = 0,\ i \notin \mathbb{J},\ j \in \mathbb{J}$, con $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$) :

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{N},$$

con *disuguaglianza stretta* per almeno un $j \in \mathbb{J}$, comunque scelto $\mathbb{J}$.

Si noti come la definizione 2.3 ricalchi la definizione 1.3 di Taussky: evidentemente, nel 1960, Mckenzie non conosceva il lavoro di Taussky del 1949 che, infatti, non è citato in bibliografia.

La definizione "rivista" da McKenzie (secondo Uekawa (1971)) e che compare nel recente libro di McKenzie (2002), è la seguente.

Definizione 2.4

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, è a diagonale quasi dominante, nel senso revisionato da McKenzie ($d.q.d.M.2$), se esistono n scalari positivi d_i, tali che, per ogni sottoinsieme $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}$, risulta

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geq \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in \mathbb{J}}} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad \forall j \in \mathbb{J},$$

con disuguaglianza stretta per qualche $j \in \mathbb{J}$.

In altre parole deve esistere un vettore $d_{\mathbb{J}} > [0]$ tale che per ogni *sottomatrice principale* $A_{\mathbb{J}}$ di A risulta

$$d_{\mathbb{J}}^T C_{A_{\mathbb{J}}} \geq [0]$$

(oppure $\quad C_{A_{\mathbb{J}}} d_{\mathbb{J}} \geq [0]$ per il caso di dominanza per righe).

Anche Magnani (1973) considera tale definizione nella parte finale del suo lavoro, riconoscendone la correttezza e l'equivalenza con la definizione 2.4, ossia l'equivalenza

$$d.q.d.M.1 \Longleftrightarrow d.q.d.M.2.$$

Kemp e Kimura (1978), usando la definizione 2.4, dimostrano l'equivalenza

$$d.d.M. \Longleftrightarrow d.q.d.M.2.$$

L'equivalenza $d.q.M. \Longleftrightarrow d.q.M.1$ è sostanzialmente dimostrata da McKenzie (1960). Di conseguenza, le matrici a $d.q.d.M.1$ (o a $d.q.d.M.2$) godono di tutte le proprietà della classe delle matrici a $d.d.M.$, classe che costituisce la effettiva generalizzazione della classe delle matrici a $d.d.H.$ o a $d.d.T.$.

Un'altra definizione di dominanza di diagonale "modificata" si trova in letteratura. Di nuovo facciamo riferimento al lavoro di Magnani (1973) ma anche a Basset, Habibagahi e Quirk (1967).

Definizione 2.5

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, è a diagonale quasi dominante nel senso di Magnani ($d.q.d.M.3$) se esistono numeri positivi $d_i > 0, \quad i \in \mathbb{N}$, tali che

a) se A è indecomponibile si ha:

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{N},$$

con *almeno una disuguaglianza stretta*;

b) se A è decomponibile in una forma generale "quasi triangolare", ossia se esiste una matrice di permutazione P tale che

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ [0] & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ [0] & [0] & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

ove ogni blocco A_{ii} è quadrato e indecomponibile, per ogni blocco A_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, m$, risulta

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{\substack{i \in \mathbb{J}_i \\ i \neq j}} d_i \mid a_{ij} \mid, \qquad j \in \mathbb{J}_i,$$

con *disuguaglianza stretta per almeno un indice* i e ove $\mathbb{J}_i$ è l'insieme degli indici di A_{ii}.

Segnaliamo che Magnani (1973) non propone la definizione 2.5 ma in compenso usa la più generale "forma normale di Gantmacher" (cfr. Gantmacher (1966)) nell'analisi della stessa definizione.

Dimostriamo ora in modo unitario e diretto l'equivalenza tra le definizioni 2.1, 2.3, 2.4 e 2.5.

Ricordiamo che una matrice reale quadrata con elementi extra-diagonali non negativi (cioè una Z-matrice) verifica le condizioni di Hawkins-Simon (nel seguito: $H.S.$) se tutti i suoi minori principali sono positivi (equivalentemente: se i suoi n minori principali di Nord-Ovest sono positivi).

Teorema 2.3

Sia data la matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa. Risulta, per la matrice A

$$d.d.M. \Leftrightarrow d.q.d.M.1 \Leftrightarrow d.q.d.M.2 \Leftrightarrow d.q.d.M.3.$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la matrice di confronto $C_A = C = [c_{ij}]$ definita da $c_{ii} = |a_{ii}|$, $c_{ij} = -|a_{ij}|$, $i \neq j$. Seguiremo il seguente ciclo di dimostrazioni:

$$\begin{array}{lclcl} & A \text{ è a } d.q.d.M.3 & \Rightarrow & C \text{ soddisfa } H.S. & \Rightarrow \\ \Rightarrow & A \text{ è a } d.d.M. & \Rightarrow & A \text{ è a } d.q.d.M.2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & A \text{ è a } d.q.d.M.1 & \Rightarrow & A \text{ è a } d.q.d.M.3. & \end{array}$$

1) Supponiamo dapprima che A sia a $d.q.d.M.3$.

a) Se A è indecomponibile, esiste allora un vettore $d > [0]$ tale che $C^T d \geq [0]$. Poichè C è Z-matrice, le precedenti disuguaglianze implicano che C soddisfa le condizioni $H.S.$ (cfr Nikaido (1968), Takayama (1985), Magnani e Meriggi (1981), De Giuli e altri (2008)).

b) Se A è decomponibile, esistono m vettori positivi d^j tali che $C_{jj}^T d^j \geq [0]$, $j = 1, 2, ..., m$. Poichè ogni C_{jj} è indecomponibile e di classe Z, le precedenti disuguaglianze implicano che ogni blocco diagonale C_{jj} soddisfa le condizioni di $H.S.$, con $j = 1, 2, ..., m$. Poichè

$$|C| = |P^T C P| = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ [0] & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & C_{mm} \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{m} |C_{jj}|$$

e similmente per ogni minore principale di Nord-Ovest di $P^T C P$, la matrice C soddisfa le condizioni di $H.S.$ (cfr. Nikaido (1968), Teorema 6.1, Takayama (1985)).

2) Supponiamo ora che C soddisfi le condizioni $H.S.$.

Poichè C è di classe Z, ciò implica (cfr. Nikaido (1968), Teorema 6.2) che esiste un vettore $d \geqq [0]$ tale che $C^T d > [0]$. Poichè $c_{ij} \leqq 0$, $i \neq j$, la i-esima disequazione implica $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Quindi A è a $d.d.M.$.

3) Supponiamo ora che A sia a $d.d.M.$.

Consideriamo qualsiasi sottomatrice principale di A con indici in $\mathbb{J}$. Sarà allora

$$d_j \mid a_{jj} \mid > \sum_{\substack{i \in \mathbb{J} \\ i \neq j}} d_i \mid a_{ij} \mid, \qquad j \in \mathbb{J}.$$

Abbiamo quindi l'implicazione $d.d.M. \Rightarrow d.q.d.M.2$.

4) Supponiamo ora che A sia a $d.q.d.M.2$.

a) Se la matrice A è indecomponibile, poichè

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in \mathbb{J}}} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad \forall i \in \mathbb{J},\ d_j > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

tale relazione vale anche per $\mathbb{J} = \mathbb{N}$. Quindi A è a $d.q.d.M.1$ in quanto soddisfa la $a)$ della definizione 2.3.

b) Se la matrice A è decomponibile, esiste allora un insieme $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$ tale che $a_{ij} = 0$, $i \notin \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}$. Sia P la matrice di permutazione che ha le colonne (unitarie) a sinistra con indici in $\mathbb{J}$. Allora

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ [0] & A_{22} \end{bmatrix}$$

e A_{11} è la sottomatrice principale con indici (di riga e colonna) in $\mathbb{J}$. Conseguentemente si ha, per A_{11},

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in \mathbb{J}}} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{J}, \quad d_j > 0,\ \forall j, \tag{8}$$

con almeno una disuguaglianza stretta per $j \in \mathbb{J}$. Poichè $a_{ij} = 0$, $i \notin \mathbb{J}$, $j \in \mathbb{J}$, dalla (8) abbiamo

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{J}, \tag{9}$$

con almeno una disuguaglianza stretta. Poichè A è a $d.q.d.M.2$, sarà soddisfatta la relazione

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} d_i \mid a_{ij} \mid, \tag{10}$$

per ogni j, e in particolare per $j \notin \mathbb{J}$. Va notato che se esiste un insieme $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{J}$, tale che $a_{ij} = 0$, $i \notin \mathbb{K}$, $j \in \mathbb{K}$, allora un insieme di relazioni analoghe alle (9) e (10) deve esistere per tale insieme $\mathbb{K}$. Tenendo conto di ciò, le relazioni (9) e (10) implicano la parte b) della definizione 2.3 e perciò A è a $d.q.d.M.1$.

5) Completiamo la dimostrazione del teorema stabilendo l'implicazione

$$d.q.d.M.1 \Rightarrow d.q.d.M.3.$$

Di nuovo consideriamo due casi.

a) Se la matrice A è indecomponibile, poichè A soddisfa la relazione

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j = 1, 2, .., n, \tag{11}$$

con almeno una disuguaglianza stretta, A è a $d.q.d.M.3$ (parte a) della definizione 2.5).

b) Se la matrice A è decomponibile, esiste allora una matrice di permutazione P che trasforma A nella forma quasi triangolare a blocchi della parte b) della definizione 2.5. Denotiamo con $\mathbb{J}_i$ l'insieme degli indici delle sottomatrici principali A_{ii}, $i = 1, 2, ..., m$. È chiaro che in $P^T AP$ avremo $a_{ij} = 0$, $i \notin \mathbb{J}_1$, $j \in \mathbb{J}_1$. Nella relazione che compare nella b) della definizione 2.5, avremo allora una disuguaglianza stretta per qualche $j \in \mathbb{J}_1$. Tuttavia per $j \in \mathbb{J}_1$, tale relazione b) si riduce a

$$d_j \mid a_{jj} \mid \underset{\substack{i \in \mathbb{J}_1 \\ i \neq j}}{\geqq} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{J}_1,$$

con almeno una disuguaglianza stretta. Conseguentemente A_{11} soddisfa la relazione che compare nella b) della definizione 2.5 con almeno una disuguaglianza stretta.

Consideriamo ora il blocco A_{22}. La relazione che compare nella a) della definizione 2.3 è soddisfatta per $j \in \mathbb{J}_2$. Allora è

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid = \sum_{\substack{i \in \mathbb{J}_2 \\ i \neq j}} d_i \mid a_{ij} \mid + \sum_{i \notin \mathbb{J}_2} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{J}_2.$$

Poichè $d_i > 0$ abbiamo

$$d_j \mid a_{jj} \mid > \sum_{\substack{i \in \mathbb{J}_2 \\ i \neq j}} d_i \mid a_{ij} \mid, \ \forall j \in \mathbb{J}_2,$$

a meno che $a_{ij} = 0, i \notin \mathbb{J}_2, j \in \mathbb{J}_2$. Tuttavia se $a_{ij} = 0, i \notin \mathbb{J}_2, j \in \mathbb{J}_2$, dobbiamo allora avere, a seguito della parte *b*) della definizione 2.3,

$$d_j \mid a_{jj} \mid \geqq \sum_{i \neq j} d_i \mid a_{ij} \mid, \quad j \in \mathbb{J}_2,$$

con almeno una disuguaglianza stretta. Quindi A_{22} soddisfa la relazione che compare nella *b*) della definizione 2.5 con almeno una disuguaglianza stretta.

Simili argomentazioni possono essere applicate ai blocchi A_{ii}, $i = 3, 4, ..., m$. Quindi abbiamo l'implicazione

$$d.q.d.M.1 \Rightarrow d.q.d.M.3. \qquad \square$$

3. Alcune altre proposte

Nel presente paragrafo esamineremo brevemente soltanto alcune delle numerose proposte che vari autori hanno presentato allo scopo di generalizzare la definizione 1.1 di Hadamard di matrice a diagonale dominante. Per l'esame critico di altre proposte rimandiamo il lettore a De Giuli, Magnani, Moglia (1994).

Proposta 3.1 (Lancaster)

A Lancaster (1968) si deve la seguente proposta.

Definizione 3.1

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha *diagonale quasi dominante nel senso di Lancaster* ($d.q.d.L.$) se esiste un vettore $d > [0]$ tale che

$$C_A d \geq [0] \text{ oppure } d^T C_A \geq [0] \, .$$

Tale definizione costituisce una generalizzazione del concetto di *d.d.M.* e anche una generalizzazione della definizione 1.3 (di Taussky). Poichè, contrariamente a O. Taussky (1949), Lancaster non assume nessuna ipotesi di indecomponibilità della matrice A (o ipotesi specifiche sulla struttura di A), come già osservato da Magnani (1973), la definizione 3.1 dà luogo a delle anomalie, nel senso che non garantisce più la regolarità di A. Si consideri infatti la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che soddisfa la definizione 3.1 per qualsiasi vettore $d > [0]$, $d \in \mathbb{R}^2$, ma è ovviamente singolare.

In base a quanto osservato nel precedente paragrafo, è chiaro come la definizione di Lancaster debba essere modificata per ottenere la regolarità della matrice A. Ad esempio se A è indecomponibile, la proposta di Lancaster è allora accettabile e si riduce alla parte a) della definizione 2.3.

Proposta 3.2 (McKenzie)

A McKenzie (2002) si deve la definizione di matrice a *diagonale scarsamente quasi dominante*, (nel lavoro originale "nearly quasidominant diagonal").

Definizione 3.2

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha diagonale scarsamente quasi dominante se per essa vale la definizione 2.4 ove però tutte le disuguaglianze possono valere come uguaglianze.

È chiaro che anche la definizione 3.2 non garantisce la regolarità della matrice A, anche se può avere almeno un'applicazione (si veda il paragrafo successivo).

Proposta 3.3 (Fiedler e Pták)

Una definizione di matrice a diagonale dominante in senso generalizzato si trova nel lavoro di Fiedler e Pták (1967), ove si riprende una definizione dovuta ad Ostrowski (1956) e la si generalizza ulteriormente.

Definizione 3.3a

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha *diagonale dominante in senso forte* se esiste una matrice diagonale D con diagonale positiva tale che la matrice $B = D^{-1}AD$ soddisfi la condizione

$$| b_{ii} |> \sum_{j \neq i} | b_{ij} |, \ \forall i \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

ovvero

$$| d_{ii}^{-1} a_{ii} d_i |> \sum_{j \neq i} | d_{ii}^{-1} a_{ij} d_{jj} |, \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Osserviamo che, avendo ipotizzato $d_{ii} > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, le condizioni (12) e (13) sono equivalenti alla

$$| a_{ii} | \frac{d_{ii}}{d_{ii}} > \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \frac{d_{jj}}{d_{ii}}, \ \forall i \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

o, il che è lo stesso, alla

$$C_{(D^{-1}AD)} u = (D^{-1} C_A D) u > [0]. \tag{15}$$

È evidente che se A è a *d.d.* in senso forte, B è a *d.d.H.*. Inoltre se la (15) è verificata, allora la matrice C_A è nella classe K (si veda Magnani e Meriggi (1981)). Seguendo la terminologia di Ostrowski, ripresa poi da Fiedler e Pták (1967), una matrice A tale che C_A è K-matrice viene detta *H-matrice* o *matrice di classe H*. Va poi aggiunto che se A è H-matrice, allora anche B è H-matrice. Quindi risulta:

1) $C_A \in K \Rightarrow A \in H$;

2) $A \in H \Rightarrow D^{-1}AD \in H$.

Essendo C_A matrice di classe Z, la 1) ammette anche verso contrario, nel senso che risulta:

3) $C_A \in K \Leftrightarrow A \in H$.

Se generalizziamo, applicando ad A dei pesi, la 3) diventa

4) $C_{D^{-1}AD} \in K \Leftrightarrow D^{-1}AD \in H$,

ovvero

5) $\qquad D^{-1}C_A D \in K \Leftrightarrow D^{-1}AD \in H.$

Di conseguenza la classe delle matrici a *d.d.M.* coincide con la classe delle H-matrici di Ostrowski, ovvero delle matrici a *d.d.* in senso forte di Fiedler e Pták.

Fiedler e Pták (1967) definiscono poi le *matrici a d.d. in senso debole* ("weakly diagonally dominant matrices").

Definizione 3.3b.

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha *diagonale dominante in senso debole* se esiste una matrice diagonale D con diagonale positiva, tale che la matrice $B = D^{-1}AD$ soddisfa la condizione

$$| b_{ii} |>| b_{ij} |, \quad \forall i, j, \qquad j \neq i. \tag{16}$$

Le matrici di cui alla precedente definizione vengono raggruppate da Fiedler e Pták nella classe W. Dal confronto della (16) con la (12) si ha che la classe H è un sottoinsieme della classe W. Infatti, se in ogni riga (colonna) della matrice A l'elemento diagonale, preso in modulo e ponderato, supera la somma degli altri elementi, presi in modulo e ponderati, allora domina ogni singolo addendo della somma. Perciò si ha

$$A \in H \Rightarrow A \in W. \tag{17}$$

Analogo discorso può essere fatto sulle colonne della matrice, ricordando la proprietà per cui se una matrice è a *d.d.* per riga (per colonna), la sua trasposta lo è per colonna (per riga). In Fiedler e Pták (1967) è enunciata la proprietà per cui se una matrice $A \in H$ allora la sua inversa A^{-1} esiste ed è $A^{-1} \in W$. Da ciò segue che se $A \in W$, allora A è regolare. Ciò può essere dimostrato anche direttamente: se $B = D^{-1}AD$ verifica la condizione

$$| b_{ii} |> \sum_{j\neq i} | b_{ij} |, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

per il teorema di Hadamard, B è regolare e, per il teorema di Binet-Cauchy, pure A è regolare.

Proposta 3.4 (Beauwens)

A Beauwens (1976) si deve la definizione di matrice a diagonale dominante in senso semistretto inferiore.

Definizione 3.4a

Una matrice $A = [a_{ij}]$ quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha diagonale dominante *in senso semistretto inferiore* se si verificano contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \mid a_{ii} \mid \geqq \sum_{j \neq i} \mid a_{ij} \mid, & i = 1, 2, ..., n; \\ \mid a_{ii} \mid > \sum_{j=1}^{i-1} \mid a_{ij} \mid, & i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Beauwens (1976) definisce inoltre una matrice a diagonale dominante in senso semistretto come segue.

Definizione 3.4b

Una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, ha diagonale dominante *in senso semistretto* se per qualche matrice di permutazione P, la matrice PAP^T è a diagonale dominante in senso semistretto inferiore.

Da tale definizione segue che ogni matrice a *d.d.H.* è a *d.d.* in senso semistretto, ma non vale il contrario, come mostrato considerando la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il seguente risultato è stato dimostrato da M. Neumann (1979).

Teorema 3.1

Sia A una matrice quadrata, di ordine n, reale o complessa. Le seguenti proprietà sono equivalenti.

1) Esiste una matrice diagonale, di ordine n, non singolare D, reale o complessa, tale che la matrice AD è a diagonale dominante in senso semistretto.

2) Per qualche matrice diagonale, di ordine n, non singolare D, reale o complessa, la matrice AD e a *d.d.H.*.

Risulta quindi che la caratterizzazione di Beauwens di dominanza di diagonale "generalizzata" per AD è equivalente alla caratterizzazione di McKenzie di dominanza di diagonale "generalizzata" per la matrice A (*d.d.M.*).

Proposta 3.5 (Okuguchi)

Una generalizzazione delle matrici a *d.d.H.* e a *d.d.M.* può essere ottenuta introducendo la definizione di dominanza di diagonale a "blocchi". Tale concetto è esaminato da Feingold e Varga (1962), Erdelsky (1968) e, nella letteratura economica, da Pearce (1974) e Okuguchi (1978). Esaminiamo brevemente il contributo di Okuguchi che può essere considerato una estensione della definizione di dominanza di diagonale di McKenzie.

Si definisce "matrice partizionata" o "a blocchi" una matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, di forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}$$

in cui A_{IJ} è una sottomatrice ("blocco") di A costituita da elementi a_{ij}, con $i \in I$ e $j \in J$, essendo I e J elementi di una partizione dell'insieme degli indici di linea di A. I blocchi diagonali sono sottomatrici quadrate non singolari, mentre nulla vieta che i blocchi extradiagonali possano essere anche non quadrati. Per potere introdurre il concetto di dominanza di diagonale per matrici partizionate, non avendo alcun senso considerare il modulo degli elementi (che in questo caso sono delle matrici), bisogna ricorrere alla nozione di *norma vettoriale* e di *norma matriciale*.

Le norme di vettore più comuni sono le seguenti:

1) norma l_1 : $\| x \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |$;

2) norma l_2 o norma Euclidea: $\| x \|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$;

3) norma l_p o norma di Hölder: $\| x \|_p = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}$, $p \geqq 1$;

4) norma l_∞ o norma infinito: $\| x \|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} | x_k |$.

Le norme di matrice più usuali sono le seguenti:

1. norma del massimo elemento: $\max_{i,j \in \mathbb{N}} | a_{ij} |$;
2. norma L_1 o della somma per colonne: $\| A \|_1 = \max_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$;
3. norma L_2 o norma Euclidea: $\| A \|_E = \left[\sum_{i,j} (a_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$;
4. norma L_∞ o della somma per righe: $\| A \|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

Esiste poi un criterio per ricavare una norma matriciale da una qualunque delle norme vettoriali. Tale metodo conduce a quella che viene denominata nella letteratura come *norma di Minkowski* o *norma indotta* della matrice A.

Sia A una matrice, di ordine (m, n), reale o complessa, e sia $\| x \|$ una qualsiasi norma vettoriale. Ciò premesso, si definisce norma di Minkowski di A la norma

$$\| A \| = \sup_{x \in C^n,\ x \neq [0]} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

Tra le proprietà della norma di Minkowski elenchiamo le seguenti:

1) $\| A \| = \max\limits_{\| x \| = 1} \| Ax \|$;

2) per ogni vettore $x \in C^n$ risulta $\| Ax \| \leqq \| A \| \cdot \| x \|$.

Ciò premesso, consideriamo la seguente definizione, dovuta a Okuguchi (1978).

Definizione 3.5

La matrice A quadrata, di ordine n, reale o complessa, possiede blocchi a diagonale dominante se esistono dei sotto-vettori $d_I > [0]$, $d_J > [0]$, tali che

$$\sum_{J \neq I} \| A_{II}^{-1} \cdot A_{IJ} \| \frac{d_J}{d_I} < 1, \quad I = 1, 2, ..., N;$$

oppure, il che è equivalente

$$\| A_{II}^{-1} \|^{-1} d_I > \sum_{J \neq I} \| A_{IJ} \| d_J, \quad I = 1, 2, ..., N.$$

Teorema 3.2 (Okuguchi)

Se A è matrice quadrata, di ordine n, reale o complessa, con blocchi a diagonale dominante, allora A è non singolare.

Per la dimostrazione si veda Okuguchi (1978) oppure Kemp e Kimura (1978).

Facciamo infine osservare che la definizione di Okuguchi collassa a quella di dominanza di diagonale di McKenzie se i blocchi consistono di un singolo elemento, avendosi ovviamente in tal caso

$$\| A_{II}^{-1} \cdot A_{IJ} \| = \frac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |}.$$

4. Alcune applicazioni

Già nel lavoro del 1960 McKenzie (1960) ha posto in evidenza l'utilità delle matrici a diagonale dominante (*d.d.M.*) nell'unificare la trattazione di vari problemi economicamente rilevanti connessi all'analisi dei modelli lineari di equilibrio e di crescita (Leontief e Sraffa) e all'analisi delle condizioni di stabilità e di statica comparata di equilibri walrasiani. Si vedano anche Magnani (1973) e Takayama (1985) che pongono l'accento sull'utilità "unificante" dell'approccio di McKenzie. Altre applicazioni si possono trovare nei lavori di Arrow e Hahn (1971), Girardi e Israel (1981), Hadar (1965, 1969), McKenzie (2002), Murata (1977), Nikaido (1968), Newman (1959-60), Simon (1989), Uekawa (1971), Woods (1978).

Un risultato fondamentale di McKenzie è il seguente.

Teorema 4.1

Se la matrice A, quadrata di ordine n, reale o complessa, ha diagonale dominante, nel senso di McKenzie (*d.d.M.*), *negativa* (rispettivamente, *positiva*), tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa (rispettivamente, positiva).

La dimostrazione è semplice e non la riportiamo. Come è noto, una matrice A (quadrata) per la quale ogni autovalore $\lambda_i(A)$ ha parte reale negativa, viene detta *matrice stabile*.

Abbiamo poi visto il legame esistente tra la matrice di confronto C_A e la classe delle K-matrici, nel caso che C_A sia a *d.d.M.*. È quindi ovvio che se la matrice quadrata e *reale* A, di ordine n, "nasce" già con la struttura dei segni di C_A, per essa valgono i risultati sulle K-matrici. McKenzie stesso dimostra tale proprietà, senza peraltro fare riferimento alle numerose caratterizzazioni delle matrici di classe K, ma indicando soltanto una delle possibili equivalenze. Più precisamente McKenzie (1960) dimostra il seguente risultato.

Teorema 4.2a

Sia A una matrice reale e quadrata, di ordine n; sia $a_{ii} > 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, e $a_{ij} \leqq 0$, $\forall i \neq j$. Allora esiste un (unico) $x \geqq [0]$ tale che $Bx = c$ per ogni $c \geqq [0]$ se e solo se A ammette *d.d.M.*.

Possiamo quindi anche riformulare il precedente teorema nella versione più generale seguente.

Teorema 4.2b

La Z-matrice A è K-matrice se e solo se è a *d.d.M. positiva*.

Altre interessanti proprietà delle matrici con *d.d.M.* si ottengono nel caso A sia *matrice Metzleriana*, ossia se A è quadrata e reale ed è $a_{ij} \geqq 0$, $\forall i \neq j$.

Teorema 4.3 (McKenzie (1960))

Sia A Metzleriana; allora A è stabile *se e solo se* ha *d.d.M. negativa*.

Tale teorema può essere completato nel seguente modo.

Definizione 4.1

La matrice reale e quadrata A, di ordine n, viene detta *D-stabile* se la matrice DA è stabile, per *ogni* matrice diagonale D avente nella diagonale principale elementi *positivi*.

Definizione 4.2

La matrice reale e quadrata A, di ordine n, viene detta *totalmente stabile* se ogni sottomatrice principale di A è D-stabile.

Definizione 4.3

La matrice reale e quadrata A, di ordine n, viene detta *matrice NP* o *matrice Hicksiana* se i suoi minori principali di ordine dispari sono negativi e quelli di ordine pari sono positivi:

$$(-1)^k \Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

ove Δ_k è un qualsiasi minore principale di ordine k.

Teorema 4.4

Sia A Metzleriana. Si hanno allora le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} &A \text{ è stabile} \Leftrightarrow A \text{ è } D\text{-stabile} \Leftrightarrow A \text{ è totalmente stabile} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \text{ è Hicksiana} \Leftrightarrow A \text{ ammette } d.d.M. \text{ negativa.} \end{aligned}$$

Per la dimostrazione rimandiamo a Giorgi (2003), Magnani (1973), Kemp e Kimura (1978), Takayama (1985).

Tenendo presente che la matrice A, reale e quadrata, di ordine n, è Metzleriana se $-A$ è Z-matrice, possiamo stabilire anche le seguenti equivalenze (si veda Takayama (1985)).

Teorema 4.5

Sia A Metzleriana. Si hanno allora le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} &A \text{ ammette } d.d.M. \text{ negativa} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ esiste ed è } A^{-1} \leq [0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x \geqq [0] \mid Ax < [0] \Leftrightarrow \forall c \leqq [0] \ \exists x \geqq [0] \mid Ax = c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \text{ è Hicksiana, ossia i minori principali } \Delta_k \text{ di } A \text{ si} \\ &\quad \text{alternano in segno: } (-1)^k \Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Altre interessanti proprietà delle matrici a $d.d.M.$ derivano dall'ipotesi che A sia *matrice Hermitiana* o, se reale, *matrice simmetrica*. Limitandoci al caso di matrice A, reale e simmetrica, abbiamo il seguente risultato.

Teorema 4.6

Sia A reale e simmetrica, di ordine n. Valgono allora le seguenti proprietà:

1) A è a *d.d.M.* negativa $\Rightarrow$ A è definita negativa $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ A è stabile $\Leftrightarrow$ A è Hicksiana;

2) A è a *d.d.M.* positiva $\Rightarrow$ A è definita positiva $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\lambda_i(A) > 0$, $\forall i$, $\Leftrightarrow$ A è P-matrice (A cioè soddisfa le condizioni di Hawkins-Simon).

Dunque, nel caso di A simmetrica, la dominanza di diagonale (negativa o positiva) è condizione sufficiente per stabilire il segno della relativa forma quadratica (definita). McKenzie (2002) considera anche il caso di forma quadratica semidefinita.

Teorema 4.7

Sia A reale e simmetrica, di ordine n, con $a_{ii} \leqq 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Se A è scarsamente quasi dominante ("nearly quasidominant"), allora $z^T Az$ è semidefinita negativa. Se è $a_{ii} \geqq 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, si otterrà che $z^T Az$ è semidefinita positiva.

Si può poi dimostrare che il teorema 4.4 sussiste anche sotto un'ipotesi meno restrittiva del richiedere che A sia matrice Metzleriana.

Definizione 4.4

La matrice reale e quadrata A, di ordine n, è detta *matrice di Morishima* se esistono due sottoinsiemi $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$ di $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n\}$ tali che

1) $\mathbb{J} \cap \mathbb{K} = \varnothing$;

2) $\mathbb{J} \cup \mathbb{K} = \mathbb{N}$;

3) se $i \neq j$, allora è: $a_{ij} \geqq 0$, per $i, j \in \mathbb{J}$, oppure $i, j \in \mathbb{K}$;
$a_{ij} \leqq 0$, negli altri casi.

In altre parole, A può essere messa nella forma

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

ove P è una opportuna matrice di permutazione, A_{11} e A_{22} sono blocchi quadrati e Metzleriani, $A_{12} \leqq [0]$, $A_{21} \leqq [0]$.

Teorema 4.8

Le equivalenze elencate nel teorema 4.4 sussistono anche con l'ipotesi che A sia matrice di Morishima.

Per la dimostrazione si veda Kemp e Kimura (1978).

La nozione di matrice *d.d.M.* può essere utile anche per ottenere le note *condizioni di Hawkins-Simon* e per dimostrare l'altrettanto celebre *teorema di Perron-Frobenius* sulle matrici quadrate non negative. Ciò viene indicato nel fondamentale lavoro di McKenzie (1960), ove il teorema di Perron-Frobenius viene dimostrato con riferimento al caso di *matrice indecomponibile* (lo stesso dicasi per quanto riguarda McKenzie (2002)). Qui dimostreremo, in modo elementare, il teorema di Perron-Frobenius nel caso generale di matrice non negativa (non indecomponibile).

Sia $A \geqq [0]$ una matrice reale non negativa, di ordine n, e sia $F(A) = \{\pi : (\pi I - A)$ ammette *d.d.M.* positiva$\}$. Per ogni π, la matrice $(\pi I - A)$ è Z-matrice, ossia ha elementi extradiagonali non positivi. Si applicano quindi a tale matrice i risultati precedentemente visti, per il caso di *d.d.M.* positiva. Inoltre, per ogni $A \geqq [0]$, $F(A) \neq \varnothing$, poichè ogni π più grande della somma massima delle colonne di A deve essere elemento di $F(A)$. Inoltre $\pi \in F(A) \Rightarrow \pi \geqq 0$. Quindi il numero

$$\pi_A^* = \inf_{\pi \in F(A)} \pi$$

esiste (finito). Scriveremo per brevità π^* anzichè π_A^*, allorchè dal contesto sarà chiaro che facciamo riferimento alla matrice A.

Richiamiamo inoltre la proprietà:

la Z-matrice B ha *d.d.M. positiva* se e solo se

$$Bd > [0] \text{ per } d \geqq [0].$$

Lemma 4.1

$\pi \notin F(A)$, $\pi^* \geqq 0$;
$\pi > \pi^* \Rightarrow \pi \in F(A)$. Quindi $F(A) = (\pi^*, +\infty)$.

Per quanto riguarda la dimostrazione si osserva che il lemma discende immediatamente dalla proprietà appena richiamata e dalle proprietà dell'estremo inferiore.

Lemma 4.2

π^* è radice carattestica (autovalore) di A; $|\alpha| \leqq \pi^*$ per ogni altra radice caratteristica di A.

DIMOSTRAZIONE

Sia $c > [0]$ un vettore (colonna) di $\mathbb{R}^n$. Si costruisca una matrice di ordine $(n; n+1)$ le cui prime n colonne sono le colonne di $(\pi^* I - A)$ e l'ultima colonna è $-c$. Denotiamo tale matrice con $[\pi^* I - A, -c]$. Notiamo che il sistema $y\,[\pi^* I - A, -c] > [0]$ non ha soluzione, in quanto se esiste una soluzione $\overline{y}$, allora

$$\overline{y}\,(\pi^* I - A) > [0] \quad \text{e} \quad \overline{y}c < 0,$$

cosicchè per qualche $\sigma > 0$,

$$\overline{y}\left((\pi^* + \sigma)\, I - A\right) \geqq [0] \quad \text{e} \quad \overline{y}c < 0,$$

il che, per il teorema dell'alternativa di Farkas-Minkowski (cfr Nikaido (1968), Takayama (1985)) il sistema

$$\left((\pi^* + \sigma)\, I - A\right) x = c$$

non ha soluzione non negativa e quindi, per il teorema di McKenzie, si ha $\pi^* + \sigma \notin F(A)$, contrariamente al lemma 4.1. Quindi non esiste un tale $\overline{y}$. Di conseguenza, grazie al teorema dell'alternativa di Gordan (cfr. Mangasarian (1969), Giorgi, Guerraggio e Thierfelder (2004)) esiste un vettore $[x^*, \alpha^*]^T \geq [0]$, ove $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha^* \in \mathbb{R}$, tale che

$$[\pi^* I - A, -c] \begin{bmatrix} x^* \\ \alpha^* \end{bmatrix} = [0]$$

ossia

$$(\pi^* I - A)\, x^* = \alpha^* c.$$

Di conseguenza $\alpha^* \neq 0 \Rightarrow (\pi^* I - A)$ ha *d.d.M.* positiva e $\pi^* \in F(A)$, contrariamente al lemma 4.1. Perciò concludiamo che è $\alpha^* = 0$. Quindi $x^* \geq [0]$ e $(\pi^* I - A)\, x^* = [0]$, cosicchè π^* è radice caratteristica di A.

Per ogni altra radice caratteristica α, sia z l'associato autovettore, allora $Az = \alpha z$ e in particolare

$$|\, \alpha \,||\, z_i \,| = |\sum_j a_{ij} z_j \,| \leqq \sum_j a_{ij} \,|z_i|\,, \quad \forall i,$$

ossia

$$(|\, \alpha \,|\, I - A)\, y \leqq [0]\,,$$

ove $y_i = |z_i|$, e quindi $y \geq [0]$.

Nel caso in cui è $|\alpha| > \pi^*$, $|\alpha| \in F(A)$, da cui, ricordando che una Z-matrice B ha inversa $B^{-1} \geq [0]$ se e solo se è a *d.d.M.* positiva, otteniamo

$$(|\, \alpha \,|\, I - A)^{-1} \geq [0]\,,$$

cosicchè $y \leqq [0]$: una contraddizione. Quindi $|\, \alpha \,| \leqq \pi^*$. □

Nella dimostrazione del precedente lemma abbiamo anche ottenuto il seguente risultato che elenchiamo separatamente.

Lemma 4.3

Esiste $x^* \geq [0]$ tale che $Ax^* = \pi^* x^*$.

Lemma 4.4

Risulta $(\pi I - A)^{-1} \geq [0]$ se e solo se $\pi > \pi^*$.

DIMOSTRAZIONE

Il risultato segue dal lemma 4.1, ricordando di nuovo che una Z-matrice B ha matrice inversa $B^{-1} \geq [0]$ se e solo se è a *d.d.M.* positiva. □

Il complesso dei lemmi 4.1, 2, 3, 4, costituisce il teorema di Perron-Frobenius per matrici $A \geqq [0]$ decomponibili (cioè non indecomponibili). Per l'ottenimento della versione più "forte" (per matrici indecomponibili) a partire dalla suddetta versione, si può vedere Nikaido (1968) o Woods (1978).

Ulteriori considerazioni su applicazioni economiche della dominanza di diagonale si trovano nel lavoro di Simon (1989). Concludiamo osservando nuovamente che il lavoro di McKenzie (1960) raramente viene citato nella letteratura matematica, ove sovente si riscoprono (in modo non sempre preciso e corretto) le definizioni e i conseguenti risultati di McKenzie. È il caso, ad esempio, del recente articolo di Bhaya e altri (2003) e del lavoro di Gao e Wang (1992). Per altre considerazioni sulle matrici a diagonale dominante rimandiamo a De Giuli, Magnani e Moglia (1994).

BIBLIOGRAFIA

K. J. Arrow, F. Hahn, (1971), General Competitive Analysis, Holden-Day, San Francisco.

L. Bassett, H. Habibagahi, J. Quirk, (1967), Qualitative economics and Morishima matrices, Econometrica, 35, 221-233.

R. Beauwens, (1976), Semistrict diagonal dominance, SIAM, J. Numer. Anal., 13, 109-112.

A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, R. Santos, (2003), Characterizations of classes of stable matrices, Linear Algebra and Its Appl., 374, 159-174.

A. Berman, R. Plemmons, (1979), Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences, Academic Press, New York.

M. E. De Giuli, U. Magnani, P. Moglia, (1994), Some remarks on matrices with dominant diagonal, P.U.M.A., 5, 141-151.

M. E. De Giuli, G. Giorgi, M. A. Maggi, U. Magnani, (2008), Matematica per l'Economia e la Finanza, Zanichelli, Bologna.

J. Desplanques, (1887), Theorème d'algèbre, J. de Math. Spéc., 9, 12-13.

P. J. Erdelsky, (1968), A General theorem on dominant diagonal matrices, Linear Algebra and Its Appl., 1, 203-209.

D. G. Feingold, R. S. Varga, (1962), Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem, Pacific J. of Mathematics, 12, 1241-1250.

M. Fiedler, V. Pták, (1962), On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, Czechoslovak Math. J., 12, 382-400.

M. Fiedler, V. Pták, (1967), Diagonally dominant matrices, Czechoslovak Math. J., 17, 420-433.

D. Gale, (1960), The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York.

D. Gale, H. Nikaido, (1965), The Jacobian matrix and global univalence of mappings, Mathematische Annalen, 159, 81-93.

F. R. Gantmacher, (1966), Théorie des Matrices, Dunod, Paris.

Yi-ming Gao, Xiao-hui Wang, (1992), Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices, Linear Algebra and Its Appl., 169, 257-268.

S. A. Gersgorin, (1931), Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Ivz. Akad. Nauk. SSSR Ser. Fiz.-Mat., 6, 749-754.

G. Giorgi, (2003), Stable and related matrices in economic theory, Control and Cybernetics, 32, 397-410.

G. Giorgi, A. Guerraggio, J. Thierfelder, (2004), Mathematics of Optimization. Smooth and Nonsmooth Case, Elsevier, Amsterdam.

M. Girardi, G. Israel, (1981), Processi di aggiustamento dei prezzi e matrici con diagonale dominante, Bollettino U.M.I., 18-B, 629-647.

J. Hadamard, (1903), Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Hermann, Paris.

J., Hadar, (1965), A Note on dominant diagonals in stability analysis, Econometrica, 33, 442-444.

J. Hadar, (1969), Dominant diagonals - A correction, Econometrica, 37, 541-543.

J. Henderson, R. Quandt, (1971), Microeconomic Theory: A Mathematical Approach, 2nd. edition, McGraw-Hill, New York.

J. A. Jacquez, C. P. Simon, J. Koopman, L. Sattenspiel, T. Perry, (1988), Modeling and analyzing HIV transmission: the effect of contact patterns, Mathematical Biosciences, 92, 119-199.

C. Kemp, Y. Kimura, (1978), Introduction to Mathematical Economics, Springer-Verlag, New York.

K. Lancaster, (1968), Mathematical Economics, Macmillan, New York.

L. Lévy, (1981), Sur la possibilité de l'équilibre électrique, C. R. Acad. Sci., Paris, 93, 706-708.

U. Magnani, (1973), Sulle matrici a diagonale quasidominante di Hadamard - McKenzie - Lancaster, Fascicoli Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Università di Pavia, 49.

U. Magnani, M. R. Meriggi, (1981), Characterizations of K-matrices; in G. Castellani, P. Mazzoleni (Eds.), Mathematical Programming and Its Economic Applications, F. Angeli, Milano, 535-547.

O. L. Mangasarian, (1969), Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York.

M. Marcus, H. Minc, (1964), A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Prindle, Weber & Schmidt Inc., Boston, Mass.

L. W. McKenzie, (1960), Matrices with dominant diagonals and economic theory; in K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (Eds), Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford Univ. Press, Stanford, 47-62.

L.W. McKenzie, (2002), Classical General Equilibrum Theory, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

H. Minkowski, (1900), Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern, Nachr. Kgl. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 90-93.

Y. Murata, (1977), Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems, Academic Press, New York.

M. Neumann, (1979), A note on generalization of strict diagonal dominance for real matrices, Linear. Algebra and Its Appl., 26, 3-14.

P. K. Newman, (1956 - 60), Some notes on stability conditions, Rev. of Economic Studies, 27, 1-9.

H. Nikaido, (1968), Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, New York.

K. Okuguchi, (1978), Matrices with dominant diagonal blocks and economic theory, J. Math. Economics, 5, 43-52.

A. M. Ostrowski, (1956), Determinanten mit überwiegender hauptdiagonale und die absolute konvergenz von linearen Iterationprozessen, Comment. Math. Helvetici, 30, 175-210.

I. F. Pearce, (1974), Matrices with dominating diagonal blocks, J. Economic Theory, 9, 159-170.

R. J. Plemmons, (1977), M-matrix chacterizations. I. Nonsingular M-matrices, Linear Algebra and Its Appl., 18, 175-188.

G. Poole, T. Bouillon, (1974), A Survey on M-matrices, SIAM Review, 16, 419-427.

C. P. Simon, (1989), Some fine-tuning for dominant diagonal matrices, Economics Letters, 30, 217-221.

A. Takayama, (1985), Mathematical Economics, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

O. Taussky, (1949), A recurring theorem on determinants, American Math. Monthly, 56, 672-676.

Y. Uekawa, (1971), Generalization of the Stolper-Samuelson theorem, Econometrica, 39, 197-217.

R. S. Varga, (1962), Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J..

R. S. Varga, (1976), On recurring theorems on diagonal dominance, Linear Algebra and Its Appl., 13, 1-9.

J. E. Woods, (1978), Mathematical Economics. Topics in Multisectoral Economics, Longman, London.

Elenco dei report pubblicati

Anno: **1987**

- ☐ **n. 1** Alberto Cambini - Laura Martein, Some Optimality Conditions in Vector Optimization
- ☐ **n. 2** Alberto Cambini - Laura Martein - S.Schaibel, On Maximizing a Sum of Ratios
- ☐ **n. 3** Giuliano Gasparotto, On the Charnes-Cooper Transformation in linear Fractional Programming.
- ☐ **n. 4** Alberto Cambini, Non-linear separation Theorems, Duality and Optimality
- ☐ **n. 5** Giovanni Boletto, Indicizzazione parziale: aspetti metodologici e riflessi economici
- ☐ **n. 6** Alberto Cambini - Claudio Sodini, On Parametric Linear Fractional Programming
- ☐ **n. 7** Alberto Bonaguidi, Alcuni aspetti meno noti delle migrazioni in Italia
- ☐ **n. 8** Laura Martein - S. Schaible, On Solving a Linear Program with one Quadratic Constraint

Anno: **1988**

- ☐ **n. 9** Ester Lari, Alcune osservazioni sull'equazione funzionale Ø(x,y,z)=Ø(Ø(x,y,t),t,z)
- ☐ **n. 10** F. Bartiaux, Une étude par ménage des migrations des personnes âgées: comparaison des résulttats pour l'Italie et les Etats-Unis
- ☐ **n. 11** Giovanni Boletto, Metodi di scomposizione del tasso di inflazione
- ☐ **n. 12** Claudio Sodini, A New Algorithm for the Strictly Convex Quadratic Programming Problem
- ☐ **n. 13** Laura Martein, On Generating the Set of all Efficient Points of a Bicriteria Fractional Problem
- ☐ **n. 14** Laura Martein, Applicazioni della programmazione frazionaria nel campo economico-finanziario
- ☐ **n. 15** Laura Martein, On the Bicriteria Maximization Problem
- ☐ **n. 16** Paolo Manca, Un prototipo di sistema esperto per la consulenza finanziaria rivolta ai piccoli risparmiatori
- ☐ **n. 17** Paolo Manca, Operazioni Finanziarie di Soper e Operazioni di puro Investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano
- ☐ **n. 18** Paolo Carraresi - Claudio Sodini, A k - Shortest Path Approach to the Minimum Cost Matching Problem.
- ☐ **n. 19** Odo Barsotti - Marco Bottai, Sistemi gravitazionali e fasi di transazione della crescita Demografica
- ☐ **n. 20** Giovanni Boletto, Metodi di scomposizione dell'inflazione aggregata : recenti sviluppi.
- ☐ **n. 21** Marc Termote - Alberto Bonaguidi, Multiregional Stable Populatioin as a Tool for Short-term Demographic Analysis
- ☐ **n. 22** Marco Bottai, Storie familiari e storie migratorie: un'indagine in Italia
- ☐ **n. 23** Maria Francesca Romano - Marco Marchi, Problemi connessi con la disomogeneità dei gruppi sottoposti a sorveglianza statistico-epidemiologica.
- ☐ **n. 24** Franca Orsi, Un approcio logico ai problemi di scelta finanziaria.

Anno: **1989**

- ☐ **n. 25** Vincenzo Bruno, Attrazione ed entropia.
- ☐ **n. 26** Giorgio Giorgi - S. Mititelu, Invexity in nonsmooth Programming.
- ☐ **n. 28** Alberto Cambini - Laura Martein, Equivalence in linear fractional programming.

Anno: **1990**

- ☐ **n. 27** Vincenzo Bruno, Lineamenti econometrici dell'evoluzione del reddito nazionale in relazione ad altri fenomeni economici
- ☐ **n. 29** Odo Barsotti - Marco Bottai - Marco Costa, Centralità e potenziale demografico per l'analisi dei comportamenti demografici: il caso della Toscana
- ☐ **n. 30** Anna Marchi, A sequential method for a bicriteria problem arising in portfolio selectiontheory.
- ☐ **n. 31** Marco Bottai, Mobilità locale e pianificazione territoriale.
- ☐ **n. 32** Anna Marchi, Solving a quadratic fractional program by means of a complementarity approach
- ☐ **n. 33** Anna Marchi, Sulla relazione tra un problema bicriteria e un problema frazionario.

Anno: **1991**

- ☐ **n. 34** Enrico Gori, Variabili latenti e "self-selection" nella valutazione dei processi formativi.
- ☐ **n. 35** Piero Manfredi - E. Salinelli, About an interactive model for sexual Populations.
- ☐ **n. 36** Giorgio Giorgi, Alcuni aspetti matematici del modello di śraffa a produzione semplice
- ☐ **n. 37** ALberto Cambini - S.Schaibl - Claudio Sodini, Parametric linear fractional programming for an unbounded feasible Region.
- ☐ **n. 38** I.Emke - Poulopoulos - V.Gozàlves Pèrez - Odo Barsotti - Laura Lecchini, International migration to northern Mediterranean countries the cases of Greece, Spain and Italy.
- ☐ **n. 39** Giuliano Gasparotto, A LP code implementation
- ☐ **n. 40** Riccardo Cambini, Un problema di programmazione quadratica nella costituzione di capitale.
- ☐ **n. 41** Gilberto Ghilardi, Stime ed errori campionari nell'indagine ISTAT sulle forze di lavoro.
- ☐ **n. 42** Vincenzo Bruno, Alcuni valori medi, variabilità paretiana ed entropia.
- ☐ **n. 43** Giovanni Boletto, Gli effetti del trascinamento dei prezzi sulle misure dell'inflazione: aspetti metodologici
- ☐ **n. 44** P. Paolicchi, Gli abbandoni nell'università: modelli interpretativi.
- ☐ **n. 45** Maria Francesca Romano, Da un archivio amministrativo a un archivio statistico: una proposta metodologica per i dati degli studenti universitari.
- ☐ **n. 46** Maria Francesca Romano, Criteri di scelta delle variabili nei modelli MDS: un'applicazione sulla popolazione studentesca di Pisa.
- ☐ **n. 47** Odo Barsotti - Laura Lecchini, Les parcours migratoires en fonction de la nationalité. Le cas de l'Italie.
- ☐ **n. 48** Vincenzo Bruno, Indicatori statistici ed evoluzione demografica, economica e sociale delle province toscane.
- ☐ **n. 49** Alberto Cambini - Laura Martein, Tangent cones in optimization.
- ☐ **n. 50** Alberto Cambini - Laura Martein, Optimality conditions in vector and scalar optimization: a unified approach.

Anno: **1992**

- ☐ **n. 51** Gilberto Ghilardi, Elementi di uno schema di campionamento areale per alcune rilevazioni ufficiali in Italia.
- ☐ **n. 52** Paolo Manca, Investimenti e finanziamenti generalizzati.
- ☐ **n. 53** Laura Lecchini - Odo Barsotti, Le rôle des immigrés extra- communautaires dans le marché du travail

Anno: **1993**

Anno: **1994**

Anno: **1995**

Anno: **1996**

- ☐ **n. 112** Riccardo Cambini, Generalized concavity for bicriteria functions.
- ☐ **n. 113** Vincenzo Bruno, Variazioni dinamiche (1971-1981-1991)dei fenomeni demografici dei comuni (urbani e rurali) della Lombardia, in relazione ad alcune caratteristiche di mobilità territoriale.

Anno: **1997**

- ☐ **n. 114** Piero Manfredi - Fabio Tarini - J.R. Williams - A. Carducci - B. Casini, Infectious diseases: epidemiology, mathematical models, and immunization policies.
- ☐ **n. 115** Eugene Maurice Cleur - Piero Manfredi, One dimensional SDE models, low order numerical methods and simulation based estimation: a comparison of alternative estimators.
- ☐ **n. 116** Luciano Fanti - Piero Manfredi, Point stability versus orbital stability (or instability): remarks on policy implications in classical growth cycle model.
- ☐ **n. 117** Piero Manfredi - Francesco Billari, transition into adulthood, marriage, and timing of life in a stable popolation framework.
- ☐ **n. 118** Laura Carosi, Una nota sul concetto di estremo superiore di insiemi ordinati da coni convessi.
- ☐ **n. 119** Laura Lecchini - Donatella Marsiglia, Reti sociali degli anziani: selezione e qualità delle relazioni.
- ☐ **n. 120** Piero Manfredi - Luciano Fanti, Gestation lags and efficiency wage mechanisms in a goodwin type growth model.
- ☐ **n. 121** G.Rivellini, La metodologia statistica multilevel come possibile strumento per lo studio delle interazioni tra il comportamento procreativo individuale e il contesto
- ☐ **n. 122** Laura Carosi, Una nota sugli insiemi C-limitati e L-limitati.
- ☐ **n. 123** Laura Carosi, Sull'estremo superiore di una funzione lineare fratta ristretta ad un insieme chiuso e illimitato.
- ☐ **n. 124** Piero Manfredi, A demographic framework for the evaluation of the impact of imported infectious diseases.
- ☐ **n. 125** Alessandro Valentini, Calo della fecondità ed immigrazione: scenari e considerazioni sul caso italiano.
- ☐ **n. 126** Alberto Cambini - Laura Martein, Second order optimality conditions.

Anno: **1998**

- ☐ **n. 127** Piero Manfredi and Alessandro Valentini, Populations with below replacementfertility: theoretical considerations and scenarioes from the italian laboratory.
- ☐ **n. 128** Alberto Cambini - Laura Martein - E. Moretti, Programmazione frazionaria e problemi bicriteria.
- ☐ **n. 129** Emilio Barucci - Fausto Gozzi - Andrej Swiech, Incentive compatibility constraints and dynamic programming in continuous time.

Anno: **1999**

- ☐ **n. 130** Alessandro Valentini, Impatto delle immigrazioni sulla popolazione italiana: confronto tra scenari alternativi.
- ☐ **n. 131** K. Iglicka - Odo Barsotti - Laura Lecchini, Recent developement of migrations from Poland to Europe with a special emphsis on Italy K.Iglika - Le Migrazioni est-ovest: le unioni miste in Italia
- ☐ **n. 132** Alessandro Valentini, Proiezioni demografiche multiregionali a due sessi, con immigrazioni internazionali e vincoli di consistenza.
- ☐ **n. 133** Fabio Antonelli - Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Backward-forward stochastic differential utility: existence, consumption and equilibrium analysis.
- ☐ **n. 134** Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Asset pricing with endogenous aspirations.
- ☐ **n. 135** Eugene Maurice Cleur, Estimating a class of diffusion models: an evaluation of the effects of sampled discrete observations.
- ☐ **n. 136** Luciano Fanti - Piero Manfredi, Labour supply, time delays, and demoeconomic oscillations in a solow-typegrowth model.
- ☐ **n. 137** Emilio Barucci - Sergio Polidoro - Vincenzo Vespri, Some results on partial differential equations and Asian options.
- ☐ **n. 138** Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Hedging european contingent claims in a Markovian incomplete market.
- ☐ **n. 139** Alessandro Valentini, L'applicazione del modello multiregionale-multistato alla popolazione in Italia mediante l'utilizzo del Lipro: procedura di adattamento dei dati e particolarità tecniche del programma.
- ☐ **n. 140** I.M.Stancu-Minasian, optimality conditions and duality in fractional programming-involving semilocally preinvex and related functions.
- ☐ **n. 141** Alessandro Valentini, Proiezioni demografiche con algoritmi di consistenza per la popolazione in Italia nel periodo 1997-2142: presentazione dei risultati e confronto con metodologie di stima alternative.
- ☐ **n. 142** Laura Carosi, Competitive equilibria with money and restricted partecipation.
- ☐ **n. 143** Laura Carosi, Monetary policy and Pareto improvability in a financial economy with restricted partecipation
- ☐ **n. 144** Bruno Cheli, Misurare il benessere e lo sviluppo dai paradossi del Pil a misure di benessere economico sostenibile, con uno sguardo allo sviluppo umano
- ☐ **n. 145** Bruno Cheli - Laura Lecchini - Lucio Masserini, The old people's perception of well-being: the role of material and non material resources
- ☐ **n. 146** Eugene Maurice Cleur, Maximum likelihood estimation of one-dimensional stochastic differential equation models from discrete data: some computational resultas
- ☐ **n. 147** Alessandro Valentini - Francesco Billari - Piero Manfredi, Utilizzi empirici di modelli multistato continui con durate multiple
- ☐ **n. 148** Francesco Billari - Piero Manfredi - Alberto Bonaguidi - Alessandro Valentini, Transition into adulthoold: its macro-demographic consequences in a multistatew stable population framework
- ☐ **n. 149** Francesco Billari - Piero Manfredi - Alessandro Valentini, Becoming Adult and its Macro-Demographic Impact: Multistate Stable Population Theory and an Application to Italy
- ☐ **n. 150** Alessandro Valentini, Le previsioni demografiche in presenza di immigrazioni: confronto tra modelli alternativi e loro utilizzo empirico ai fini della valutazione dell'equilibrio nel sistema pensionistico
- ☐ **n. 151** Emilio Barucci - Roberto Monte, Diffusion processes for asset prices under bounded rationality
- ☐ **n. 152** Emilio Barucci - P. Cianchi - L. Landi - A. Lombardi, Reti neurali e analisi delle serie storiche: un modello per la previsione del BTP future
- ☐ **n. 153** Alberto Cambini - Laura Carosi - Laura Martein, On the supremum in fractional programming
- ☐ **n. 154** Riccardo Cambini - Laura Martein, First and second order characterizations of a class of pseudoconcave vector functions
- ☐ **n. 155** Piero Manfredi and Luciano Fanti, Embedding population dynamics in macro-economic models. The case of the goodwin's growth cycle
- ☐ **n. 156** Laura Lecchini e Odo Barsotti, Migrazioni dei preti dalla Polonia in Italia
- ☐ **n. 157** Vincenzo Bruno, Analisi dei prezzi, in Italia dal 1975 in poi
- ☐ **n. 158** Vincenzo Bruno, Analisi del commercio al minuto in Italia
- ☐ **n. 159** Vincenzo Bruno, Aspetti ciclici della liquidità bancaria, dal 1971 in poi
- ☐ **n. 160** Anna Marchi, A separation theorem in alternative theorems and vector optimization

Anno: 2000

- ☐ n. 161 Piero Manfredi and Luciano Fanti, Labour suppley, population dynamicics and persistent oscillations in a Goodwin-type growth cycle model
- ☐ n. 162 Luciano Fanti and Piero Manfredi, Neo-classical labour market dynamics and chaos (and the Phillips curve revisited)
- ☐ n. 163 Piero Manfredi - and Luciano Fanti, Detection of Hopf bifurcations in continuos-time macro- economic models, with an application to reducible delay-systems.
- ☐ n. 164 Fabio Antonelli - Emilio Barucci, The Dynamics of pareto allocations with stochastic differential utility
- ☐ n. 165 Eugene M. Cleur, Computing maximum likelihood estimates of a class of One-Dimensional stochastic differential equation models from discrete Date*
- ☐ n. 166 Eugene M. Cleur, Estimatng the drift parameter in diffusion processes more efficiently at discrete times:a role of indirect estimation
- ☐ n. 167 Emilio Barucci - Vincenzo Valori, Forecasting the forecasts of others e la Politica di Inflation targeting
- ☐ n. 168 A.Cambini - L. Martein, First and second order optimality conditions in vector optimization
- ☐ n. 169 A. Marchi, Theorems of the Alternative by way of Separation Theorems
- ☐ n. 170 Emilio Barucci - Maria Elvira Mancino, Asset Pricing and Diversification with Partally Exchangeable random Variables
- ☐ n. 171 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Long Term Effects of the Efficiency Wage Hypothesis in Goodwin-Type Economies.
- ☐ n. 172 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Long Term Effects of the Efficiency wage Hypothesis in Goodwin-type Economies: a reply.
- ☐ n. 173 Luciano Fanti, Innovazione Finanziaria e Domanda di Moneta in un Modello dinamico IS-LM con Accumulazione.
- ☐ n. 174 P.Manfredi, A.Bonaccorsi, A.Secchi, Social Heterogeneities in Classical New Product Diffusion Models. I: "External" and "Internal" Models.
- ☐ n. 175 Piero Manfredi - Ernesto Salinelli, Modelli per formazione di coppie e modelli di Dinamica familiare.
- ☐ n. 176 P.Manfredi, E. Salinelli, A.Melegaro, A.Secchi, Long term Interference Between Demography and Epidemiology: the case of tuberculosis
- ☐ n. 177 Piero Manfredi - Ernesto Salinelli, Toward the Development of an Age Structure Teory for Family Dynamics I: General Frame.
- ☐ n. 178 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Population heterogeneities, nonlinear oscillations and chaos in some Goodwin-type demo-economic models Paper to be presented at the: Second workshop on "nonlinear demography" Max Planck Institute for demographic Research Rostock, Germany, May 31-June 2, 2
- ☐ n. 179 E. Barucci - M.E. Mancini - Roberto Renò, Volatility Estimation via Fourier Analysis
- ☐ n. 180 Riccardo Cambini, Minimum Principle Type Optimality Conditions
- ☐ n. 181 E. Barucci, M. Giuli, R. Monte, Asset Prices under Bounded Rationality and Noise Trading
- ☐ n. 182 A. Cambini, D.T.Luc, L.Martein, Order Preserving Transformations and application.
- ☐ n. 183 Vincenzo Bruno, Variazioni dinamiche (1971-1981-1991) dei fenomeni demografici dei comuni urbani e rurali della Sicilia, in relazione ad alcune caratteristiche di mobilità territoriale.
- ☐ n. 184 F.Antonelli, E.Barucci, M.E.Mancino, Asset Pricing with a Backward-Forward Stochastic Differential Utility
- ☐ n. 185 Riccardo Cambini - Laura Carosi, Coercivity Concepts and Recession Functions in Constrained Problems
- ☐ n. 186 John R. Williams, Piero Manfredi, The pre-vaccination dynamics of measles in Italy: estimating levels of under-reporting of measles cases
- ☐ n. 187 Piero Manfredi, John R. Williams, To what extent can inter-regional migration perturbe local endemic patterns? Estimating numbers of measles cases in the Italian regions
- ☐ n. 188 Laura Carosi, Johannes Jahn, Laura Martein, On The Connections between Semidefinite Optimization and Vector Optimization
- ☐ n. 189 Alberto Cambini, Jean-Pierre Crouzeix, Laura Martein, On the Pseudoconvexity of a Quadratic Fractional Function
- ☐ n. 190 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A finite Algorithm for a Particular d.c. Quadratic Programming Problem.
- ☐ n. 191 Riccardo Cambini - Laura Carosi, Pseudoconvexity of a class of Quadratic Fractional Functions.
- ☐ n. 192 Laura Carosi, A note on endogenous restricted partecipation on financial markets: an existence result.
- ☐ n. 193 Emilio Barucci - Roberto Monte - Roberto Renò, Asset Price Anomalies under Bounded Rationality.
- ☐ n. 194 Emilio Barucci - Roberto Renò, A Note on volatility estimate-forecast with GARCH models.
- ☐ n. 195 Bruno Cheli, Sulla misura del benessere economico: i paradossi del PIL e le possibili correzioni in chiave etica e sostenibile, con uno spunto per l'analisi della povertà
- ☐ n. 196 M.Bottai, M.Bottai, N. Salvati, M.Toigo, Le proiezioni demografiche con il programma Nostradamus. (Applicazione all'area pisana)
- ☐ n. 197 A. Lemmi - B. Cheli - B. Mazzolli, La misura della povertà multidimensionale: aspetti metodologici e analisi della realtà italiana alla metà degli anni '90
- ☐ n. 198 C.R. Bector - Riccardo Cambini, Generalized B-invex vector valued functions
- ☐ n. 199 Luciano Fanti - Piero Manfredi, The workers' resistance to wage cuts is not necessarily detrimental for the economy: the case of a Goodwin's growth model with endogenous population.
- ☐ n. 200 Emilio Barucci - Roberto Renò, On Measuring volatility of diffusion processes with high frequency data
- ☐ n. 201 Piero Manfredi - Luciano Fanti, Demographic transition and balanced growth

Anno: 2001

- ☐ n. 202 E.Barucci - M. E. Mancini - E. Vannucci, Asset Pricing, Diversification and Risk Ordering with Partially Exchangeable random Variables
- ☐ n. 203 E. Barucci - R. Renò - E. Vannucci, Executive Stock Options Evaluation.
- ☐ n. 204 Odo Barsotti - Moreno Toigo, Dimensioni delle rimesse e variabili esplicative: un'indagine sulla collettività marocchina immigrata nella Toscana Occidentale
- ☐ n. 205 Vincenzo Bruno, I Consumi voluttuari, nell'ultimo trentennio, in Italia
- ☐ n. 206 Michele Longo, The monopolist choice of innovation adoption: A regular-singular stochastic control problem
- ☐ n. 207 Michele Longo, The competitive choice of innovation adoption: A finite-fuel singular stochastic control problem.
- ☐ n. 208 Riccardo Cambini - Laura Carosi, On the pseudoaffinity of a class of quadratic fractional functions
- ☐ n. 209 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A Finite Algorithm for a Class of Non Linear Multiplicative Programs.
- ☐ n. 210 Alberto Cambini - Dinh The Luc - Laura Martein, A method for calculating subdifferential Convex vector functions
- ☐ n. 211 Alberto Cambini - Laura Martein, Pseudolinearity in scalar and vector optimization.
- ☐ n. 212 Riccardo Cambini, Necessary Optimality Conditions in Vector Optimization.
- ☐ n. 213 Riccardo Cambini - Laura Carosi, On generalized convexity of quadratic fractional functions.
- ☐ n. 214 Riccardo Cambini - Claudio Sodini, A note on a particular quadratic programming problem.
- ☐ n. 215 Michele Longo - Vincenzo Valori, Existence end stability of equilibria in OLG models under adaptive expectations.

- ☐ **n. 216** Luciano Fanti - Piero Manfredi, Population, unemployment and economic growth cycles: a further explanatory perspective
- ☐ **n. 217** J.R.Williams,P.Manfredi,S.Salmaso,M.Ciofi, Heterogeneity in regional notification patterns and its impact on aggregate national case notification data: the example of measles in Italy.
- ☐ **n. 218** Anna Marchi, On the connectedness of the efficient frontier: sets without local efficient maxima
- ☐ **n. 219** Laura Lecchini - Odo Barsotti, Les disparités territoriales au Maroc au travers d'une optique de genre.

Anno: **2002**

- ☐ **n. 220** Gilberto Ghilardi - Nicola Orsini, Sull'uso dei modelli statistici lineari nella valutazione dei sistemi formativi.
- ☐ **n. 221** Andrea Mercatanti, Un'analisi descrittiva dei laureati dell'Università di Pisa
- ☐ **n. 222** E. Barucci - C. Impenna - R. Renò, The Italian Overnight Market: microstructure effects, the martingale hypothesis and the payment system.
- ☐ **n. 223** E. Barucci, P.Malliavin, M.E.Mancino, R.Renò, A.Thalmaier, The Price-volatility feedback rate: an implementable mathematical indicator of market stability.
- ☐ **n. 224** Andrea Mercatanti, Missing at random in randomized experiments with imperfect compliance
- ☐ **n. 225** Andrea Mercatanti, Effetto dell'uso di carte Bancomat e carte di Credito sulla liquidità familiare: una valutazione empirica
- ☐ **n. 226** Piero Manfredi - John R. Williams, Population decline and population waves: their impact upon epidemic patterns and morbidity rates for childhood infectious diseases. Measles in Italy as an example.
- ☐ **n. 227** Piero Manfredi - Marta Ciofi degli Atti, La geografia pre-vaccinale del morbillo in Italia. I. Comportamenti di contatto e sforzi necessari all'eliminazione: predizioni dal modello base delle malattie prevenibili da vaccino.
- ☐ **n. 228** I.M.Stancu-Minasian, Optimality Conditions and Duality in Fractional Programming Involving Semilocally Preinvex and Related
- ☐ **n. 229** Nicola Salvati, Un software applicativo per un'analisi di dati sui marchi genetici (Genetic Markers)
- ☐ **n. 230** Piero Manfredi, J. R. Williams, E. M. Cleur, S. Salmaso, M. Ciofi, The pre-vaccination regional landscape of measles in Italy: contact patterns and related amount of needed eradication efforts (and the "EURO" conjecture)
- ☐ **n. 231** Andrea Mercatanti, I tempi di laurea presso l'Università di Pisa: un'applicazione dei modelli di durata in tempo discreto
- ☐ **n. 232** Andrea Mercatanti, The weak version of the exclusion restriction in causal effects estimation: a simulation study
- ☐ **n. 233** Riccardo Cambini and Laura Carosi, Duality in multiobjective optimization problems with set constraints
- ☐ **n. 234** Riccardo Cambini and Claudio Sodini, Decomposition methods for nonconvex quadratic programs
- ☐ **n. 235** R.Cambini and L. Carosi and S.Schaible, Duality in fractional optimization problems with set constraints
- ☐ **n. 236** Anna Marchi, On the mix-efficient points

Anno: **2003**

- ☐ **n. 237** Emanuele Vannucci, The valuation of unit linked policies with minimal return guarantees under symmetric and asymmetric information hypoteses
- ☐ **n. 238** John R Williams - Piero Manfredi, Ageing populations and childhood infections: the potential impact on epidemic patterns and morbidity
- ☐ **n. 239** Bruno Cheli, Errata Corrige del Manuale delle Impronte Ecologiche (2002) ed alcuni utili chiarimenti
- ☐ **n. 240** Alessandra Petrucci-Nicola Salvati-Monica Pratesi, Stimatore Combinato r Correlazione Spaziale nella Stima per Piccole Aree
- ☐ **n. 241** Riccardo Cambini - Laura Carosi, Mixed Type Duality for Multiobjective Optimization Problems with set constraints
- ☐ **n. 242** O.Barsotti, L.Lecchini, F.Benassi, Foreigners from central and eastern European countries in Italy: current and future perspectives of eu enlargement
- ☐ **n. 243** A. Cambini - L. Martein - S. Schaible, Pseudoconvexity under the Charnes-Cooper transformation
- ☐ **n. 244** Eugene M. Cleur, Piero Manfredi, and John R. William, The pre-and post-Vaccination regional dynamics of measles in Italy: Insights from time series analysis

Anno: **2004**

- ☐ **n. 245** Emilio Barucci - Jury Falini, Determinants of Corporate Governance in Italy: Path dependence or convergence?
- ☐ **n. 246** R. Cambini - A. Marchi, A note on the connectedness of the efficient frontier
- ☐ **n. 247** Laura Carosi - Laura Martein, On the pseudoconvexity and pseudolinearity of some classes of fractional functions
- ☐ **n. 248** E. Barucci - R. Monte - B. Trivellato, Bayesian nash equilibrium for insider trading in continuous time
- ☐ **n. 249** Eugene M. Cleur, A Time Series Analysis of the Inter-Epidemic Period for Measles in Italy
- ☐ **n. 250** Andrea Mercatanti, Causal inference methods without exclusion restrictions: an economic application.
- ☐ **n. 251** Eugene M. Cleur, Non-Linearities in Monthly Measles data for Italy
- ☐ **n. 252** Eugene M. Cleur, A Treshold Model for Prevaccination Measles Data: Some Empirical Results for England and Italy
- ☐ **n. 253** Andrea Mercatanti, La gestione dei dati mancanti nei modelli di inferenza causale: il caso degli esperimenti naturali.
- ☐ **n. 254** Andrea Mercatanti, Rilevanza delle analisi di misture di distribuzioni nelle valutazioni di efficacia
- ☐ **n. 255** Andrea Mercatanti, Local estimation of mixtures in instrumental variables models
- ☐ **n. 256** Monica Pratesi - Nicola Salvati, Spatial EBLUP in agricultural surveys: an application based on italian census data.
- ☐ **n. 257** Emanuele Vannucci, A model analyzing the effects of information asymmetries of the traders
- ☐ **n. 258** Monica Pratesi-Emilia Rocco, Two-Step centre sampling for estimating elusive population size
- ☐ **n. 259** A.Lemmi, N.Pannuzi, P.Valentini, B.Cheli, G.Berti, Estimating Multidimensional Poverty: A Comparison of Three Diffused Methods°

Anno: **2005**

- ☐ **n. 260** Nicola Salvati, Small Area estimation: the EBLUP estimator using the CAR model
- ☐ **n. 261** Monica Pratesi-Nicola Salvati, Small Area Estimation: the EBLUP estimator with autoregressive random area effects
- ☐ **n. 262** Riccardo Cambini-Claudio Sodini, A solution algorithm for a class of box constrained quadratic programming problems
- ☐ **n. 263** Andrea Mercatanti, A constrained likelihood maximization for relaxing the exclusion restriction in causal inference.
- ☐ **n. 264** Marco Bottai - Annalisa Lazzini - Nicola Salvati, Le proiezioni demografiche. Pisa 2003/2032
- ☐ **n. 265** Andrea Mercatanti, An exercise in estimating causal effects for non-compliers: the return to schooling in Germany and Austria
- ☐ **n. 266** Nicola Salvati, M-quantile Geographically Weighted Regression for Nonparametric Small Area Estimation
- ☐ **n. 267** Ester Rizzi, Alessandro Rosina, L'influsso della Luna sul comportamento sessuale
- ☐ **n. 268** Silvia Venturi, Linda Porciani, Moreno Toigo, Federico Benassi, Il migrate nello spazio sociale transnazionale: tra integrazione nel Paese di

destinazione e appartenenza al Paese di origine

☐ **n. 269** James Raymer, Alberto Bonaguidi, Alessandro Valentini, Describing and Projecting the Age and Spatial Structures of Interregional Migration in Italy

☐ **n. 270** Laura Carosi, Laura Martein, Some classes of pseudoconvex fractional functions via the Charnes-Cooper transformation

☐ **n. 271** Laura Carosi,Antonio Villanacci, Relative wealth dependent restricted participation on financial markets

☐ **n. 272** Riccardo Cambini, Claudio Sodini, A sequential method for a class of box constrained quadratic programming problems

☐ **n. 273** Riccardo Cambini, Rossana Riccardi, An approach to discrete convexity and its use in an optimal fleet mix problem

☐ **n. 274** Riccardo Cambini, Claudio Sodini, An unifying approach to solve a class of parametrically-convexifiable problems

☐ **n. 275** Paolo Manca, Misure di Rischio Finanziario

☐ **n. 276** Bruno Cheli e Gianna Righi, Rapporto sulle abitudini di consumo di acqua potabile nel Comune di Cecina

☐ **n. 277** Anna Marchi - Laura Martein, Pseudomonotonicity of an affine map and the two dimensional case

☐ **n. 278** Andrea Pallini, Bernstein-type approximation of smooth functions

☐ **n. 279** Ray Chambers, Monica Pratesi, Nicola Salvati, Nikos Tzavidis, Spatial M-quantile Models for Small Area Estimation

Anno: **2006**

☐ **n. 280** Franco Fineschi and Riccardo Giannetti, ADJOINTS OF A MATRIX

☐ **n. 281** Andrea Mercatanti, An ML procedure for partially identified Causal models

☐ **n. 282** Marco Geraci, Nicola Salvati, The geographical distribution of the consumption expenditure in Ecuador: Estimation and mapping of the regression quantiles

☐ **n. 283** Mauro Sodini, Labour supply in a polluted world

☐ **n. 284** Mauro Sodini, The Fragility of Social Capital: An Analytical Approach

☐ **n. 285** Mauro Sodini, An endogenous growth model with social capital

☐ **n. 286** Mauro Sodini, A two sectors growth model with social capital

☐ **n. 287** Monica Pratesi, M. Giovanna Ranalli, Nicola Salvati, Nonparametric M-quantile Regression using Penalized Splines

☐ **n. 288** Riccardo Cambini e Claudio Sodini, A computational comparison of some branch and bound methods for indefinite quadratic programs

☐ **n. 289** Riccardo Cambini, Multiobjective Problems with Set Constraints: from Necessary Optimality Conditions to Duality Results

☐ **n. 290** Il ruolo della complementarità stretta in programmazione matematica, Giorgio Giorgi

☐ **n. 291** Andrea Pallini, Bernstein-type approximation using the beta-binomial distribution

☐ **n. 292** Andrea Mercatanti, Identifiability and two-steps estimation procedures in casual models with ignorable assignments and non-ignorable compliance

Anno: **2007**

☐ **n. 293** Nikos Tzavidis, Nicola Salvati, Monica Pratesi, Ray Chambers, M-quantile Models with Application to Small Area Estimation and Poverty Mapping

☐ **n. 294** Andrea Pallini, Saturation and Superefficiency for some Approximation of the Bernstein Type

☐ **n. 295** Giorgio Guzzetta, Piero Manfredi, Estimation of the forces of infection in a complex epidemiological model for meningitis using genetic algorithms

☐ **n. 296** Emanuele Del Fava, Piero Manfredi, Strange phenomena in the most basic inferential procedure: interval estimation for a binominal proportion

☐ **n. 297** Odo Barsotti, Federico Benassi, Moreno Toigo, Migrants, employ et dèveloppement èconomique dans les provinces italiennes.

☐ **n. 298** Odo Barsotti, Federico Benassi, Linda Porciani, Moreno Toigo, Silvia Venturi, Trasmigrants, The Integration Process and Links with Country of Origin

☐ **n. 299** Riccardo Cambini
Claudio Sodini, Global optimization of a generalized quadratic program

☐ **n. 300** Riccardo Cambini end Rossana Riccardi, Theoretical and algorithmic results for a class of hierarchical fleet mix problems

Anno: **2008**

☐ **n. 301** Riccardo Cambini and Claudio Sodini, A brannch and bound approach for a class of d.c. programs

☐ **n. 302** I.M. Stancu - Minasian and Andrea Madalina Stancu, SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITIONS FOR NONLINEAR PROGRAMMING WITH MIXED CONSTRAINTS AND GENERALIZED p-LOCALLY ARCWISE

☐ **n. 303** Ray Chambers, Hukum Chandra and Nicola Salvati, Estimation of Proportions for Small Areas Using Unit Level Models With Spatially Correlated population – An Application to Poverty Mapping.

☐ **n. 304** Andrea Mercatanti, Assessing the effect of debit cards on households' spending under the uncounfoundedness assumption

☐ **n. 305** Riccardo Cambini and Rossana Riccardi, On Discrete quasiconvexity concepts for single variable scalar functions

☐ **n. 306** Sara Biagini, Marco Frittelli, Matheus Grasselli, Indifference price with general semimartingales

☐ **n. 307** Sara Biagini, Paolo Guasoni, Relaxed Utility Maximization

☐ **n. 308** Monica Pratesi, Nonparametric Small Area Estimation via M-quantile Regression using Penalized Splines

☐ **n. 309** Angelo Antoci, Mauro Sodini, Indeterminacy, bifurcations and chaos in an overlaping generations model with negative environmental externalities

☐ **n. 310** A. Cambini L. Martein, On the maximal domains of pseudoconvexity of some classes of generalized fractional functions.

☐ **n. 311** A. Cambini L. Martein, On the generalized convexity of quadratic functions.

☐ **n. 312** Riccardo Cambini, Claudio Sodini, Global optimization of a generalized linear program.

☐ **n. 313** Cambini Alberto, Carosi Laura and Martein Laura, A new approach for regularity conditions in vector optimization

☐ **n. 314** Porciani Linda, Martin Pilar, La mediazione familiare: strumento di risoluzione dei conflitti

Anno: **2009**

☐ **n. 315** Federico Benassi, Linda Porciani, The dual profile of migration in Tuscany.

☐ **n. 316** Laura Carosi, Michele Gori, Antonio Villanacci, Endogenous Restricted Participation in General Financial Equilibrium-Existence Results

☐ **n. 317** Sara Biagini Mihai Sirbu, A note on investment opportunities when the credit line is infinite

☐ **n. 318** G. Giorgi, C. Zuccotti, Matrici a diagonale dominante:
principali de□nizioni, propriet□a

e applicazioni